放物線と作図

志甫　淳

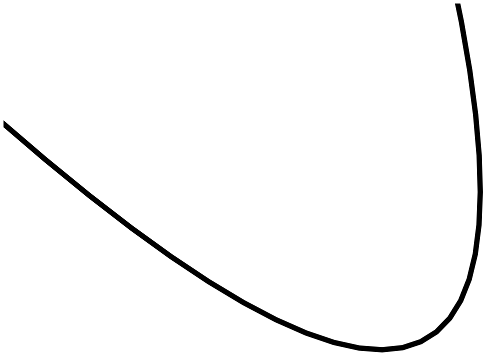
東京大学大学院数理科学研究科

2023 年 10 月 9 日
群馬県高校生数学キャンプ

目次

今日は，放物線に関連した，コンパスと定規を用いた作図の問題を考える．

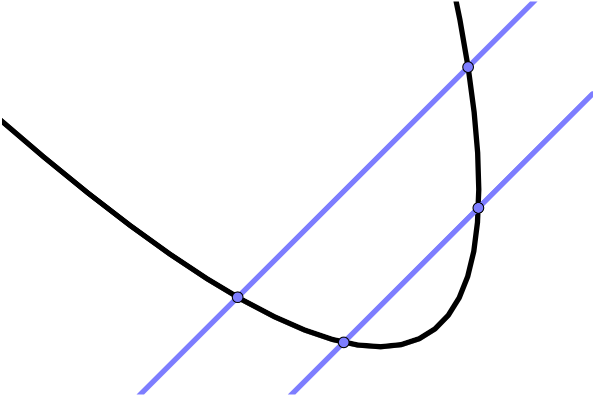
平面内に放物線が描かれているとする．



問題

放物線の軸をコンパスと定規を用いて作図せよ．

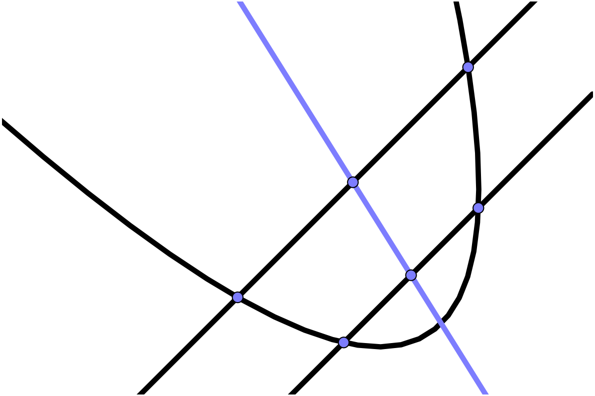
解答１：
まず，放物線と 2 点で交わるような，平行な 2 直線を描く．



演習 1

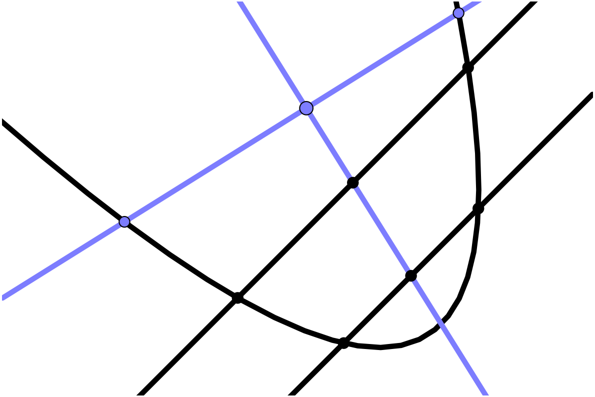
続きを考えてみよう．

2 直線のそれぞれについて，放物線との 2 つの交点の中点をとる．
そして，得られた 2 つの中点を結ぶ．

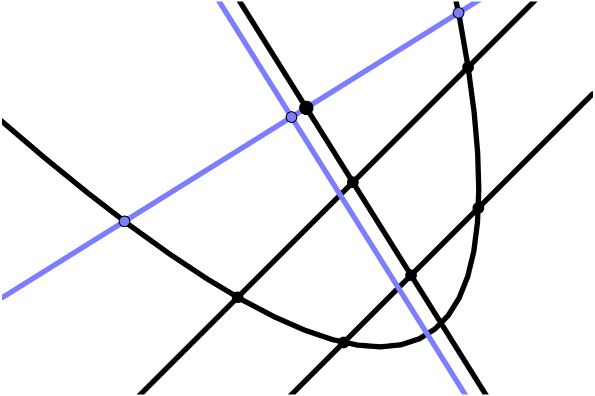


これはまだ軸ではないが，実は，軸と平行な直線である．

得られた直線上の点を適当にとり，それを通る垂線を引く．
(但し，垂線が放物線と 2 点で交わるようにする．)
それは軸に垂直な直線である．

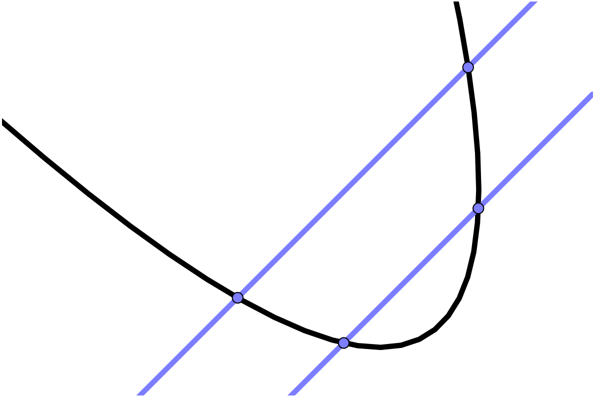


従って，その直線を放物線の 2 交点で切り取ってできる線分との垂直 2 等分線を引けば，それが軸となる．

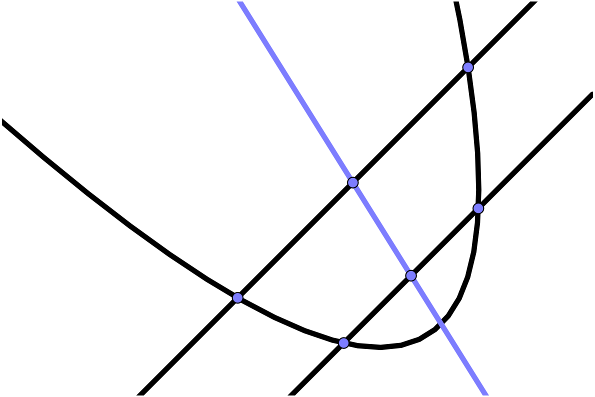


なぜこの作図でよいのか？

放物線の式が $y=x^2$……① となる座標を入れて考える．
平行な 2 直線の式は $y=ax+b$……②，$y=ax+c$……③ と書ける．
$(a,b,c$ の値はわからない．)
①，②の交点において $x^2-ax-b=0$．2 交点の x 座標の和は a.
①，③の交点において $x^2-ax-c=0$．2 交点の x 座標の和は a.

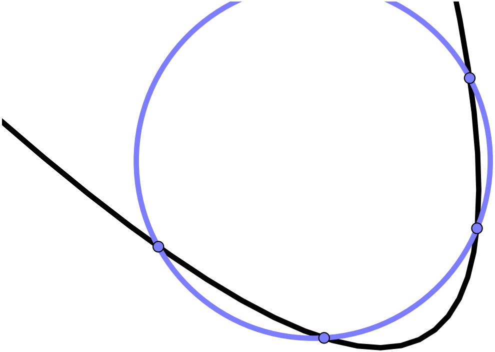


よって，①, ②の 2 つの交点の中点の x 座標,
①, ③の 2 つの交点の中点の x 座標はともに $\dfrac{a}{2}$ であり，
従って，この 2 つの中点を結んだ直線は軸に平行である！



残りの作図の説明は省略する．

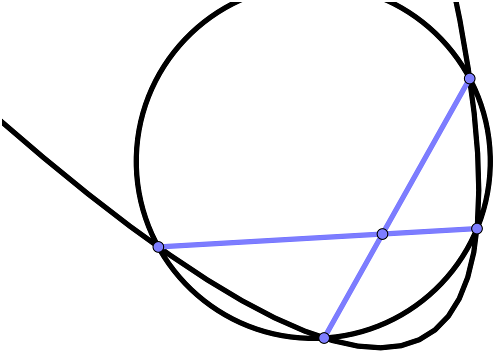
解答２：
放物線と 4 点で交わる円を描く．



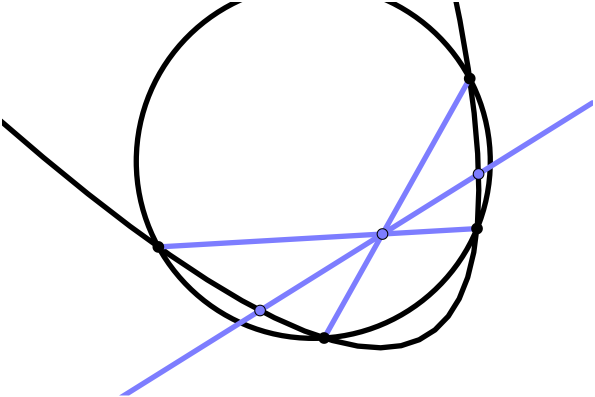
演習２

続きを考えてみよう．

4 交点を 2 つずつ結ぶ．
但し，できた 2 つの線分が交わるようにする．

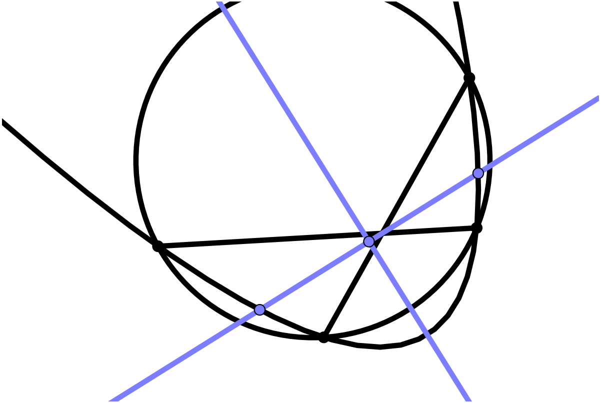


2 線分の交点を通る，2 線分の 2 等分線を引く．
但し，2 等分線は放物線と 2 点で交わるものをとる．



実は，これは軸に垂直である．

従って，その直線を放物線の 2 交点で切り取ってできる線分の垂直 2 等分線を引けば，それが軸となる．

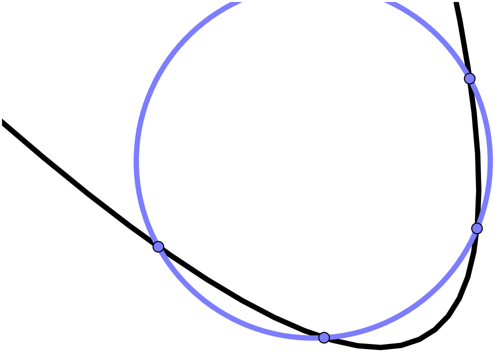


なぜこの作図でよいのか？

放物線の式が $y = x^2$……① となる座標を入れて考える．
円の式は $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$……② と書ける．
(a, b, r の値はわからない．)

①, ②の交点において
$(x-a)^2 + (x^2-b)^2 = r^2$, つまり
$x^4 + (1-2b)x^2 - 2ax + (a^2+b^2-r^2) = 0$……③ となる．

交点の座標を (x_i, y_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ とおく．

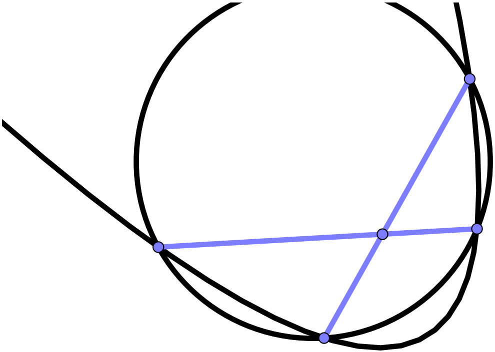


すると，①より $y_i = x_i^2\,(i = 1, 2, 3, 4)$ である．

よって，$\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$, $\dfrac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4} = x_3 + x_4$ であるから，

4 交点を結んでできる線分の傾きは (適当に番号付けすると)

$x_1 + x_2$, $x_3 + x_4$ である．



ここで，x_1, x_2, x_3, x_4 は ③の 4 つの解であるから

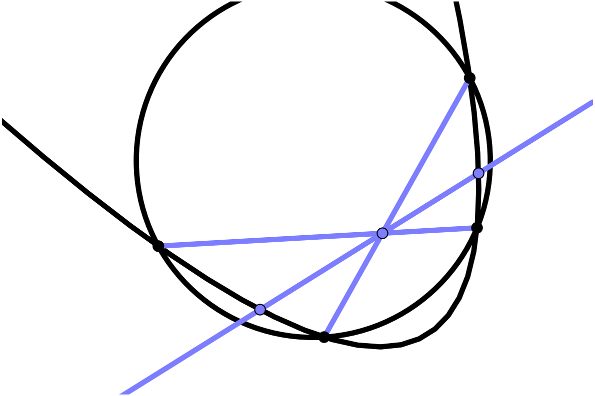
$$x^4 + (1-2b)x^2 - 2ax + (a^2+b^2-r^2) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

この式の右辺を展開して x^3 の係数を比べることにより

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ を得る．

つまり，$(x_1+x_2)+(x_3+x_4)=0$ であるから，

2 線分の 2 等分線の傾きは 0, つまり，軸に垂直である．



残りの作図の説明は省略する．

目次

ギリシアの三大作図問題

次の 3 つの作図は定規とコンパスによって可能か？

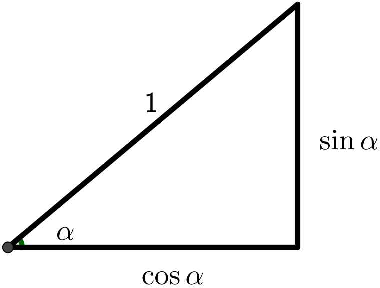
1. 与えられた円と等しい面積をもつ正方形を作ること（円積問題）
2. 与えられた立方体の体積の 2 倍に等しい体積をもつ立方体を作ること（立方体倍積問題）
3. 与えられた角を三等分すること（角の三等分問題）

現在では，これらは全て不可能であることが証明されている．

(大ざっぱな) 理由：
1. これは $\sqrt{\pi}$ を作図で求めるということであり，この数はどのような n 次方程式の解にもならないから．
2. これは $\sqrt[3]{2}$ を作図で求めるということであり，それは 3 次方程式を解かないと求められないから．
3. これも 3 次方程式を解かないと求められないから．

3. について，もう少し詳しく説明する．
そのために，まず三角比について述べる．

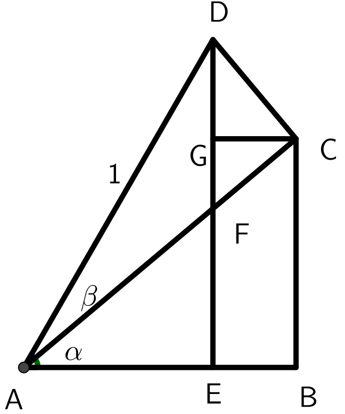
角度 α に対して，斜辺の長さが 1 の直角三角形を用いて次のように $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ を定める．
(今日は，三角比を考える角度は全て 0° と 90° の間だとする.)



三平方の定理より $(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1$ である．

角度 α を作図するということは，長さ $\cos\alpha$ の線分を作図することと同値であるから，角の三等分問題は，$\cos 3\alpha$ が与えられたときに $\cos\alpha$ を作図する問題である．
$\cos 3\alpha$ と $\cos\alpha$ との関係はどうなっているか？

$\angle \mathrm{CAB} = \alpha$, $\angle \mathrm{ABC} = 90^\circ$ の $\triangle \mathrm{ABC}$ と，$\angle \mathrm{DAC} = \beta$, $\angle \mathrm{ACD} = 90^\circ$ の $\triangle \mathrm{ACD}$ を考える．但し，$\mathrm{AD} = 1$ とする．



すると三角比の定義より $\mathrm{AE} = \cos(\alpha + \beta)$ である．これを求めたい．

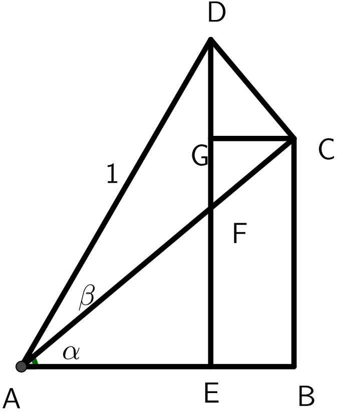
三角比の定義より $\mathrm{AC} = \cos\beta$ であり，よって $\mathrm{AB} = \cos\alpha\cos\beta$ である．

また，$\triangle \mathrm{AEF}$ と $\triangle \mathrm{DCF}$ は合同なので，$\angle \mathrm{CDF} = \angle \mathrm{EAF} = \alpha$ である．

一方，三角比の定義より $\mathrm{CD} = \sin\beta$ である．すると
$\mathrm{BE} = \mathrm{CG} = \sin\alpha\sin\beta$ となる．

よって $\cos(\alpha+\beta) = \mathrm{AE} = \mathrm{AB} - \mathrm{BE} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ となる．

また，$\mathrm{DG} = \cos\alpha\sin\beta$, $\mathrm{GE} = \mathrm{CB} = \sin\alpha\cos\beta$ なので
$\sin(\alpha+\beta) = \mathrm{DE} = \mathrm{GE} + \mathrm{DG} = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ となる．



$\beta = \alpha$ のときを考えることにより
$\cos 2\alpha = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2 = 2(\cos\alpha)^2 - 1$
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ となる．

さらに，$\beta = 2\alpha$ のときを考えることにより
$\cos 3\alpha = \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha$
$= (\cos\alpha)(2(\cos\alpha)^2 - 1) - 2(\sin\alpha)^2\cos\alpha$
$= (\cos\alpha)(2(\cos\alpha)^2 - 1) - 2(1 - (\cos\alpha)^2)\cos\alpha$
$= 4(\cos\alpha)^3 - 3\cos\alpha$ となる．

($\sin 3\alpha$ を表す公式もあるが，それは省略する.)

従って，$\cos 3\alpha$ が与えられたとき，
$\cos\alpha$ は 3 次方程式 $4x^3 - 3x - \cos 3\alpha = 0$ の解となる．

定規とコンパスによる作図では，直線と直線の交点，直線と円の交点，
円と円の交点を求めることにより新しい点が定まる．その座標は，
1 次方程式または 2 次方程式の解となる．

実は，因数分解できない 3 次方程式の解を，1 次方程式または 2 次方程式を
解くことの繰り返しで求めることはできない．これが角の三等分が
作図できない理由である．

例えば，$3\alpha = 60^\circ$ の三等分，つまり $\alpha = 20^\circ$ の作図を考える．
このとき $\cos 3\alpha = \dfrac{1}{2}$ なので，解くべき方程式は
$4x^3 - 3x - \dfrac{1}{2} = 0$，つまり $8x^3 - 6x - 1 = 0$ となる．
これは，実は有理数係数の範囲で因数分解できないので，
20° の作図はできないことになる．

では，紙にあらかじめ放物線が描かれている場合はどうだろうか？

問題

紙にあらかじめ放物線 $y = x^2$ が描かれているとする．
このとき，60° の三等分 (20° の作図) はできるか？

答え：できる！

理由：$\cos 20^\circ$ は $8x^3 - 6x - 1 = 0$，つまり $(2x)^3 - 3(2x) - 1 = 0$ の解なので，$2\cos 20^\circ$ は $x^3 - 3x - 1 = 0$ の解である．

放物線 $y = x^2$ と円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ の交点において
$(x-a)^2 + (x^2-b)^2 = r^2$, つまり
$x^4 + (1-2b)x^2 - 2ax + (a^2+b^2-r^2) = 0$ となる．

$a = \dfrac{1}{2}, b = 2, r = \sqrt{a^2+b^2}$ の長さの作図は可能であり，
これらに対して上記の円を描くと，放物線と円の交点において
$(x^3 - 3x - 1)x = 0$ となる．

従って，交点の x 座標のうち正のものは $2\cos 20^\circ$ となっており，
これを半分にすれば $\cos 20^\circ$ となる．従って，20° が作図可能である．

演習 3

実際に 20° を作図してみよ．

演習 4

紙にあらかじめ放物線 $y = x^2$ が描かれているとする．角度 3α が与えられたときに，その 3 等分 α は作図可能か？その方法は？

ありがとうございました！