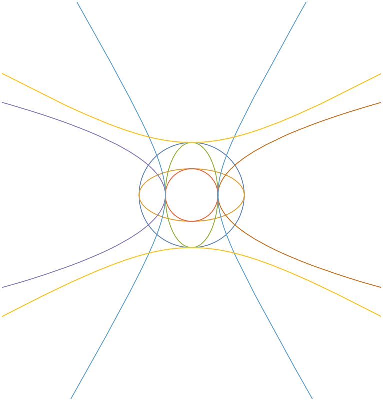
2次曲線に触れてみよう!

岩木 耕平
東京大学大学院数理科学研究科
群馬県高校生数学キャンプ　2023年10月9日(月)



2 次曲線

定義

x, y に関する **2 次の** 多項式

$$P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

(ここで $a \sim f$ は定数であり, a, b, c のどれかは 0 でない) を用いて

$$P(x, y) = 0$$

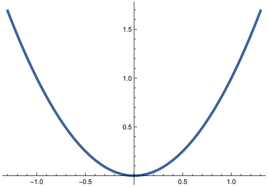
と表される (x, y)-平面内の図形を **2 次曲線**とよぶ.

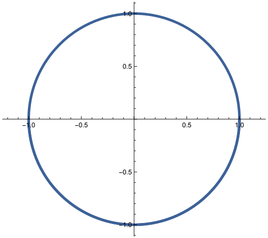
テーマ学習 I の目的:

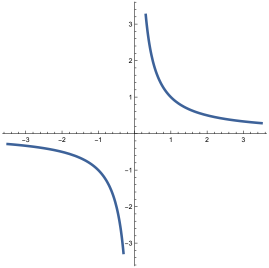
- 様々な 2 次曲線の例に触れる.
- 2 次曲線を様々な視点から捉える.
- 2 次曲線を**分類**する.

2 次曲線の例

- 放物線 $y = x^2$ は 2 次曲線の例である.
- 円 $x^2 + y^2 = 1$ も 2 次曲線の例である [1].
- 反比例のグラフも $xy - 1 = 0$ という 2 次曲線の例.







他にどんな形のものがあるか?

[1] 係数によって図形が 1 点だけになったり, 点が存在しないこともある. このような “退化した場合” はこのテーマ学習では扱わないことにする.

問題 1

次の 2 つの 2 次曲線の図形の概形を書いてみよ.

$$(1)\quad x^2 + 4y^2 + 2x = 0 \qquad\qquad (2)\quad x^2 - y^2 = 1$$

- (1) のヒント:
  平方完成すると $(x + 1)^2 + 4y^2 = 1$.
  これは円の方程式 $x^2 + y^2 = 1$ に似ている?

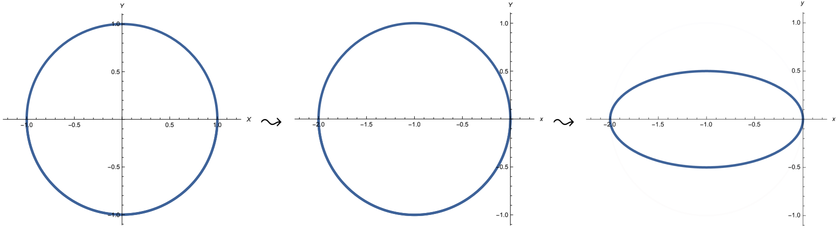
- (2) のヒント:
  $y^2 = x^2 - 1 \geqq 0$ なので, $-1 < x < 1$ の範囲に点は存在しない.

  $$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

  という因数分解を用いると何か分かる?

(1) $x^2 + 4y^2 + 2x = 0$ の概形

- 平方完成により $(x+1)^2 + 4y^2 = 1$ となった.
- $x + 1 = X,\ y = \frac{1}{2}Y$ とおくと, 方程式は $X^2 + Y^2 = 1$ となる.
つまり, (X, Y)-平面で見ると半径 1 の円に見える.
元の (x, y)-平面ではどう見えるか？
- 上の座標変換において, 図形が横方向に -1 平行移動し,
縦方向に縮尺が $\frac{1}{2}$ 倍されることに注意すると図はこうなる.



(X, Y)-平面　(x, Y)-平面　(x, y)-平面

これは楕円の例である.

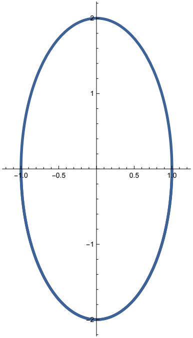
楕円

定義

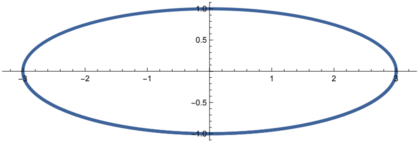
定数 $a, b > 0$ を用いて

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

と表される 2 次曲線を楕円とよぶ. (以降, 円も楕円とよぶ.)



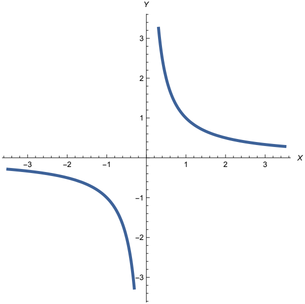
$a = 1, b = 2$



$a = 3, b = 1$

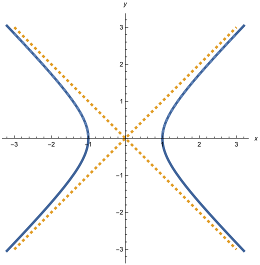
(2) $x^2 - y^2 = 1$ の概形

- 因数分解により $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 1$.
- $x - y = X,\ x + y = Y$ とおくと, 方程式は $XY = 1$ となる.
  つまり, (X, Y)-平面で見ると反比例のグラフ.
- (x, y) 平面における図は (X, Y) 平面の図を 45 度回転させ, 全体を $\frac{1}{\sqrt{2}}$ に縮小したものであることに注意すると, 図はこうなる.



(X, Y)-平面

$\rightsquigarrow$



(x, y)-平面

これは双曲線の例である.

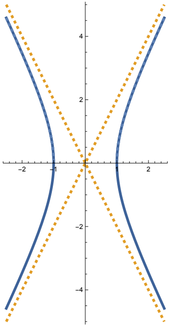
双曲線

定義

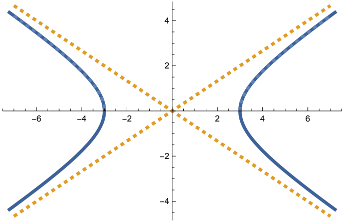
定数 $a, b > 0$ を用いて

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

と表される 2 次曲線を双曲線とよぶ. また, $y = \pm\frac{b}{a}x$ で与えられる直線を双曲線の漸近線という.



$a = 1, b = 2$



$a = 3, b = 2$

補足：アフィン変換

- 先の問題 1 では以下の座標変換を用いた:
  - 平行移動：$(X, Y) = (x + a, y)$ または $(x, y + a)$ (a は定数)
  - 拡大・縮小：$(X, Y) = (ax, by)$ (a, b は定数)
  - 45 度の回転[2]：$(X, Y) = (\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}})$
- 元の変数 x, y の 1 次式による座標変換をアフィン変換という.

$$(X, Y) = \Big(Ax + By + C, Dx + Ey + F\Big)$$

  ただし, (x, y)-平面の点と (X, Y)-平面の点が 1 対 1 に対応するように $AE - BD \neq 0$ を仮定する.
- これらは図形の "型"を変えないので, 以降はアフィン変換で楕円や双曲線に変換される図形も楕円や双曲線と呼ぶ.

---

[2] 一般の角度 θ の回転は "三角関数" を用いて次のように書ける:

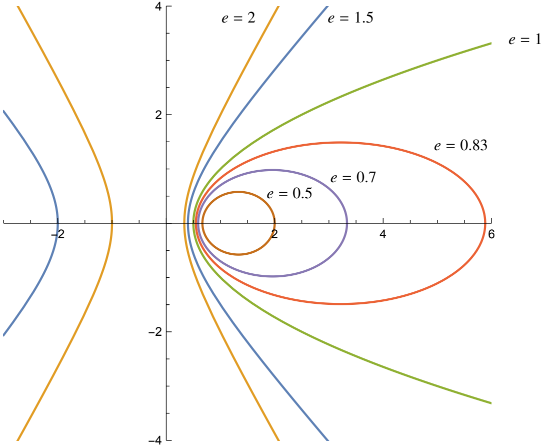
$$(X, Y) = \Big((\cos\theta)\, x - (\sin\theta)\, y, (\sin\theta)\, x + (\cos\theta)\, y\Big)$$

2 次曲線の変形

次の図は, 2 次曲線

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$$

のパラメータ e をいろいろ変えて得られる図である.



$e = 1$ の前後で楕円からに双曲線に変化していることが分かる.

2 次曲線の分類 I : 係数による分類

$$2\text{ 次曲線 }: ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

- 平行移動によって図形の型は変わらない
  $\rightsquigarrow$ 2 次の係数の組 (a, b, c) が 2 次曲線の型を決定するはず.

定理 I

(退化した場合を除くと,) 係数の組 (a, b, c) の値に応じて 2 次曲線は次のように分類される:

$$D = b^2 - 4ac \text{ とおくと, 2 次曲線は } \begin{cases} D < 0 \text{ のとき楕円} \\ D = 0 \text{ のとき放物線} \\ D > 0 \text{ のとき双曲線} \end{cases}$$

- さっきの例 $(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$ だと $D = -4(1 - e^2)$.

証明の概略 ($a \neq 0$ の場合)

- $a \neq 0$ の場合, 平方完成して

$$ax^2 + bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}y^2$$

- 座標変換 $X = x + \frac{b}{2a}y$, $Y = y$ により右辺は次のようになる:

$$aX^2 - \frac{D}{4a}Y^2$$

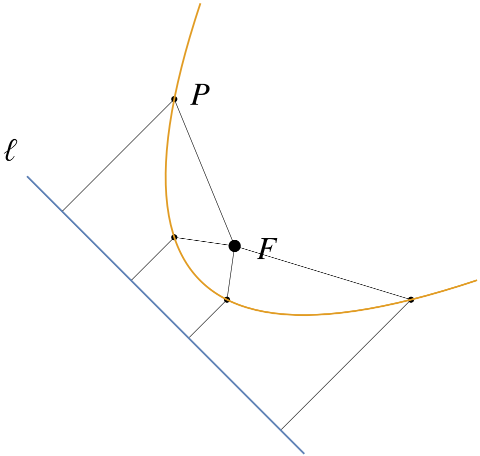
- あとは D の符号に応じて場合分けをするとよい.
  - $D < 0$ のときは X^2 と Y^2 の係数が同符号となるので楕円.
  - $D = 0$ のときは Y^2 の係数が 0 となるので放物線.
  - $D > 0$ のときは X^2 と Y^2 の係数が異なる符号となるので双曲線.

問題2

平面内に直線 ℓ と, ℓ 上にない点 F が与えられたとする.
点 P が条件

$$PF \text{ の長さ} = \ell \text{ と } P \text{ の距離}$$

を満たしながら動くとき, P はどのような図形を描くか?



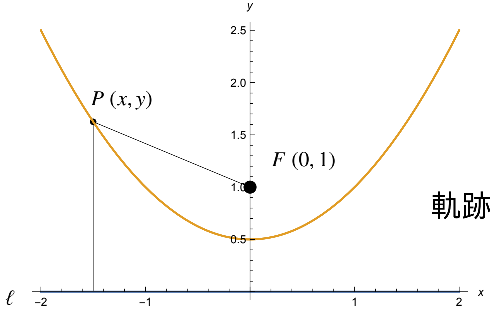
問題 2 の答え

- 回転, 拡大・縮小, 平行移動で ℓ を x 軸に, F を $(0, 1)$ に配置.
- P の位置を (x, y) とすると,

$$PF \text{ の長さ} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} \quad , \quad \ell \text{ と } P \text{ の距離} = |y|$$

- $(PF \text{ の長さ})^2 = (\ell \text{ と } P \text{ の距離})^2$ であるので

$$x^2 + (y-1)^2 = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$



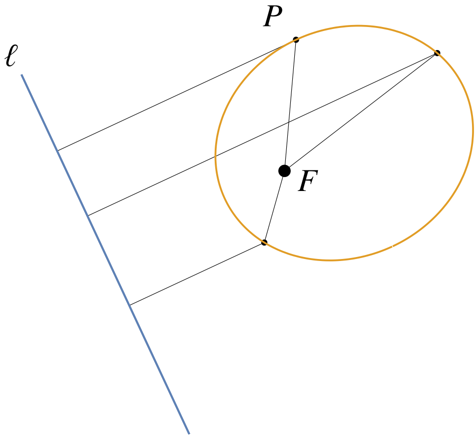
軌跡は放物線を描く

問題3

平面内に直線 ℓ と, ℓ 上にない点 F が与えられたとする.
点 P が条件

$$PF\text{の長さ} \times 2 = \ell\text{と}P\text{の距離}$$

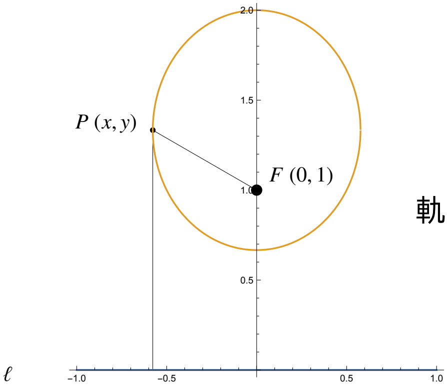
を満たしながら動くとき, P はどのような図形を描くか?



問題 3 の答え

- 問題 1 と同様に ℓ を x 軸に, F を $(0,1)$ に配置.
- 条件より $(PF\text{ の長さ})^2 \times 4 = (\ell\text{ と }P\text{ の距離})^2$ であるので, 問題 1 と同様に

$$4(x^2 + (y-1)^2) = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + 3\left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$



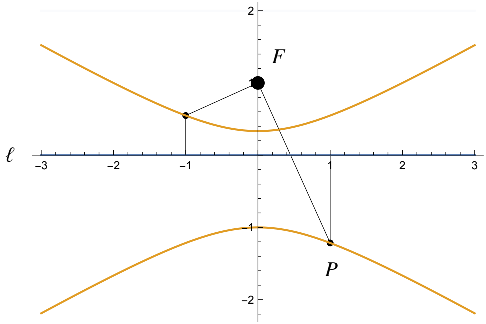
軌跡は楕円を描く.

問題 4

平面内に直線 ℓ と, ℓ 上にない点 F が与えられたとする.
点 P が条件

$$PF \text{ の長さ} = \ell \text{ と } P \text{ の距離} \times 2$$

を満たしながら動くとき, P はどのような図形を描くか?



軌跡は双曲線を描く. (各自方程式を導いてみよ.)

2 次曲線の分類 II : 離心率による分類

定理 II

平面内に直線 ℓ と, ℓ 上にない点 F が与えられたとする.
$e > 0$ を定数とし, 点 P が条件

$$\frac{PF\text{ の長さ}}{\ell\text{ と }P\text{ の距離}} = e$$

を満たしながら動くとき, P の軌跡はある 2 次曲線となり,

$$\begin{cases} 0 < e < 1 & \text{のときは楕円} \\ e = 1 & \text{のときは放物線} \\ e > 1 & \text{のときは双曲線} \end{cases} \quad \text{となる.}$$

定数 e を 2 次曲線の離心率, F を焦点, ℓ を準線とよぶ.

余談：楕円と惑星の運動

- 惑星は“万有引力”によって太陽に引き寄せられる.
- Newton の法則によると, 力を受けた物体の運動は“運動方程式 (微分方程式)”により記述される. 時刻 t において平面上の点 $(x(t), y(t))$ にある惑星の時間発展を記述する方程式は [3]

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}(t) = -GM\dfrac{x(t)}{(x(t)^2+y(t)^2)^{3/2}} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}(t) = -GM\dfrac{y(t)}{(x(t)^2+y(t)^2)^{3/2}} \end{cases}$$

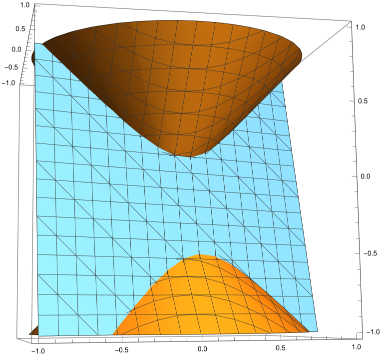
- 実は, この微分方程式を解くと,「解 $(x(t), y(t))$ はある楕円軌道上を運動する」ということが分かる (ケプラーの第 1 法則). 離心率による楕円の記述が証明において重要な役割を果たす.

[3] G は万有引力定数, M は太陽の質量. $\frac{d^2x}{dt^2}$ は $x(t)$ の“2 階微分”であり, 時刻 t での $x(t)$ の加速度を表す.

2 次曲線の分類 III : 円錐曲線としての分類

定理 III

(x, y, z)-空間において $x^2 + y^2 = z^2$ で与えられる円錐を考える.
平面 $ax + by + cz = d$ $(d \neq 0)$ で円錐を切り取った断面は,
(退化する場合を除けば) 楕円・放物線・双曲線のいずれかをなす.



$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ と } 3x + y + z = 1$$