# 射影幾何の考えかた

逆井 卓也 *

2023 年 10 月 9 日

## 1　はじめに

午後の講演では**射影幾何**と呼ばれる、これまでに習った平面幾何（ユークリッド幾何）とは性質の異なる幾何学について紹介をします。この幾何では長さや角度などの量は考えず、直線や曲線の交わりや位置関係に注目します。最も特徴的なこととして、平面に無限遠点（遥か彼方の点）たちを実際に付け加えた**射影平面**と呼ばれる面を考えて理論を展開するということが挙げられます。高校の数学で極限を扱うとき、「無限大は数ではない」と強調しますので、無限遠点を実在する点とするのは不思議に思うかもしれません。その不思議を解決する鍵となるのが**射影**と呼ばれる操作なのです。

射影とは、素朴には太陽光線のような特定の方向に進む光が物によって遮られた時に、奥の面にできる影を考えることを意味します。英語では projection と言いますが、それをそのまま読んだプロジェクションという言葉は日常生活にもかなり溶け込んでいます。たとえば、講演でスライドを見せるときに用いるプロジェクターをはじめ、近年ではプロジェクション・マッピングなど映像技術における発展が目覚ましく、我々の生活を彩るものとなっています。もっと根本的に、我々の視覚、すなわち物を見る仕組みそのものもまた、外界から入ってくる光線の網膜への射影という形で説明がなされます（3 節を参照）。


歴史的には、射影幾何の理論の成立に先んじて、美術の世界において透視図法と呼ばれる手法がイタリアの建築家ブルネレスキ（Filippo Brunelleschi, 1377–1446）によって確立され、ルネサンス期の 15 世紀に大きな発展を見せました。その結果、上の写真と同様に、

* 東京大学大学院数理科学研究科. 令和 5 年度群馬県高校生数学キャンプ「2 次曲線」における講演.

見えるものをそのまま写し取ったような、奥行きを感じさせる絵画が多く生み出されました。そこでは、消失点と呼ばれる無限遠点がキャンバスの上に実際に現れます。その無限遠点をどのように理解するかが射影幾何を理解するポイントとなるのですが、数学的にそれが明確になるまでは、それなりの時間を要しました。いくつかの転換点を経て、理論そのものが完成したと言える段階に至ったのは 19 世紀頃となります。その後、この分野は（射影）代数幾何学と呼ばれる分野に昇華し、現在もなお発展を続けています。

**記号に関する注意**　数学において、実数全体の集合や数直線を表すのにしばしば

$$\mathbb{R}$$

という記号を用います。これは実数を表す Real number の頭文字を強調した表記となっています。このとき「$x \in \mathbb{R}$」とは「$x$ は実数である」ということを意味します。簡単に書けるので講演でも積極的に用います。加えて、

$$\text{座標平面（}xy\text{ 平面）を } \mathbb{R}^2, \qquad \text{座標空間（}xyz\text{ 空間）を } \mathbb{R}^3$$

で表します。それぞれ、座標として実数を 2 つ、もしくは 3 つ並べたものと考えて下さい。

## 2　射影とは

この節ではまず、射影がどういうものなのか数学的に説明します。簡単のため平面の上への射影に話を絞ります。一定方向に進む点について振り返ることから始めましょう[1]。

座標平面 $\mathbb{R}^2$ において、点 $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ を通り $(a,b)$ 方向に進む点の座標は、パラメータ $t$ を用いて

$$x = p + at, \qquad y = q + bt$$

で与えられ、$t$ を実数全体で動かすことにより、

$$\{(p+at, q+bt) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

という軌跡が得られます。ここで、進む方向 $(a,b)$ は $(0,0)$ でない、すなわち点がしっかりと動いているものとします。$t$ を消去すれば分かるように、この軌跡は直線

$$bx - ay + (aq - bp) = 0$$

と一致します。

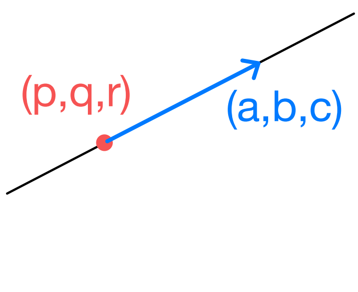
座標空間 $\mathbb{R}^3$ の場合も同様で、点 $(p,q,r) \in \mathbb{R}^3$ を通り $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ 方向に進む点の座標は、

$$x = p + at, \qquad y = q + bt, \qquad z = r + ct$$

で与えられ、$t$ を実数全体で動かすことにより、

$$\{(p+at, q+bt, r+ct) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

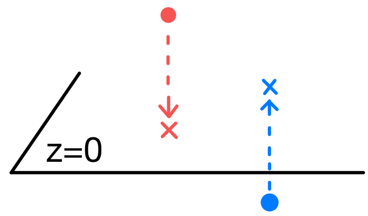
という軌跡が得られます。この軌跡は空間内の直線となっています。




[1] 本来はベクトルの言葉を使って記述したいところですが、ここではそれを表に出さずに説明します。

平面の上への射影には大きく分けて 2 つの種類があります。1 つは平行光線に対応する射影です。これは空間内のどの点も一斉に同じ（もしくは正反対の）方向に動かして、射影する先の平面 $H$ にうつすというものです。

**例 2.1** 平行光線に対応する射影の典型的な例は点 $(p,q,r)$ を $(p,q,0)$ にうつすというものです。ここで $H$ は $z=0$ で与えられる平面です。これは $\pm(0,0,1)$ 方向に動かすことにほかなりません。$z>0$ であれば真下にうつり、$z<0$ であれば真上にうつることになります。$z=0$ のとき点は動きません。



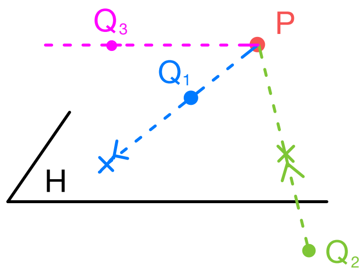

上の例では平面 $H\colon z=0$ に対して平行光線は垂直となっていましたが、そうでない場合を考えることもできます。一般の $(a,b,c)$ 方向の平行光線の場合を考えてみましょう。ここで $c=0$ とすると光線が $H$ と平行になってしまい影ができませんので、$c\neq 0$ とします。このとき空間内の点 $(p,q,r)$ がうつる先を計算します。まず、$(p,q,r)$ を通る $(a,b,c)$ 方向の直線を考えますと、その直線はパラメータ $t$ を用いて $(p+at,q+bt,r+ct)$ と表されます。その直線と $H$ との交点が射影した先の点となります。その点において $r+ct=0$ が成り立つことから $t=-\dfrac{r}{c}$ となり、この値を代入することで求める点の座標が

$$\left(p-\frac{ar}{c},q-\frac{br}{c},0\right)$$

と求まります。

**注意 2.2** より一般に、空間内の平面は 3 変数 1 次方程式 $ax+by+cz=d$（$a,b,c,d$ は定数）によって与えられます。その平面へ射影した点の座標は、上と同様に点が進んでできる直線の座標を考え、それを方程式に代入して $t$ の値を求めることで決定できます。

もう 1 つの射影として、点光源 $P$ に対応する射影があります。ここで $P$ は空間内で選ばれた 1 点です。そして空間内の別の点 $Q$ に対し、直線 $PQ$ と $H$ との交点を対応させます。少し注意しなければならないのは、点 $P$ が $H$ 上にないとき、右図の点 $Q_3$ のように、$P$ を通り $H$ と平行な平面の点に対しては、光線が $H$ と平行になってしまうため、射影が定義できないということです。




**注意 2.3** 地球に降り注ぐ太陽光のように光源と物体の間の距離が非常に離れている場合、点光源による射影はほぼ平行光線による射影となります。この事実を「無限遠点を点光源とする射影」と理解することが本講演の目的の 1 つです。

射影が持つ性質をいくつか列挙します。余裕があれば証明を与えてみて下さい。

- 直線を射影したものは直線もしくは 1 点である。1 点となるのは、直線が平行光線と平行な場合、もしくは直線が点光源を通る場合である。

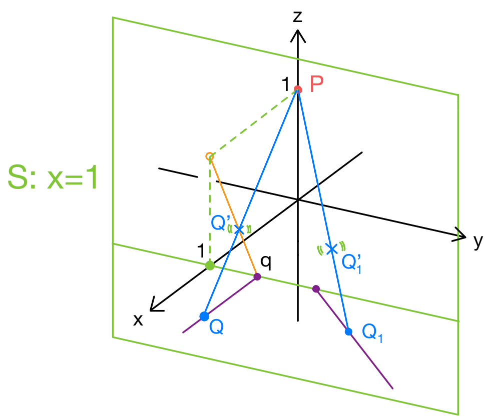
- 2 直線の交点を射影した点は、それぞれの直線を射影して得られる直線たちの交点に等しい。
- 2 直線の角度や 2 点の距離は一般には保たれない。

## 3　消失点と地平線

射影による図形の見え方を理解するために次のようなモデルを考えます:

まず平面 $z=0$ を $xy$ 平面 $\mathbb{R}^2$ と同一視します。この平面と直交する平面 $x=1$ を $S$ とします。$S$ はこれから行う射影に対するスクリーンの役割を果たします。いま、点 $P(0,0,1)$ を点光源とする射影によって $\mathbb{R}^2$ 上に描かれた図形を $S$ 上にうつすことを考えましょう。

このモデルは点 $P$ を視神経、平面 $S$ を網膜として、足元の平面 $\mathbb{R}^2$ 上の図形を見るときの仕組みを簡潔に表したものと考えることもできます。




点 $P$ から $z$ 座標を保つ方向（水平方向）に光を放っても、その光線は $xy$ 平面 $\mathbb{R}^2$ と平行なため、いつまでたっても $\mathbb{R}^2$ には届きません。すなわち $S$ における直線 $z=1$ 上にうつされる $\mathbb{R}^2$ の点は存在しません。直線 $z=1$ は地平線に対応します。

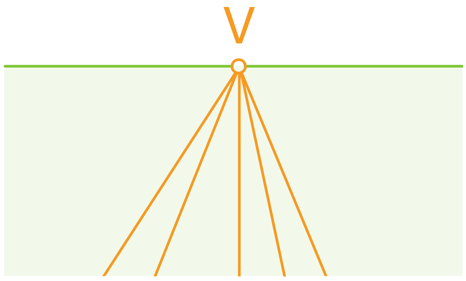
(1) $\mathbb{R}^2$ 上の半直線 $x \geq 1, y=z=0$ の各点を点 $P$ からの射影によって $S$ の上にうつしてみましょう。$P$ から $x$ 軸を見下ろすという図形的な考察から、結果が $S$ における直線の一部 $x=1, y=0, 0 \leq z < 1$ となることが予想されます。実際、半直線上の点を $Q(p,0,0)$ としますと、点 $P(0,0,1)$ から点 $Q$ へ向かう直線は、パラメータ $t$ を用いて

$$x = pt, \qquad y = 0, \qquad z = 1 - t$$

と表すことができます。これと平面 $S\colon x=1$ が交わるのは $t = \dfrac{1}{p}$ のときであり、その交点の座標は $Q'\left(1, 0, 1-\dfrac{1}{p}\right)$ で与えられます。いま $p$ は $p \geq 1$ の範囲を動きますので、$Q'$ の軌跡は予想通り $x=1, y=0, 0 \leq z < 1$ となります。とくに $p$ を限りなく大きくしていくと、射影した点は $V(1,0,1)$ に限りなく近づいていきます。$V$ を**消失点**と言います。

(2) (1) で考えた半直線を $y$ 軸方向に $q>0$ だけ平行移動した半直線 $x \geq 1, y=q, z=0$ の場合はどうなるでしょうか。この半直線上の一般の点 $Q(p,q,0)$ がうつる点 $Q'$ は、上と同様の考察により $Q'\left(1, \dfrac{q}{p}, 1-\dfrac{1}{p}\right)$ となります。$q$ を固定した状態で $p$ を $p \geq 1$ の範囲で動かすと、$Q'$ は直線 $z = 1 - \dfrac{y}{q}$ の $0 < y \leq q$ の部分を動きます。とくに $p$ を限りなく大きくしていくと、$Q'$ は $q$ の値に関係なく点 $V(1,0,1)$ に限りなく近づいていきます。$y$

軸に対する対称性を考えると、$q < 0$ だけ平行移動した場合も同様の結論が得られます。これらの平行な半直線たちは共通の消失点をもっているのです。




以上のことは、平行な直線たちが遥か彼方で一つの点に集まっていくように見える現象（最初のページの写真をもう一度見てみましょう）を数式を用いて説明したことにほかなりません。

(3) 続けて、$x$ 軸と平行とは限らない $\mathbb{R}^2$ 上の一般の直線の $x \geq 1$ の部分に対して $S$ への射影を計算してみましょう。ただし $y$ 軸と平行な場合は除外します。そのような半直線として、2 つの定数 $a \neq 0$ と $b$ を用いて表される直線 $x = ay + b, z = 0$ を考えます。この直線の $x \geq 1$ の部分の一般の点は $(as + b, s, 0)$ と表されます。上と同様の計算により、射影した先の点の座標は

$$\left(1, \frac{s}{as+b}, 1 - \frac{1}{as+b}\right)$$

となることが分かります。仮定より $as + b \geq 1$ です。この点は直線 $ay - bz + b - 1 = 0$ 上にあることが直接確かめられます。いま $x = as + b > 1$ の範囲で $s$ を動かすと、$z$ 座標は $0 \leq z < 1$ の範囲を動きます。$a$ の符号に注意して $as + b$ を限りなく大きくすると、この点は $b$ の値に依らず、直線の傾き $a$ にのみ依存する形で、消失点

$$V\left(1, \frac{1}{a}, 1\right)$$

に限りなく近づきます。

以上をまとめると、次が成り立ちます。$\mathbb{R}^2$ の $x \geq 1$ の部分に引かれた $y$ 軸と平行でない直線 $\ell$ に対して、それを上記の射影で $S$ 上にうつした図形を $P(\ell)$ と書くことにします。

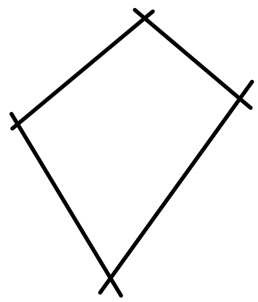
- $P(\ell)$ は直線 $z = 0$ 上のから地平線 $z = 1$ の点（消失点）に向かっていくような直線である.
- 2 つの直線 $\ell_1, \ell_2$ について、$P(\ell_1)$ と $P(\ell_2)$ が同じ消失点を持つための必要十分条件は、$\ell_1$ と $\ell_2$ が平行であることである。

すなわち**地平線の各点は $\mathbb{R}^2$ 上に引かれた直線の（$0$ と異なる）傾きの値と対応している**のです。この事実は後半の講演で、無限遠点を実際につけ加える際の重要な鍵となります。

**問題 3.1** 上で考察した半直線（$x$ 軸と平行でない場合も含む）の $S$ への射影の様子（とくに消失点の位置）は、数式を使わずとも、平面の交わりを利用した図形的考察により求めることができます。どのようにしたらよいか考えてみましょう。

**問題 3.2** 点 $P(0,0,1)$ からの射影によって、$x$ 軸上の各点が $S$ のどの点にうつるか整理しましょう。とくに、どのようなときに $z>1$ の点（地平線の上）にうつったり、$z<0$ の部分にうつったりするかか答えて下さい。[$x$ 軸上を連続的に進んでいくと、途中で無限遠に向かってしまい、さらに進むと反対側から現れることが確認できると思います。そのような点の移動の舞台裏を見てみることが後半の目標です。]

**問題 3.3** $\mathbb{R}^2$ 上に同じ形の長方形が格子状に敷き詰められているとします。この長方形の 1 つを $S$ に射影したときの様子が下図のように与えられているとき、地平線や周囲の長方形たちを作図してみましょう。



この節の終わりに 2 次曲線に関連して、次の問題を考えてみましょう。

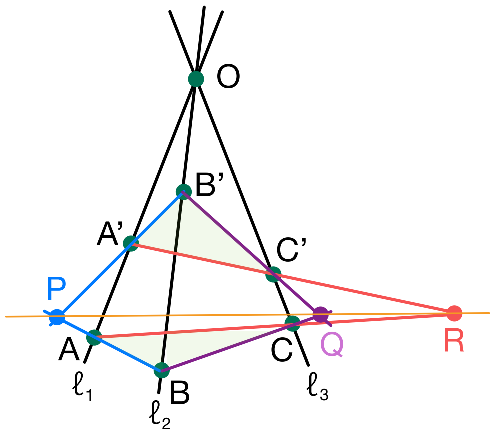
**問題 3.4** 平面 $\mathbb{R}^2$ 上に描かれた放物線 $x=y^2+1$ を点 $P(0,0,1)$ からの射影によって $S$ にうつした図形を求めましょう。

この問題の解答は円 $y^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ から点 $(y,z)=(0,1)$ を除いたものとなります。すなわち、この放物線を $P$ から見ると、ちょうど地平線に下から接する綺麗な円（接点は除く）に見えるのです。

## 4　デザルグの定理

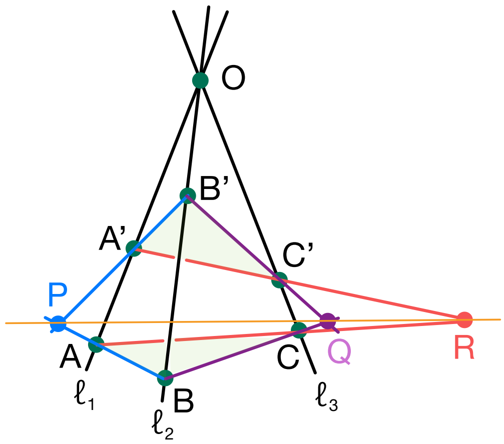
この節では**デザルグの定理**と呼ばれる有名な定理の紹介をします。この定理は通常の平面幾何の定理となっていますが、射影幾何の本質を突くものとなっています。デザルグ（Girard Desargues, 1591–1661）は 17 世紀の建築家・数学者で、まさに透視図法の研究をしていました。

**定理 4.1 (デザルグの定理)** 平面内の 3 つの直線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ が 1 点 $O$ で交わっているとする。いま $\ell_1$ 上に 2 点 $A, A'$ を、$\ell_2$ 上に 2 点 $B, B'$ を、$\ell_3$ 上に 2 点 $C, C'$ をとり、三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ を作る。直線 $AB$ と $A'B'$ の交点 $P$、直線 $BC$ と $B'C'$ の交点 $Q$、直線 $AC$ と $A'C'$ の交点 $R$ がどれも存在するとき、3 点 $P, Q, R$ は同一直線上にある。




この定理のデザルグによる元々の証明は、メネラウスの定理を用いた通常の平面幾何的手法を用いたものでした。その後、射影を使った証明が得られ、射影幾何を生み出すきっかけとなりました。なお、彼が生きている時代に彼の理論が十分に理解されることはなく、再興したのは 150 年近く後のことでした。射影を使った証明は大変興味深い構成をしています。先に空間版を証明してから元の平面版を証明するのです。

**定理 4.2 (空間版のデザルグの定理)** 空間内の 3 つの直線 $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ が 1 点 $O$ で交わっているとする。いま $\ell_1$ 上に 2 点 $A, A'$ を、$\ell_2$ 上に 2 点 $B, B'$ を、$\ell_3$ 上に 2 点 $C, C'$ をとり、三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ を作る。直線 $AB$ と $A'B'$ の交点 $P$、直線 $BC$ と $B'C'$ の交点 $Q$、直線 $AC$ と $A'C'$ の交点 $R$ がどれも存在するとき、3 点 $P, Q, R$ は同一直線上にある。



上の 2 つの図の違いは若干の立体感の有無だけで、ほぼ同じものです。そもそも私たちが立体の図を紙の上に描くとき、何らかの射影を行っています。同じような図となるということは、定理の内容が射影に関して変わらない性質を扱っているということの何よりの証左となっています。

**空間版のデザルグの定理の証明**

$\triangle ABC$ を含む平面を $S_1$、$\triangle A'B'C'$ を含む平面を $S_2$ とします。いま $S_1$ と $S_2$ は異なる平面であると仮定します（同一平面上にあるときは、元の平面版になってしまいます）。点 $P$ が存在することより、$S_1$ と $S_2$ が平行でないことが従います。いま、$P$ は直線 $AB$ 上にあるので、その直線を含んでいる平面 $S_1$ に含まれます。$Q, R$ についても同様です。また、$P$ は直線 $A'B'$ 上にあるので、その直線を含んでいる平面 $S_2$ に含まれます。$Q, R$ についても同様です。よって、$P, Q, R$ はすべて共通部分 $S_1 \cap S_2$ に含まれているわけですが、平行でない 2 つの平面 $S_1$ と $S_2$ の共通部分は 1 本の直線（交線）です。よって $P$, $Q, R$ はその交線上にあることが示せました。 $\square$

**元の平面版のデザルグの定理の証明の概略**

空間版の簡明な証明を受けて、あらためて空間版の図と元の平面版の図を比較してみると、もう証明は済んでいるようにも思えますが、これは図を描くときに射影の力を（非数学的な形で）使ってるからです。平面版の証明を得るためにはその部分を数学的に明確にしないといけません。

いま、元の平面版の図が空間 $\mathbb{R}^3$ 内の平面 $z = 0$ 上に描かれているとします。とくに点 $O$ が原点 $(0, 0, 0)$ であるとします。ここで点 $\widetilde{O} = (0, 0, 1)$ をとり、直線 $L_1 = \widetilde{O}A$ を考えると、$\pm(0, 0, 1)$ 方向の平行光線による射影によって $A'$ にうつるような点 $A''$ がその直線上にただ 1 つ存在します。同様にして、直線 $L_2 = \widetilde{O}B$ 上に点 $B''$ を、直線 $L_3 = \widetilde{O}C$ 上に点 $C''$ をとります。このとき、（若干の確認が必要となりますが）$\triangle ABC$ と $\triangle A''B''C''$ は空間版のデザルグの定理が使える形となっています。それにより $\triangle ABC$ と $\triangle A''B''C''$ の対応する辺たちから得られる 3 点は同一直線上にあることが従いますが、その 3 点を先の射影によって平面 $z = 0$ 上にうつした 3 点が $P, Q, R$ に他なりません。射影が直線を保つことより、$P, Q, R$ も同一直線上にあることが示せました。 $\square$

以上のようにして、射影の力を前面に出した形でデザルグの定理を証明しましたが、この定理にはいくつかの別バージョンが存在します。それらは $AB$ と $A'B'$ が平行であるときなど、例外的な場合にも同様のことが成り立つという形で与えられます。総じて証明は上で述べた一般の場合よりも簡単になります。

**問題 4.3** デザルグの定理の別バージョンについて調べ、その証明を与えて下さい。

考えるべき別バージョンは幾つもあって、証明は簡単になるものの、1 つ 1 つを見ていくのが煩わしいと感じてしまうかもしれません。実は、射影幾何を用いると、別バージョンたちをまとめて扱うことができ、さらに別バージョンの簡単の証明が一般の場合の証明を与えているということが起きるのです。

# 5　連比と射影平面

この節より後半の内容となります。小、中学校で習った平面幾何は平行線や円の性質などを使うことが多く、学年が進むに連れて方程式を用いた議論による図形の扱いを習ってきました。デザルグの定理を入り口とした射影幾何学においても方程式を用いた記述ができると便利です。そのために、この節では考える舞台となる面である、射影平面を定義し、その性質をみてみましょう。

## 5.1　射影平面の定義

天下り的な定義となりますが、射影平面の各点は 3 つの実数からなる**連比**によって与えられます。連比を表すのに $[p:q:r]$ という記号を使うことにします。比の定義により、0 でない任意の実数 $k$ に対して

$$[p:q:r]=[kp:kq:kr] \tag{1}$$

が成り立つことに注意しましょう。$[1:-2:0]$ や $[0:1:0]$ など 3 つの実数のうち、2 つまでが 0 となる連比は考えますが、$[0:0:0]$ は考えません。以上を踏まえて次を定めます。

**定義 5.1** 3 つの実数からなる連比全体の集合

$$\mathbb{R}P^2 := \{[p:q:r] \mid (p,q,r)\in\mathbb{R}^3, (p,q,r)\neq(0,0,0)\}$$

を**射影平面**という。

定義により、連比は射影平面の点そのものですが、数が並んでいることを尊重して射影平面における**斉次座標**ともいいます。射影平面という 2 次元的なものを扱うのに 3 つの実数からなる連比を用いていることに注意して下さい。等式 (1) により、数の自由度が 1 つ分だけ減っているのです。

**注意 5.1** 斉次「座標」とはいうものの、たとえば

$$[2:-1:3]=[4:-2:6]=[-2\pi:\pi:-3\pi]=\left[1:-\frac{1}{2}:\frac{3}{2}\right]$$

のように表記は一通りに定まらないため、落ち着かない気持ちになるかもしれません。しかしながら、特殊な状況として $[p:q:0]$ の形の連比を考えてみましょう。この場合、3 番目の数字はどんな数をかけても常に 0 なので、実質的に通常の比 $[p:q]$ を考えていることになります。2 つの実数からなる比全体の集合

$$\mathbb{R}P^1 := \{[p:q] \mid (p,q)\in\mathbb{R}^2, (p,q)\neq(0,0)\}$$

を**射影直線**と言います。通常の比に対しては比の値 $[p:q]\mapsto\dfrac{p}{q}$ が比の表示の仕方に依らずに定まっていました。唯一の例外として $[p:0]=[1:0]=[-1:0]$ がありますが、その比の値を形式的に $\dfrac{1}{0}=\infty=\dfrac{-1}{0}$ とおいてしまいましょう（$+\infty$ と $-\infty$ を区別しませ

ん)。すると、$[p:q:0]$ の形の連比全体は比の値を通じて $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ という集合と同一視されます。直線の傾き全体と言い表すこともできるでしょう。実は、この $\infty$ を加えるという考え方が無限遠点を加えるということそのものなのです。もっと素朴に考えますと、小学校からずっと我々は分数を扱ってきました。$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{-3}{6}=\frac{e}{2e}$ など同じ値を表すのに通分のやり方は無数にあります。しかしながら、その無数の書き方に惑わされることなく分数を 1 つの実体と思って使いこなしています。射影平面の斉次座標もそのような気持ちで触れてみると良いでしょう。

さて、射影平面の点 $[p:q:r]$ が与えられたとき、それは次の 2 つのどちらか片方に当てはまることに注意しましょう。

- $r\neq 0$ であって、$[p:q:r]=\left[\frac{p}{r}:\frac{q}{r}:1\right]$ というように、3 番目の数字を 1 とする表示を持つ.
- $r=0$ であって $[p:q:0]$ の形をしている（$p$ または $q$ は 0 と異なります)。

前者の場合、$[x:y:1]=[x':y':1]$ となるのは $(x,y)=(x',y')$ のときに限ることに注意しましょう。この事実は、前者の形の連比全体が $xy$ 平面 $\mathbb{R}^2$ と自然に同一視できることを意味しています。一方、後者の形の連比は直前に述べたように射影直線 $\mathbb{R}P^1$ と同一視できます。まとめると、次が成り立ちます。

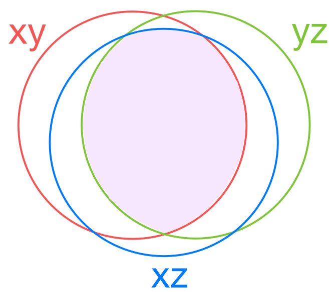
$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}P^2 &= ([x:y:1] \text{ の形の連比全体}) \cup ([x:y:0] \text{ の形の連比全体}) \\
&= \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}P^1.
\end{aligned}
$$

平面 $\mathbb{R}^2$ は 2 次元的なひろがりを持つ集合です。一方で $\mathbb{R}P^1$ の方は比の値を通じて $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ と同一視できるため 1 次元的なひろがりを持つ集合です。$\mathbb{R}P^2$ において、ほとんどすべての領域は $\mathbb{R}^2$ に占められていると考えることができます。

ここで、一つ興味深いこととして、連比において 3 つの数の役割は平等なのだから、上の分解は 0 となる数の位置を変更しても同様に成り立つということに気づくでしょう。すなわち、

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}P^2 &= ([1:y:z] \text{ の形の連比全体}) \cup ([0:y:z] \text{ の形の連比全体}) \\
&= ([x:1:z] \text{ の形の連比全体}) \cup ([x:0:z] \text{ の形の連比全体})
\end{aligned}
$$

などというように分けることもできます。あくまでイメージですが、射影平面 $\mathbb{R}P^2$ を次の図のような集合と考えると良いでしょう:



ここで 3 つの円（内部を含む）の和集合が集合 $\mathbb{R}P^2$ を表しています。$xy$ とラベルを置いた円は $[x:y:1]$ の形の連比が表す部分、同様に $yz$ は $[1:y:z]$ の形の連比が表す部分、$xz$ は $[x:1:z]$ の形の連比が表す部分を表しています。3 つの円の重なりとして薄く色付けた部分がありますが、この部分はどれも 0 でない実数 $p, q, r$ を用いた連比 $[p:q:r]$ 全体に対応し、実際のところ $\mathbb{R}P^2$ のほとんどすべての領域を占めています。それぞれの円は $\mathbb{R}^2$ と自然に対応づけられていました。すなわち、$\mathbb{R}P^2$ は 3 枚の $\mathbb{R}^2$ を互いがほぼ重なっているように貼り合わせたものと考えることができます。

### 5.2　無限遠点の現れ方

5.1 節でみた分解 $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}P^1$ や $\mathbb{R}P^1$ が直線の傾き全体の集合であることを踏まえ、3 節で観察したことを思い出すと、$\mathbb{R}P^1$ こそが無限遠点たちとして加えるべきものであることが予想できると思います。この部分を明確にしましょう。

3 節で考えたモデルは、$x, y, z$ に対して対称的ではありませんでした。そこで、次のようなモデルをあらためて考えます:
点光源として座標空間 $\mathbb{R}^3$ の原点 $O(0,0,0)$ を選びます。そして 3 つの互いに直交する平面

$$\begin{aligned}
S_1\colon x = 1,\ &\text{すなわち } \{(1, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\},\\
S_2\colon y = 1,\ &\text{すなわち } \{(x, 1, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\},\\
S_3\colon z = 1,\ &\text{すなわち } \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}
\end{aligned}$$

を考えます。どの 2 枚の平面も直交しており、点光源との距離は 1 となっていますので、3 節で考えたモデルと同じ配置になっていることに注意して下さい。

以上の準備をもとに、$O$ を点光源とする射影により $S_3$ 上の点を $S_1$ にうつしてみましょう。$S_3$ の点 $(x, y, 1)$ と $O$ を通る直線は $(xt, yt, t)$ と表されます。それと $S_1$ が交わるのは $xt = 1$ となるときですから、$x \neq 0$ という条件の下、$t = \dfrac{1}{x}$ となり、射影によってうつる先は

$$\left(1, \frac{y}{x}, \frac{1}{x}\right)$$

となります。他の平面の選び方に対しても、射影による座標の変化の式は似たような形で与えられます。それらの式は 5.1 節で見た、斉次座標を $xy, yz, xz$ のどれかの座標平面でみるときの互いの変換則と一致します[2]。

$S_3$ において $(x, y)$ が $x \neq 0$ を満たす範囲をすべて動いたとしても $S_1$ において

$$\{(1, y, 0) \in S_1 \mid y \in \mathbb{R}\} \tag{2}$$

にうつる点はありません。これは 3 節で考えたモデルで述べた地平線、すなわち消失点の集まりに対応しています。同様の計算により、$S_3$ 上の点を $S_2$ にうつして考えてみると、

[2]「$S_3$ の点を射影で $S_1$ にうつすこと」が、ちょうど「$xy$ 平面にある射影平面の点を $yz$ 平面でみること」に対応する、といった具合です。

$S_3$ において $(x, y)$ が $y \neq 0$ を満たす範囲をすべて動いたとしても $S_2$ において

$$\{(x, 1, 0) \in S_2 \mid x \in \mathbb{R}\} \tag{3}$$

にうつる点はありません。これらの点も消失点の集まりに対応しています。(2) と (3) を合わせると

$$\{(x, y, 0) \in S_2 \cup S_3 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$$

となりますが、これは射影直線 $\mathbb{R}P^1$ と自然に同一視できるものです。

少し長くなりましたが、以上の議論により $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}P^1$ と分解したときの $\mathbb{R}P^1$ が無限遠点たちとして付け加えるべきもの、すなわち消失点全体であることを確認することができました。

**注意 5.2** 座標空間 $\mathbb{R}^3$ の原点 $O(0, 0, 0)$ でない 2 点 $(p, q, r)$ と $(p', q', r')$ について、それらの連比が一致する、つまり $[p, q, r] = [p', q', r']$ となるのはそれら 2 点と $O$ を通る直線が存在するときに他なりません。すなわち射影平面 $\mathbb{R}P^2$ の点 1 つ 1 つは原点を通る直線 1 つ 1 つに対応します:

$$\mathbb{R}P^2 = (\text{原点 } O \text{ を通る直線の集合}).$$

空間において原点を中心とした回転（対称性）を考えれば、原点 $O$ を通る直線たちは本質的にはどれも同じであると言えます。射影平面を通常の座標平面に無限遠直線を加えたものとして導入しましたが、実はどの点も「平等」なのです。

# 6　射影平面内の直線の方程式

前節で射影平面 $\mathbb{R}P^2$ という座標平面に無限遠点たちを付け加えた集合を用意することができました。その集合に自然に直線の概念を拡張して、幾何を行うための準備をしましょう。

$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ なる実数の組に対して**射影平面内の直線** $\ell_{(a,b,c)}$ を

$$\ell_{(a,b,c)} := \{[p : q : r] \in \mathbb{R}P^2 \mid ap + bq + cr = 0\}$$

で定まる図形とします。1 つの連比 $[p : q : r]$ に対し $ap + bq + cr$ の値が 0 に等しいかどうかは、連比の表し方に依らずにしっかりと定まることに注意して下さい。たとえば $a = 1, b = -1, c = 1$ としたとき、連比 $[1 : 1 : 0]$ は $1 - 1 + 0 = 0$ となるので射影平面内の直線 $\ell_{(1,-1,1)}$ 上にあります。この比は $[-3, -3, 0]$ とも表せますが、$(-3) - (-3) + 0 = (-3)(1-1+0) = 0$ となるので同じ方程式を満たします。このことはもちろん、$ap+bq+cr$ という $p, q, r$ の多項式が 1 次の項たちのみからなる（**斉次 1 次多項式**といいます）ことに起因しています。

さて、上のようにして定めた射影平面内の直線が、私たちが知っている意味での直線であるか考えてみましょう。そのために $\ell_{(a,b,c)}$ と $xy$ 平面 $\mathbb{R}^2$ との共通部分を考えてみます。$xy$ 平面の点は $[x : y : 1]$ という形をしていましたので、

$$\begin{aligned} \ell_{(a,b,c)} \cap \mathbb{R}^2 &= \{[x : y : 1] \in \mathbb{R}P^2 \mid ax + by + c = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\} \end{aligned}$$

となり、$(a, b) \neq (0, 0)$ であれば確かに平面内の直線を表しています。

**注意 6.1** $(a,b,c)=(0,0,1)$ とすると、対応する射影平面内の直線は

$$\ell_{(0,0,1)}=\{[x:y:0]\in\mathbb{R}P^2 \mid (x,y)\neq(0,0)\in\mathbb{R}^2\}$$

となり、これは分解 $\mathbb{R}P^2=\mathbb{R}^2\cup\mathbb{R}P^1$ に出てきた $\mathbb{R}P^1$ そのものです。このような事情もあって、$\mathbb{R}P^1$ を**無限遠直線**と呼びます。

ここで、$(a,b)\neq(0,0)$ として、射影平面内の直線 $\ell_{(a,b,c)}$ と無限遠直線 $\mathbb{R}P^1=\ell_{(0,0,1)}$ との交点を考えてみましょう。これは $\ell_{(a,b,c)}$ の定義方程式 $ap+bq+cr=0$ において $r=0$ とおけばよく、$ap+bq=0$ となります。これより交点は $[-b:a:0]$ の一点であり、結論として、$(a,b)\neq(0,0)$ のとき、射影平面内の直線 $\ell_{(a,b,c)}$ は

$xy$ 平面上の直線 $ax+by+c=0$ に無限遠点 $[-b:a:0]$ を加えたもの

となります。$[-b:a]$ は直線 $ax+by+c=0$ の進む方向と一致していることに注目して下さい。このようにして現れた交点の斉次座標 $[-b:a:0]$ は $c$ に依存しておらず、$a,b$ がほぼそのまま表に出た形となっています。これより次のことが従います:

**定理 6.1** $(a,b)$, $(a',b')$ はどちらも $(0,0)$ でないとする。このとき 2 つの射影直線 $\ell_{(a,b,c)}$, $\ell_{(a',b',c')}$ について次が成り立つ:

- どちらも無限遠直線とただ 1 点で交わる。
- $[a:b]=[a':b']$ で $[a:b:c]\neq[a':b':c']$ のとき，2 つの直線は $xy$ 平面において平行であるが、無限遠直線において $[-b:a:0]$ という交点を持つ。
- $[a:b]\neq[a':b']$ のとき、2 つの直線は $xy$ 平面において 1 点で交わり、無限遠直線においては交わらない。

とくに、無限遠直線も合わせて考えると、

「射影平面内の 2 つの異なる直線は射影平面においてただ 1 つの点で交わる」

が成り立つ。

実際、異なる直線 $\ell_{(a_1,b_1,c_1)}$ と $\ell_{(a_2,b_2,c_2)}$ の交点は

$$[b_1c_2-b_2c_1:c_1a_2-c_2a_1:a_1b_2-a_2b_1] \tag{4}$$

となります。また、証明は割愛しますが、次のことも成り立ちます。

**定理 6.2** 射影平面内の異なる 2 点 $[p_1:q_1:r_1]$, $[p_2:q_2:r_2]$ に対して、その 2 点を通る射影平面内の直線は

$$(q_1r_2-q_2r_1)p+(r_1p_2-r_2p_1)q+(p_1q_2-p_2q_1)r=0 \tag{5}$$

のただ 1 つである。

## 7　射影平面内の２次曲線

直線のときと同様の考え方により、**射影平面内の** 2 **次曲線**は 2 次の項たちを集めてできる $p,q,r$ の多項式（**斉次** 2 **次多項式**といいます）を用いた方程式

$$ap^2 + bq^2 + cr^2 + dpq + eqr + frp = 0$$

によって与えられていると考えるのが自然です。ここで定数 $a,b,\ldots,f$ のうち少なくとも 1 つは 0 でないと仮定しています。このようにすることで左辺の値が 0 であるか否かは連比 $[p:q:r]$ の表し方に依らずに定まります。座標平面 $\mathbb{R}^2$ との共通部分を考えるために $(p,q,r)=(x,y,1)$ を代入すると、

$$ax^2 + by^2 + dxy + ey + fx + c = 0$$

となり、（適切な $a,b,\ldots,f$ の設定のもとで）$xy$ 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の 2 次曲線を与えることが確かめられます。

反対に、$xy$ 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の 2 次曲線の方程式 $ax^2 + by^2 + dxy + ey + fx + c = 0$ が与えられたとき、方程式 $ap^2 + bq^2 + cr^2 + dpq + eqr + frp = 0$ を考えることで射影平面内の 2 次曲線へと拡張することができます。

**楕円**　座標平面 $\mathbb{R}^2$ において楕円は正の定数 $a,b>0$ を用いて

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

という方程式で与えられていました。これに対応する射影平面内の 2 次曲線の方程式を得るために

$$x = \frac{p}{r}, \qquad y = \frac{q}{r}$$

を代入して整理すると、

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = r^2$$

が得られます。この方程式で定義される射影平面内の 2 次曲線と無限遠直線との交点を考えてみましょう。そのために、$r=0$ を代入してみると

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 0$$

となり、$p=q=0$ となります。しかし、$p=q=r=0$ となる点は射影平面の点ではありませんので、結局、無限遠直線との交点は存在しないことが従います。このことは楕円全体が座標平面内の見える範囲におさまっているという事実とちょうど対応しています。

**双曲線**　座標平面 $\mathbb{R}^2$ において双曲線は正の定数 $a,b>0$ を用いて

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

という方程式で与えられていました。同様に対応する射影平面の 2 次曲線の方程式を求めると、

$$\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2} = r^2 \tag{6}$$

となります。この方程式で定義される射影平面内の 2 次曲線と無限遠直線との交点を考えるために、$r = 0$ を代入してみると

$$\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2} = 0$$

となります。両辺に $a^2b^2 > 0$ をかけて整理すると

$$(bp + aq)(bp - aq) = 0$$

となり、これより $q = \pm\dfrac{bp}{a}$ が得られます。$p = q = r = 0$ とはならないことより $p \neq 0$ となり、交点が

$$[p : -\frac{bp}{a} : 0] = [a : -b : 0] \qquad [p : \frac{bp}{a} : 0] = [a : b : 0]$$

であることが従います。$a, b > 0$ ですから、この 2 つは異なる点です。これらは双曲線にとって、どのような点となっているでしょうか。

座標平面でみたときに、2 つの直線

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

は、この双曲線の漸近線と呼ばれていました。これらの直線を射影平面内の直線とみなしたときの無限遠直線との交点が $\left[-\dfrac{-1}{b}, \dfrac{1}{a} : 0\right] = [a : b : 0]$ と $\left[-\dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{a} : 0\right] = [a : -b : 0]$ にほかなりません。漸近線は双曲線がどんどん近づいていく直線という形で与えられていましたが、漸近線と双曲線はまさに無限遠直線において交わっているのです。

この交わりをもっとはっきりと見るために、別の座標平面で見てみましょう。射影平面における方程式 (6) を変形すると

$$\frac{q^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2} + \frac{r^2}{\left(\frac{1}{a}\right)^2} = p^2$$

となることより、$yz$ 平面で見てみると楕円が現れることが期待されます。実際に $(p, q, r) = (1, y, z)$ を代入すると

$$\frac{y^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{a}\right)^2} = 1$$

という楕円が得られます。なお、$xy$ 平面に関する無限遠直線 $[x : y : 0]$ は $yz$ 平面において $y$ 軸に対応しています。すなわち、方程式 (6) で与えられる 2 次曲線は $xy$ 平面で見ると双曲線という 2 本に別れた曲線となっていますが、無限遠直線を経て全体として 1 つの楕円になっているというわけです。

**放物線**　座標平面 $\mathbb{R}^2$ において放物線は定数 $a \neq 0$ を用いて

$$ax^2 - y = 0$$

という方程式で与えられていました。同様に対応する射影平面の 2 次曲線の方程式を求めると、

$$ap^2 - qr = 0 \tag{7}$$

となります。無限遠直線との交点を求めるために $r = 0$ を代入すると、$p = 0$ が従います。すなわち、交点は $[0:1:0]$ の 1 点となります。とくに、方程式 (7) で与えられる放物線もまた繋がった円状の形をしています。また、$yz$ 平面で見てみると

$$a - yz = 0$$

という方程式が得られ、$y$ 軸と $z$ 軸を漸近線に持つ双曲線が得られます。双曲線が楕円と「同じ」であることは先の例で見た通りです。

実は、放物線と無限遠直線は交点において接しています。この事実の証明は割愛しますが、3 節の問題 3.4 で見たように、放物線の射影の結果として水平線に接する円が現れたことを思い出すと、納得できるのではないでしょうか。なお、$q, r$ に関して変数変換（45° 回転）を行うと、方程式 (3) は楕円の方程式に変換することもできます。

以上のように、射影平面上で 2 次曲線を考えると、みかけは異なるものの、どれも楕円と同じ形をしていることが観察されました。このことは、楕円、双曲線、放物線のどれかに関する射影幾何的な定理は他の曲線に対しても成立するということを意味しています。パスカルの定理などが有名な例となっています。

# 8　自主研究に向けて

時間の都合によりこの講演で十分に話せないことや、少し先のトピックを列挙します。自主研究を行う際の参考にして下さい。最後に参考文献を挙げます。今回の講義を通じて、射影幾何に興味を持ったり、分からないことがあったりしたときに [1] や [2] を一読することをおすすめします。[3] には関連する話題を扱った論説たちが掲載されています。この分野の広がりを感じることができるでしょう。

- この講演では射影幾何の定理として、デザルグの定理のみを扱いましたが、もちろん、射影幾何の定理はほかにもたくさんあります。とくに有名なパップスの定理、パスカルの定理、ブリアンションの定理などについて、どのような定理かを調べてその証明を与えてみましょう。

- 平面幾何においては回転、対称移動、平行移動などの合同変換や、拡大・縮小などの相似変換について学びました。これらをまとめてアフィン変換と呼ばれます。射影幾何においては**射影変換**と呼ばれる変換が存在します。この変換の本質は斉次 1 次多項式による変換[3]で、連比に対してうまく振る舞うことに注意しましょう。射影変換が持つ著しい性質として

[3]行列を用いるとすっきりと書くことができるのですが、最近の指導要領では行列を表立って扱わなくなってしまいました。

**定理 8.1** 射影平面の任意の射影直線に対してうまく射影変換を行うと、その射影直線を無限遠直線にうつすことができる。また、楕円、放物線、双曲線はどれも射影変換によって単位円にうつすことができる。

という事実があります。この性質は射影幾何に関する定理の証明をしばしば簡単な場合へと帰着させます。

- 射影平面内の直線 $\ell_{(a,b,c)} = \{[p : q : r] \in \mathbb{R}P^2 \mid ap + bq + cr = 0\}$ について、任意の実数 $k \neq 0$ に対して $\ell_{(a,b,c)} = \ell_{(ka,kb,kc)}$ が成り立ちます。すなわち、直線 $\ell_{(a,b,c)}$ は $(a, b, c)$ そのものよりも連比 $[a : b : c]$ によって決まると考えた方が自然です。言い換えると射影平面 $\mathbb{R}P^2$ の各点が直線を定めているのです。この対応は逆対応を考えることもでき、射影平面においては直線と点が自然に 1 対 1 に対応しているのです。この性質のことを射影幾何における**双対性**（そうついせい、duality）と呼びます。6 節で出てきた式 (4) と (5) の形が似ているのも、双対性を反映したものとなっています。

  双対性を用いると、射影幾何の定理において、直線と点の役割を入れ替えることができ、1 つの定理から別の定理を生み出すことができます。双対性について整理をし、デザルグの定理、パスカルの定理、ブリアンションの定理について、その双対定理を導いてみましょう。

- 射影変換は長さや角度を保ちませんが、**複比**と呼ばれる量を保つことが知られています。この量について定義を調べ、その基本的性質をまとめてみましょう。

- 射影平面 $\mathbb{R}P^2$ が 3 つの座標平面を貼り合わせた形であることを見ましたが、全体としてどのような形をしているでしょうか。

- 複素数の比や連比を考えることにより、複素射影直線 $\mathbb{C}P^1$ や複素射影平面 $\mathbb{C}P^2$ を定義することができます。この集合ではどのような数学を展開することができるか調べてみましょう。たとえば、$\mathbb{C}P^1$ はどのような形をしているでしょうか。

# 参考文献

[1] 大田 春外「楽しもう射影平面」、日本評論社。

[2] 西山 亨「射影幾何学の考え方」、数学のかんどころ 19、共立出版。

[3] 数学セミナー 2023 年 2 月号、特集『平行線の交わる世界』、日本評論社。