コンパスと定規による作図について

逆井 卓也 *

2022 年 10 月 9 日

1　コンパスと定規

小学校, 中学校, 高校の算数や数学の授業で使ってきたように、コンパスや定規は基本的な平面図形である円や直線を描くための道具です。それらが手元になかったとしても、紐が 1 本あれば、それを弛みなくピンと張ることで直線ができますし、片方の端を固定してもう一方を張った状態で動かせば円を描くことができます。これらが古来より人類の文明や文化を支えてきたことは想像に難しくないでしょう。

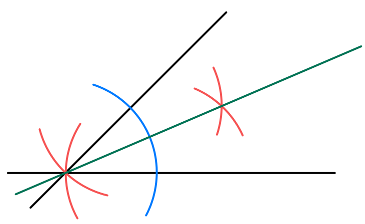
この講義では、定規とコンパスによる作図を通じて見えてくる数学の世界を幾つか紹介したいと思います。そのためにまず我々が使う道具について確認しておきましょう。

定規 (ruler) は、市販品のように目盛がついていて長さを測れるようなものではありませんが、2 点をつなぐ線分を引くことができます。さらに、線分はいくらでも延長する（直線を引く）ことができます。

コンパス (compass) はある点を中心とした円を描くことができます。さらに、平面上の 2 点の距離を保存して（コンパスを開いたままにして）、他の場所にうつすことができます。

作図の理論は紀元前 3 世紀頃の古代エジプトの数学者ユークリッドの『原論』に遡ります。そこでは、上で述べた使い方の「さらに...」以降の部分を認めていない状態（たとえば、原則として円を描いたらコンパスを閉じるなど）から議論が始まりますが、直ちにそれらの操作が可能であることを示すことができます（[1] を参照)。そのため、この講義では最初から使っていくことにします。これらの使い方の下、中学校において

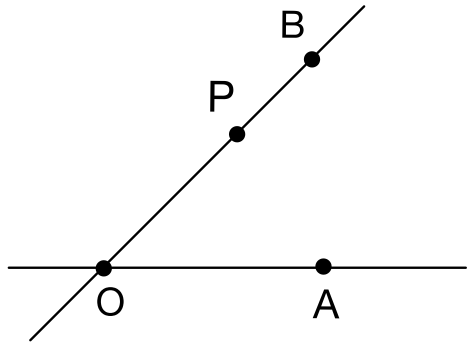
- 与えられた角の 2 等分線を引く (右図)
- 直線上にない点からその直線に垂線を引く
- 与えられた線分の垂直 2 等分線を引く



*東京大学大学院数理科学研究科. 令和 4 年度群馬県高校生数学キャンプ「円の数学」における講演.

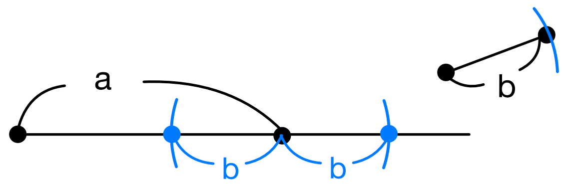
といったことを習いました。これに加えて、三角定規を用いると直線上にない点を通り、その直線と平行な直線を引くことができます。いま三角定規は用意していませんが、次の問題を解くことで定規とコンパスによってそれと同等なことが可能なことが分かります。以降、平行線を引く操作も「定規とコンパスでの作図」の中に含めることにします。

課題 1.1 (角の移動) 右図において ∠AOP と ∠CPB が等しくなるように、点 C を定規とコンパスを用いて作図して下さい。直線 OP に対する 2 つの角の向きを合わせれば、直線 OA と直線 PC は平行となることを確かめましょう。

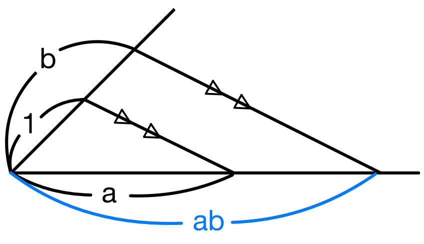


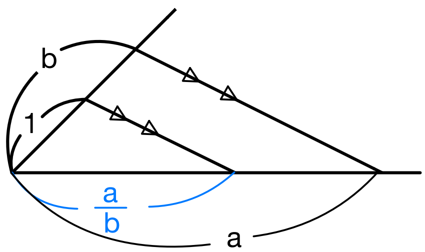
2　長さの四則演算や平方根の作図

平面上に長さが a と b の 2 つの線分が与えられたとします。a と b はどちらも正の数です。このとき, 長さが $a+b$ の線分や（$a>b$ として）長さ $a-b$ の線分を作図することは容易です:



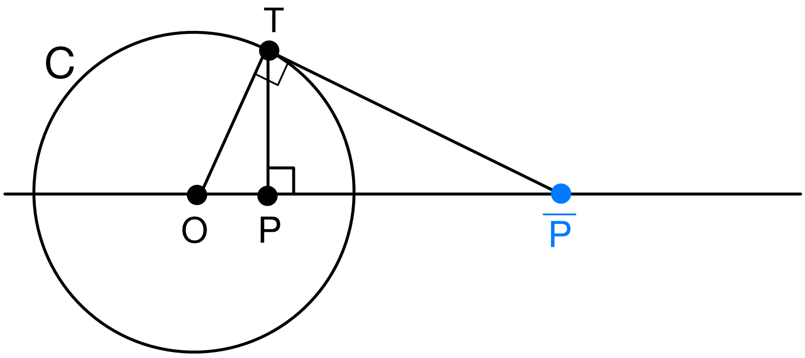
それでは、長さが ab の線分や長さが $\frac{a}{b}$ の線分を作るにはどうしたらよいでしょうか。答えを述べる前に、上で見た長さの和や差と少し状況が違うことを観察します。それは 2 つの線分の見た目からは決まらないということです。たとえば b が $\frac{1}{2}$ か 2 かによって、長さ ab の線分は a よりも短くなったり長くなったりしてしまいます。そのため、**長さ 1 の線分が追加で与えられている**とするのが自然です。その上で長さが ab や $\frac{a}{b}$ の線分は三角形の相似を用いて作図することができます:





課題 2.1 (有理数倍の長さ) b が正の整数 n に等しいとき、長さ na の線分や長さ $\frac{a}{n}$ の線分は長さ 1 の線分を用いることなく作図することができます。そのことを確かめて下さい。

逆数 $\dfrac{1}{a}$ の長さの線分を作図する方法に関連して、次のような**円に対する反転** (circular inversion) と呼ばれる操作があります。



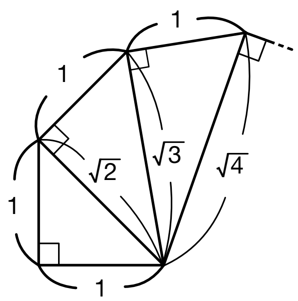
いま点 O を中心とする半径 r の円 C の内側に点 P があるとし、OP > 0 であるとします。点 P を通り半直線 OP と垂直な直線を引き、円 C との交点（の１つ）を T とします。T を接点とする円 C の接線と半直線 OP との交点を $\overline{\mathrm{P}}$ とします。このとき、

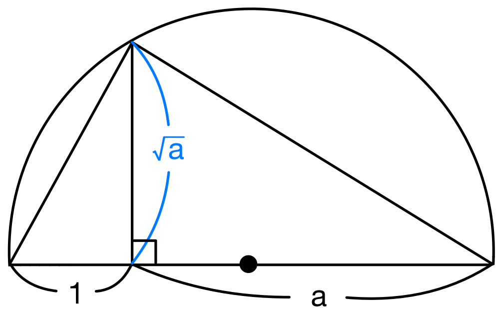
$$\mathrm{O}\overline{\mathrm{P}} = \frac{r^2}{\mathrm{OP}}$$

となっていることが三角形の相似を用いて示せます。点 P が円 C の外側にあるときは、上の操作を逆に辿ることで、半直線 OP 上にあり $\mathrm{O}\overline{\mathrm{P}} = \dfrac{r^2}{\mathrm{OP}}$ を満たす点 $\overline{\mathrm{P}}$ を円 C の内側に見つけることができます。円 P が円 C 上にあるときは $\overline{\mathrm{P}} = \mathrm{P}$ とします。以上のように点 P から点 $\overline{\mathrm{P}}$ を作図する操作を**半径 r の円 C に対する反転**といいます。

課題 2.2 (反転と複素数) 点 (x, y) に複素数 $x + y\sqrt{-1}$ を対応させることで座標平面と複素数平面を自然に同一視することができます。このとき, 原点を中心とする半径 1 の円に対する反転は、z に対して $w = \dfrac{1}{\overline{z}}$ を対応させる変換として表せることを確認して下さい。ここで $\overline{z}$ は z の複素共役を表します。また、この変換によって複素数 α を中心とする半径 c の円 $|z - \alpha| = c$ はどのような図形にうつるか調べてみましょう。

長さに関する基本的な作図の終わりに、平方根について考えてみましょう。自然数 n について $\sqrt{n}$ の長さの線分を作図するには、下図左のように長さ 1 の線分から直角三角形を作っていけばよく、$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ が順番に得られます。より一般に、与えられた長さ a の線分に対して長さ $\sqrt{a}$ の線分を作図するには、半径 $\dfrac{1+a}{2}$ の円を用いて下図右のようにすればよいことが確かめられます:





3　作図と数

前節では、与えられた長さの線分たちから，定規とコンパスを用いて新しい長さをもつ線分を作図する方法をみました。この節では、長さ 1 の線分が与えられた状態からはじめて、どのような長さの線分を作図できるか、もしくはできないかを考えます。これにより、定規とコンパスで作図できる図形がどのようなものかが分かります。

以下に挙げるのは、紀元前 3 世紀頃より人々を悩ませてきた有名な問題です。

問題 3.1 (ギリシアの三大作図問題)　コンパスと定規を用いて、

I. 立方体倍積問題: 与えられた立方体の体積の 2 倍の体積をもつ立方体を作図せよ。

II. 角の 3 等分問題: 与えられた角を 3 等分せよ。

III. 円積問題: 与えられた円と同じ面積をもつ正方形を作図せよ.

我々の問題設定の下で I や III は、長さ 1 の線分が与えられたときに $\sqrt[3]{2}$ や π の長さをもつ線分を作図する方法を尋ねています。II についても 3 倍角の公式から得られる 3 次方程式 $4x^3 - 3x - a = 0$ の解を作図することに帰着します。上の 3 つの問題に対し、最終的に**すべて不可能である**という解答が得られたのは 19 世紀に入ってからのことでした。実際、証明にあたっては図形の話を数の話に翻訳し、そして数の集合について考察するということが重要となります。

長さ 1 の線分から始めて、前節で見た四則演算によって色々な長さの線分を作ることを考えましょう。どんな自然数 n も

$$n = 1 + 1 + \cdots + 1 \qquad (n \text{ 個の } 1 \text{ の和})$$

と表せますので、和の操作を繰り返すことで長さ n の線分が作図できます。すると自然数 p, q の長さをもつ 2 つの線分に対して商の操作を行うことで分数 $\dfrac{q}{p}$ の長さをもつ線分が作図できることが従います。

それらの（無限個の）線分を、数直線上に原点を始点として正の方向、負の方向それぞれに置いていきます。すると、実数直線上には (整数を上下においた) 分数で表すことのできる数、すなわち**有理数** (rational number) がすべて現れます。有理数全体は四則演算で閉じた集合であることに注意して下さい。

記法 3.2　簡単のため、以下「長さ α をもつ線分が作図できる」ということを単に「数 α が作図できる」と言うことにします。また、有理数全体の集合を書き表す一般的な記法である

$$\mathbb{Q} = (\text{有理数全体}) = \left\{ \frac{q}{p} \;\middle|\; p, q \text{ は共に整数かつ } p \neq 0 \right\}$$

も頻繁に用いていきます (商を表す Quotinet の頭文字を強調した表記) 。なお、実数 (real number) 全体の集合は $\mathbb{R}$、複素数 (complex number) 全体の集合は $\mathbb{C}$ と書き表します。たとえば、$x \in \mathbb{Q}$ と書くと、それは「x は有理数である」ということを意味します。

作図できる長さは有理数だけではありません。平方根を取る操作があるからです。たとえば $\sqrt{2}$ は隣辺が 1 の直角 2 等辺三角形から作ることができますが、それを有理数との和や積と組み合わせると

$$a + b\sqrt{2} \qquad (a, b \text{ は有理数})$$

という形の数をすべて作図することができます。それらの数を集めた集合を

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

と書くことにしましょう (一般的に用いられている記法です)。すると、以下の計算から分かるように数の集合 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ も四則演算で閉じています:

$$\begin{aligned}
(a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}) &= (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2}, \\
(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) &= (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}, \\
\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} &= \frac{ac - 2bd + (bc - ad)\sqrt{2}}{c^2 - 2d^2} \\
&= \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2} \qquad (\text{ただし } c + d\sqrt{2} \neq 0).
\end{aligned}$$

他の自然数 n についても同様に $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ が定まり、それが四則演算で閉じています。もちろん、$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ で作図できる数がすべて尽きるわけではありません。$\sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}}$ や $\sqrt{3}$ などがあります。

課題 3.3 $\sqrt[4]{2}$ や $\sqrt{3}$ のどちらも $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ に属さないことを確かめて下さい。

ただし、それらの数はどちらも平方すると $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ に属する数となりますので、作図可能です。そこで、数の集合 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ から更に拡大して

$$\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}) := \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\}$$

や

$$\Big(\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})\Big)(\sqrt[4]{2}) := \{a + b \cdot \sqrt[4]{2} \mid a, b \in \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})\}$$

を作りますと、これらは作図可能な数からなる集合であり、また $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ のときと同様の計算より四則演算で閉じた集合となっていることが確かめられます。

記号が煩雑になるのでこれ以上進むのは避け、最終目的地である

$$\mathcal{K} := (\text{作図可能な数全体})$$

を考えましょう。この集合は

$$\mathbb{Q} \subset \mathcal{K} \subset \mathbb{R}$$

を満たすものであり、四則演算や平方根をとる操作について閉じた集合となっています。

定義 3.4 (体) 数の集合 K が四則演算について閉じているとき (0 での割り算は除く)、K は**体**であるという。

体は「たい」と読み、英語では field といいます。上で見てきた $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \ldots$ はすべて体です。一般の自然数 n に対して $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ もまた体となります（n が平方数の場合、$\sqrt{n}$ は自然数となるため $\mathbb{Q}(\sqrt{n}) = \mathbb{Q}$ のままです)。そして $\mathcal{K}$ も体となっています。いま考えたいのは、体 $\mathcal{K}$ がどういうものであるかを決定することです。

ところで、先ほど考えたように体を

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}) \subset \Big(\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})\Big)(\sqrt[4]{2}) \subset \cdots$$

と拡大していく手順と、コンパスと定規による実際の作図において 1 つ 1 つ点を定めていくという手順の間に似た感覚を感じませんでしょうか (個人差があります)。大雑把に言うと、その感覚は概ね正しく、最終的に体 $\mathcal{K}$ を特徴づけるものとなります。

正確に述べていきましょう。いま体を

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_0 \subset \mathbb{Q}_1 \subset \mathbb{Q}_2 \subset \mathbb{Q}_3 \subset \cdots$$

のように段階的に拡大していくことを考えます。ここで、第 m 段階の拡大 $\mathbb{Q}_{m-1} \subset \mathbb{Q}_m$ では

「$\alpha_m \notin \mathbb{Q}_{m-1}$ だが $\alpha_m^2 \in \mathbb{Q}_{m-1}$ であるような実数 $\alpha_m \geq 0$ を 1 つ付け加える」

ということを行っているものとします。先ほどの記法に従うと $\mathbb{Q}_m = \mathbb{Q}_{m-1}(\alpha)$ ということです。構成のしかたから、すべての n に対して $\mathbb{Q}_n \subset \mathcal{K}$ となっています。このような拡大の列は 2 **次拡大の列**と呼ばれています。

定理 3.5 実数 γ が体 $\mathcal{K}$ に属する、すなわち作図可能であるための必要十分条件は、

$$\gamma \in \mathbb{Q}_m \subset \mathbb{R}$$

となるような $\mathbb{Q}$ から始まる 2 次拡大の列

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_0 \subset \mathbb{Q}_1 \subset \mathbb{Q}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{Q}_{m-1} \subset \mathbb{Q}_m$$

が存在することである。

この定理において 2 次拡大の列は一般には γ ごとに異なるものとなります。実際、どんなに 2 次拡大を続けていったとしても $\mathcal{K}$ 全体に一致することはない、ということが難しくなく確かめられます。

(定理 3.5 の証明) これまでの議論から、上記のような 2 次拡大の列のどれかに含まれる数が作図可能であることは示されています。反対に、ある数が作図の過程によって得られたとします。このとき、コンパスと定規による作図が数の立場からは何をしているのかを考えてみますと、

- 2 つの直線の交点を求める
- 直線と円の交点を求める

- 2 つの円の交点を求める

という形にまとめられます。それぞれの場合に直線や円の文字式を用いた一般的な方程式の形で表し、その交点が存在するという条件の下で座標を計算してみますと、やや複雑な式とはなりますが、それまでに作図できている数 a, b, c を用いて $a+b\sqrt{c}$ という形になっていることが分かります (c は正の数)。そこで、$\sqrt{c}$ が既に作図できている数であれば何もせず、作図できていない数であれば、$\sqrt{c}$ を付け加えた体を考えるということを繰り返していくのです。また 1 つの点の座標が求められると、それまでに得られている点との距離を考えることもできますが、その値は三平方の定理により

$$\sqrt{(x\text{ 座標の差})^2 + (y\text{ 座標の差})^2}$$

となりますので、やはり 2 次拡大に収まっています。以上で定理が証明できました。 □

例 3.1 半径 1 の円に内接する正 5 角形の 1 辺の長さは計算により $\dfrac{10-2\sqrt{5}}{2}$ となることが確かめられます。この数は $\mathbb{Q}$ を一度 2 次拡大した $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ に含まれているため、作図可能です。これより正 5 角形は定規とコンパスで作図可能であることが従います。ガウスは半径 1 の円に内接する正 17 角形の 1 辺の長さが

$$\frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170-26\sqrt{17}}-4\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}}{4}$$

であることを計算し、正 17 角形もまた定規とコンパスで作図可能であることを示しました。ガウスはさらに一般の状況についても結果を得ています。

さて、作図可能性を体の言葉で表すことができましたが、与えられた実数 γ がその定理にある条件を満たすかについては何も言っていません。この部分については、より深く体の理論を学ぶことで様々な判定法を得ることができますが、万能な方法がないところであり、1882 年にリンデマンが π の超越性を証明するまで円積問題が残されたこともそのことに起因しています。本稿ではリンデマンの定理の証明や角の 3 等分の不可能性については割愛しますが、この節の終わりで立方体倍積問題の解決法を述べます。

まとめますと、この節では**体の理論**における拡大の概念を用いて作図可能性に関する問題を解決しました。この体の拡大の理論をより深く勉強していくと、たとえば「5 次以上の方程式には解の公式が存在しない」という有名な事実の証明をすることができます。そこではアーベルやガロアといった偉大な数学者たちが発見したアイディアが広く用いられ、現代に至ってもなお研究が盛んに進められる豊穣な数学の世界が広がっています。

3.1 立方体倍積問題の解決

ここでは、立方体倍積問題の解決法について述べます (講義では時間の都合で割愛します)。具体的には $\gamma = \sqrt[3]{2}$ が定理 3.5 で述べた条件を満たさないことを示します。最初のステップとして、次を示します。

課題 3.6 ($\sqrt[3]{2}$ の無理数性) $\gamma = \sqrt[3]{2}$ が有理数でないことを確かめて下さい。

$\gamma \notin \mathbb{Q}$ が分かった上で証明を続けます。以降は背理法で考えます。いま、先に述べたような体の 2 次拡大の列

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_0 \subset \mathbb{Q}_1 \subset \mathbb{Q}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{Q}_{n-1} \subset \mathbb{Q}_n$$

をうまく選ぶと $\gamma \in \mathbb{Q}_n$ となったとします。ここで、すべての $m = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\mathbb{Q}_m = \mathbb{Q}_{m-1}(\alpha_m) \subset \mathbb{R}, \qquad 0 < \alpha_m \notin \mathbb{Q}_{m-1}, \quad \alpha_m^2 \in \mathbb{Q}_{m-1}$$

となっています。そのような n の中で最小のものを選び、$\gamma \notin \mathbb{Q}_{n-1}$ であるとします。

$\gamma \in \mathbb{Q}_n$ であることから $a, b \in \mathbb{Q}_{n-1}$ を用いて $\gamma = a + b\alpha_n$ と書くことができます。すると、

$$2 = \gamma^3 = (a + b\alpha_n)^3 = (a^3 + 3ab^2\alpha_n^2) + (3a^2b + b^3\alpha_n^2)\alpha_n$$

となります。$3a^2b + b^3\alpha_n^2$ は $\mathbb{Q}_{n-1}$ に属しますが、その値が 0 でないとすると

$$\alpha_n = \frac{2 - a^3 - 3ab^2\alpha_n^2}{3a^2b + b^3\alpha_n^2} \in \mathbb{Q}_{n-1}$$

となってしまい矛盾が生じます。よって $3a^2b + b^3\alpha_n^2 = 0$ であり、

$$2 = \gamma^3 = (a^3 + 3ab^2\alpha_n^2) + (3a^2b + b^3\alpha_n^2)\alpha_n = a^3 + 3ab^2\alpha_n^2$$

となります。ここで $a - b\alpha_n$ という数を考えると、この数は実数であり、

$$(a - b\alpha_n)^3 = (a^3 + 3ab^2\alpha_n^2) - (3a^2b + b^3\alpha_n^2)\alpha_n = 2$$

となるので $a - b\alpha_n$ もまた、方程式 $x^3 = 2$ の実数解となりますが、関数 $f(x) = x^3$ の単調増加性からも明らかなように方程式 $x^3 = 2$ の実数解はただ 1 つしかないので、$a + b\alpha_n = a - b\alpha_n$ でないといけません。これより $b = 0$ となりますが、そのとき $\gamma = a \in \mathbb{Q}_{n-1}$ となってしまい、矛盾が生じます。以上で $\gamma = \sqrt[3]{2}$ が作図不可能であることが示されました。 □

4 いろいろな作図問題

コンパスと定規による作図の問題については、これまでに様々な類題が考えられ、研究が行われてきました。

自然に思いつく問題としては定規のみを用いた作図があります。ただし、これは制限が強くほとんど何もできません。実際、線分を 2 等分することすらできないことがヒルベルトによって指摘されています。そのため、定規のみの作図の問題では、「線分とその中点を与える」、「長方形を与える」などといった追加の情報を与えてから議論を始めるのが一般的となっています。その中で有名なのが次の定理です。

定理 4.1 (ポンスレ・シュタイナーの定理) 1 つの円とその中心が与えられていれば、定規とコンパスで作図可能な図形は、定規のみで作図できる。

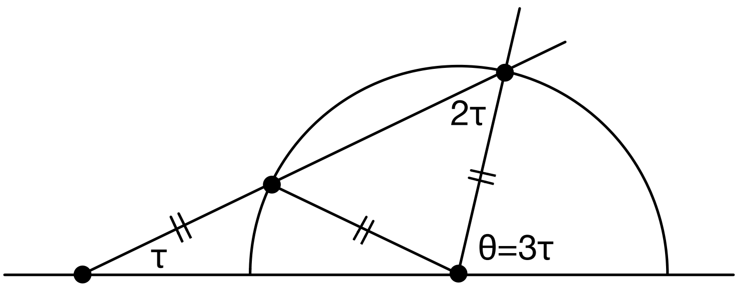
円とその中心があれば、直径の円周角を利用して直角を作ることができます。それにより作図の幅が一気に広がることが予想できると思います。証明については [1] を参照して下さい。

もう 1 つの方向性として、コンパスのみを用いた作図というのも考えられます。ただし、この場合には直線を引く手段がありませんので、作図ができたというのは、その作図に必要な点がすべて得られたということを意味するものとします。興味深いことに、この問題の解答は次のようになります。

定理 4.2 (モール・マスケローニの定理) 定規とコンパスで作図可能な図形は、コンパスのみで作図できる。

モール (Georg Mohr) は 17 世紀のオランダの数学者、マスケローニ (Lorenzo Mascheroni) は 18 世紀のイタリアの数学者です。この講義に続く演習の時間では、モール・マスケローニの定理の簡明な証明の 1 つで、1994 年に Norbert Hungerbuhler によって発表された英語の論文 [2] に挑みたいと思います (この論文と異なる形で、[1] でも証明が述べられています)。

より一般の作図問題としては、紙を折ることによる作図や、目盛り付き定規 (2 ヶ所に印がついている) を用いた作図などがあります。下図はリンク機構と呼ばれる道具を用いた角の 3 等分の原理を説明したものです。長さが等しい 3 つの辺をつないだものをうまく動かすことで角度 θ を 3 等分しています。



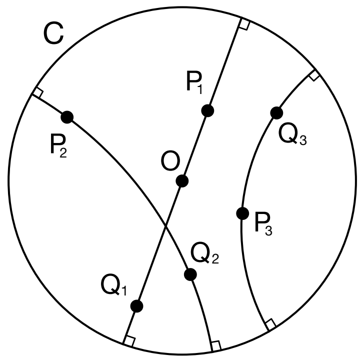
色々な形の問題をみていくことで、作図問題の幅広さ、奥深さを感じることができるでしょう。

5　円の内側の幾何学

最後の節では、作図をめぐって別の数学の世界が開かれることをみてみます。そのための鍵となるのが次の問題です。

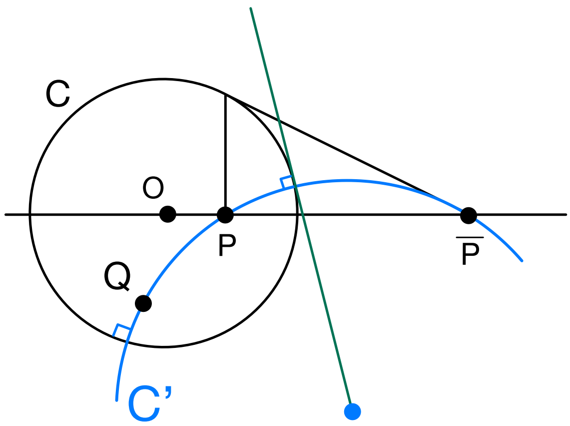
問題 5.1 点 O を中心とする円 C の内側 (円周上の点は除く) に 2 点 P, Q が与えられているとする。P と Q を通り、さらに円 C と直交する円を作図せよ。

ここで 2 つの円が直交するとは、交点におけるそれぞれの円の接線が直交するということです。また、3 点 O, P, Q が一直線上にあるときはその 3 点を通る直線が直交する円であると考えます。下の図は色々な点 P_i, Q_i に対してそれらを通る直交円を描いたものです。



課題 5.2 (2 つの円の直交) 2 つの円が 2 点で交わるとき、片方の交点において直交していれば、もう片方でも直交していることを示して下さい。

さて、元の問題 5.1 に取り組んでみると、意外と手強いことが分かると思います。この問題を解くための道具となるのが反転なのです。いま円 C に関する P の反転を $\overline{\mathrm{P}}$ とします。そして 3 点 P, Q, $\overline{\mathrm{P}}$ を通る円 C′ を描きますと、実は円 C′ が円 C と直交しているのです。



(円 C と円 C′ が直交することの証明) 点 O から円 C′ に接線を 1 つ引き，接点を T とします。すると方べきの定理より

$$\mathrm{OT}^2 = \mathrm{OP}\cdot\mathrm{O\overline{P}} = (\text{円 C の半径})^2$$

となるので、点 T が円 C 上にあることが分かります。定義から T は円 C′ 上の点なので、結局、点 T は円 C と円 C′ の交点の 1 つであることが従います。このことから円 C と円 C′ が直交していることが直ちに従います。 □

このようにして求める直交円 C′ を与えたことにもう 1 つ注目すべきことがあります。それは円 C′ が点 P, Q だけでなく，P の反転 $\overline{\mathrm{P}}$ も含むという事実です。一直線上にない 3 点を含む円はただ 1 つしか存在しません。定義より $\overline{\mathrm{P}}$ は P から 1 つに定まります。これらを合わせると、円 C に直交し、点 P, Q を通る円は**ただ 1 つだけ**ということが結論づけられるのです。

さて、ここで一度力を抜いて、状況を整理してみましょう。

「円 C の内側のどの 2 点に対しても、その 2 点を通る直交円 C′ がただ 1 つ存在する」

という言い方は

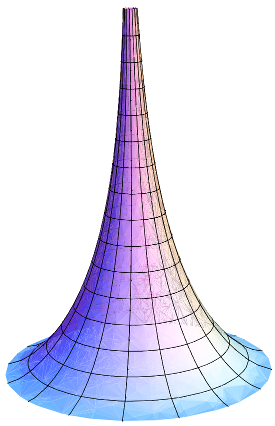
「平面内のどの 2 点に対しても、その 2 点を通る直線がただ 1 つ存在する」

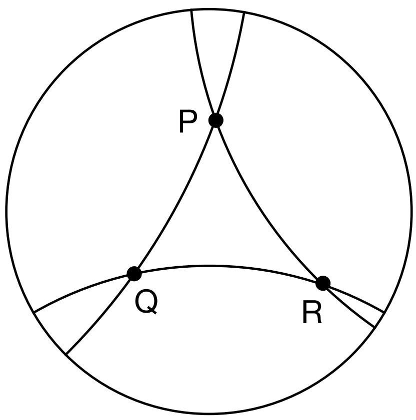
という言い方に似ていませんでしょうか。実は、円の内側に**双曲距離**と呼ばれる「通常の距離 (**ユークリッド距離**と呼ばれます) とは異なる距離」を与えると、その距離の下で、2 点をつなぐ直交円の弧は最短線となっていることが知られています。すなわち、円弧がその世界における「直線」の役割を果たします。

曲がった曲線を最短線と思うことは違和感があるかもしれませんが、メルカトル図法による世界地図を思い浮かべてみますと、北半球の 2 ヶ所をつなぐ最短線が地図上の直線でなく、北寄りの線で与えられることは経験的に知っていると思います。このことは世界地図が地球という球状の曲面の一部を描いたものであることを反映しています。

いま考えている円の内側における双曲距離は、円の中心から円周に近づけば近づくほど見た目に比べて長さが大きくなり、中心から円周までの距離は無限大で、到達することができないものとなっています。局所的には、下図左のような擬球と呼ばれる、どの点においても鞍状の形をしている曲面と同じとなります。この曲面 (世界) における三角形の内角の和は π より小さくなります。このことは下図右の 3 本の直交円の弧で囲まれた「三角形」が内側にひしゃげていて、その分だけ内角の和が小さくなっていることからも観察できると思います。

このようにして、円の内側では、我々にとって馴染みのある平面幾何 (ユークリッド幾何) と異なる**双曲幾何**が展開されます。この幾何はいわゆる「平行線公理」を満たさない、非ユークリッド幾何として知られ、それ自身大変豊穣な世界をかたち作っています。





参考文献

[1] 瀬山士郎「コンパスと定規の幾何学 作図の楽しみ」、数学のかんどころ 27、共立出版。

[2] N. Hungerbuhler, *A Short Elementary Proof of the Mohr-Mascheroni Theorem*, The American Mathematical Monthly Vol. 101, No. 8, pp. 784–787.