複素解析学特論

斎藤恭司　述
松本佳彦　記

序

本稿は，1978 年度夏学期に，東京大学理学部数学科 3 年生，すなわち数学科進学初学期の学生に行った複素解析学の講義を，その講義の受講生であった小林亮一氏のノートを元に復刻したものである．

当時の 3 年生向けの複素解析学の講義の標準は，教養課程で既に学んだ一変数関数論を踏まえ，解析接続を用いながら一変数解析関数の概念の導入を行い，その到達点として Riemann の写像定理（一意化定理）を説明する所にあった．しかし，多変数複素解析関数に目を転ずると，事態は異って見えた．多変数複素解析関数は，解析学のみならず，幾何学や代数学においても，当時既に重要性を増していたからである．そして，多変数複素解析函数を調べる事により初めて一変数では自明と目され意識されなかった諸課題が見えてくる事が多々あるのである．

1° 多変数正則関数に於いては，ある領域上の関数が，その個別の関数によらず一斉に，より大きい領域まで解析接続されると言う現象が起きる．このようにして各種の接続定理が生まれる一方，そのような接続をそれ以上できない領域（正則包）及びその特徴付け（正則領域，Stein 多様体）の問題が生じる．

2° 一般の多次元の複素領域で正則関数や有理関数などの大域的な存在を論じるためには，局所的なデータを貼り合わせるため，不可避的にコホモロジカルな視点を導入する必要がある．また，一変数の微分形式はすべて閉形式であるが，多変数では閉形式と完全形式等の概念を導入する必要がある．

3° 複素 n 次元領域は実多様体としては $2n$ 次元で有るにも係わらず，その上の正則関数は本質的に実 n 次元のデータから決定されている．このような次元の“ギャップ”をコントロールするには，複素領域を一旦は実領域とみなし，その複素構造と比較を行うという視点（Cauchy–Riemann 方程式，$\overline{\partial}$ 方程式，Dolbeault コホモロジー等）が必要になる．

これらの視点を組み合わせる事により有益な結論を導ける．例えば 3° で展開した Dolbeault コホモロジーを用いて 2° に登場した Čech コホモロジーの消滅を示し，それにより 1° で問題になった関数の大域的存在を言う等である．他方，この様な多変数化の手法では理解し得ない解析函数の深い現象（値分布論や各種の特殊函数の存在等）もある事に注意を向けておこう．

そこで，講義では，解析関数（正則関数）の概念を一般の次元で導入して，一変数及び多変数の両者を並行して議論できる所は一般的議論を行う一方，一変数あるいは多変数に

特徴的に現われる現象をトピックとして取り上げていくと言う方針を取った．しかしいま読み返してみると，至る所で話題が飛躍し，そのつながりの説明も，また一つ一つの話題についての説明も舌足らずで深められておらず，意を尽くしていない事を恐れる．他方，読者がこの講義録によって複素解析学の片鱗に触れ，これを手がかりにいくつかのテーマについて興味を持ち，その発展については自ら専門書を紐解いていくきっかけになるのならば，講義の目的は充分果たせたといえる．

講義ノートの復刻を強くお勧めいただき，その作成に並ならぬご尽力を頂いた松尾厚氏，小林氏のノートより原稿の作成を頂いた松本佳彦氏及び図版の作成を頂いた中岡宏行氏に深く感謝の意を述べるものです．

2009 年 3 月
斎藤恭司

編集の経緯と謝辞

今から 5 年ほど前のことと記憶していますが，同僚の齋藤秀司氏が『学生の頃に受けた齋藤恭司さんの多変数函数論の講義は実に素晴らしかった』と力説されるのを聞く機会がありました．そんなに良いものならば，いっそ講義録として世に出してはどうかと考えたのが，このレクチャーノートの編纂のそもそものきっかけです．昨年になり，研究科長の桂利行氏に相談したところ，好意的なお返事がいただけたので，斎藤恭司氏ご本人に了解を取り，東大数理のレクチャーノートの一冊に加えていただくことにしました．

幸いにして，当時の受講生であった名古屋大学の小林亮一氏が手書きのノートを保存されていたので，それをもとに編集作業を行うこととし，同僚の斉藤義久氏，平地健吾氏，吉川謙一氏にも編集委員に加わっていただいて，プロジェクトがスタートしました．手書きのノートを整理して TEX 化する実働作業については，修士 1 年の松本佳彦君が引き受けてくれました．また，文中の図の入力については，博士 3 年の中岡宏行君が協力してくれました．

ご協力を賜りましたすべての皆様に深く感謝いたします．

2009 年 3 月
松尾　厚

目次

第 1 講

4 月 20 日

1.1 $\mathbb{C}^n$ の位相

$\underbrace{\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}}_{n\text{ 個}}$ のことを $\mathbb{C}^n$ と書き，その元を $z=(z_1,\ldots,z_n)$, $z_j=x_j+iy_j$ $(x_j, y_j\in\mathbb{R})$ のように表す．$\mathbb{C}^n$ に $\mathbb{C}$ の Euclid 位相から定まる直積位相を導入する．

$\mathbb{C}^n$ の点 a，および $r=(r_1,\ldots,r_n)\in(\mathbb{R}^+)^n$ に対し*

$$\Delta(a;r)=\{z\in\mathbb{C}^n \mid |z_j-a_j|<r_j,\ j=1,...,n\} \tag{1.1}$$

とおき，これを**開多重円板**と呼ぶ．$\mathbb{C}^n$ の点 a における基本近傍系として，a を中心とする開多重円板の全体をとることができる．

$$\overline{\Delta}(a;r)=\{z\in\mathbb{C}^n \mid |z_j-a_j|\le r_j,\ j=1,...,n\} \tag{1.2}$$

は**閉多重円板**と呼ばれる．なお，単に**多重円板**と言った場合には，開多重円板のことを指すものとする．

$\mathbb{C}^n$ の位相は距離によって定めることもできる．たとえば，次の 2 種類の距離は，いずれもいま考えている $\mathbb{C}^n$ の位相を与える．

$$d(z,w)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|z_j-w_j|^2},\qquad |z-w|=\max_{1\le j\le n}|z_j-w_j|. \tag{1.3}$$

したがって特に，$\mathbb{C}^n$ は位相を込めて Euclid 空間 $\mathbb{R}^{2n}$ と自然に同一視される．

1.2 正則函数

D を $\mathbb{C}^n$ の**領域**（連結な開集合）とする．

---

*正の実数全体の集合を $\mathbb{R}^+$ で表すことにする．

定義 1.1. D 上で定義された複素数値函数 f が点 $z^0 \in D$ で（複素）**全微分可能**であるとは，ある $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ が存在して，$\varepsilon(z, z^0) = f(z) - f(z^0) - \sum_{j=1}^{n} a_j(z_j - z_j^0)$ とおくと

$$\lim_{z \to z^0} \frac{\varepsilon(z - z^0)}{|z - z^0|} = 0 \tag{1.4}$$

となることをいう．そのような $a_1, ..., a_n$ は一意的に定まるので，それらを f の**偏微分係数**といい，$\dfrac{\partial f}{\partial z_1}(z^0), ..., \dfrac{\partial f}{\partial z_n}(z^0)$ と書く．

f が D の任意の点で全微分可能であるとき，f は D において**正則**であるという．またこのとき，各 $\dfrac{\partial f}{\partial z_j}(z)$ を z の函数とみて，f の**偏導函数**という．

領域 D 上の正則函数 f，g に対して $f \pm g$，fg は D において正則である．また，f/g は D から $\{g = 0\}$ を除いた領域 $D \setminus \{g = 0\}$ では正則である*．このことからまた，多項式は正則であり，有理函数は集合 $\{(\text{分母}) = 0\}$ を除いた領域で正則であることがわかる．

次のことは定義からただちにしたがう．

命題 1.2. 函数 f が領域 D で正則であるとする．そのとき

(1) f は連続である．

(2) f は**各変数ごとに正則**である．すなわち，各 j について，$f(z_1, \ldots, z_n)$ を z_j 以外の変数を固定して z_j のみの函数とみなしたとき，それは正則である．

実は命題 1.2 の条件 (1), (2) は f が正則となるための十分条件でもある．そのことを示そう．複素平面 $\mathbb{C}$ 内の区分的に C^1 級の **Jordan 閉曲線**（自己交差を持たない閉曲線）γ_j $(j = 1, ..., n)$ を考え，各々が囲む領域を D_j とする†．直積の閉包 $\overline{D_1 \times \cdots \times D_n}$ が領域 D に含まれるとし，f は D 上連続かつ各変数ごとに正則であると仮定する．そのとき，$z \in D_1 \times \cdots \times D_n$ に対して，1 変数の Cauchy の積分公式を繰り返し用いて

$$\begin{aligned} f(z_1, ..., z_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta_1, z_2, ..., z_n)\, d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, z_3, ..., z_n)\, d\zeta_2\, d\zeta_1}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} \\ &= \cdots = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta_1, ..., \zeta_n)\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} \end{aligned} \tag{1.5}$$

---

*実は $D \setminus \{g = 0\}$ は領域となる（命題 9.3 参照．なお，$\{g = 0\}$ は $\{z \in D \mid g(z) = 0\}$ の略記である）．そこでこのように書いたけれども，さしあたり，「f/g は $D \setminus \{g = 0\}$ の各連結成分上で正則である」と理解しておけばよい．

†γ を $\mathbb{C}$ 内の Jordan 閉曲線とするとき，**Jordan の曲線定理**によれば，$\mathbb{C} \setminus \gamma$ は（曲線 γ の像のことも γ と書いている）2 つの連結成分に分かれ，γ は両者の境界となる．さらに，2 つの連結成分のうち一方は有界でもう一方は非有界である．有界なほうの連結成分を **γ の囲む領域**と呼ぶ．

である（連続函数のコンパクト集合上での積分だから，最後の積分は重積分と考えてよい）．これで次の定理が得られた．

定理 1.3 (Cauchy の積分公式). 上の状況で，任意の $z \in D_1 \times \cdots \times D_n$ に対して

$$f(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}. \tag{1.6}$$

注意 右辺の積分は境界 $\partial(D_1 \times \cdots \times D_n)$ の一部だけで行われている．$\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$ は実 n 次元の図形であり，この積分は実 n 次元の集合の上での積分である．たとえば $n=2$ の場合を考えてみると，D_1 または D_2 が $\emptyset$ である場合を除き，$\partial(D_1 \times D_2) = (\partial D_1 \times \overline{D}_2) \cup (\overline{D}_1 \times \partial D_2) = (\gamma_1 \times \overline{D}_2) \cup (\overline{D}_1 \times \gamma_2) \supsetneq \gamma_1 \times \gamma_2$ である．

この表示から f が正則であることがわかる．これで命題 1.2 の逆も成立することがわかった*．

さらに，式 (1.6) の両辺を偏微分してみよう．右辺に現れているのはコンパクト集合上での積分だから，微分と積分の順序を交換することができて，

$$\frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}(z_1, \dots, z_n) = \frac{k_1! \cdots k_n!}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)^{k_1+1} \cdots (\zeta_n - z_n)^{k_n+1}} \tag{1.7}$$

となる．特に，f は D において $z_1, \dots, z_n$ について何回でも微分でき，偏導函数は高階のものを含めてすべて連続である．

Cauchy の積分公式からは，さらに次のような正則函数の諸性質が導かれる．

系 1.4 (Cauchy の評価式). 函数 f が $\overline{\Delta}(a;r)$ の近傍で正則であって，かつ $\overline{\Delta}(a;r)$ 上 $|f(z)| \le M$ ならば

$$\left| \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_n^{k_n}}(a) \right| \le \frac{M k_1! \cdots k_n!}{r_1^{k_1} \cdots r_n^{k_n}}. \tag{1.8}$$

証明 式 (1.7) からただちにわかる． ■

系 1.5 (Liouville の定理). $\mathbb{C}^n$ 上で定義された正則函数で有界なものは定数に限られる．

証明 $\mathbb{C}^n$ 上で $|f| \le M$ であるとする．各点 z において 1 階偏導函数に式 (1.8) を適用すれば，$|(\partial f / \partial z_j)(z)| \le M / r_j$ が得られる．$r_j \to +\infty$ とすることにより $(\partial f / \partial z_j)(z) = 0$ とわかるから，f は定数である． ■

*実は f の連続性を仮定しなくても，各変数について正則であることを仮定するだけで連続性が（ゆえに多変数函数としての正則性が）したがうことが知られている（**Hartogs の正則性定理**）．証明はかなり大変である．たとえば，一松信『多変数解析函数論』（培風館）の第 3 章を参照せよ．

定理 1.6 (**Weierstraßの二重級数定理**)**.** 領域 D 上で正則な函数の無限列 $f_1, f_2, ..., f_\nu, ...$ があって，f_ν は f に広義一様収束するとする．そのとき，f もまた正則であり，偏導函数についても

$$\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} f}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_n^{k_n}} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} f_\nu}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_n^{k_n}} \qquad \text{（広義一様収束）} \tag{1.9}$$

となる．

証明 任意の $a \in D$ に対し，$\overline{\Delta}(a;r) \subset D$ となるような $r \in (\mathbb{R}^+)^n$ をとることができる．$\gamma_j = \partial\Delta(a_j;r_j) \subset \mathbb{C}$ とおき，Cauchy の積分公式 (1.6) を f_ν に適用して $\nu \to \infty$ とすると，f_ν が f に広義一様収束していることから，函数 f は $\Delta(a;r)$ において

$$f(z_1,...,z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\gamma_1}\cdots\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta_1,...,\zeta_n)\,d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}$$

という等式を満たすことがわかる．右辺は正則だから f は正則である．偏導函数が広義一様収束していることは，偏導函数の積分による表示 (1.7) からしたがう． ■

1.3　冪級数

$a = (a_1,...,a_n) \in \mathbb{C}^n$ とする．

$$\sum_{\nu_1,\,...,\,\nu_n=0}^{\infty} a_{\nu_1\cdots\nu_n}(z_1-a_1)^{\nu_1}\cdots(z_n-a_n)^{\nu_n}, \qquad a_{\nu_1\cdots\nu_n}\in\mathbb{C} \tag{1.10}$$

という形式和を，a を中心とする**形式冪級数**という．

定理 1.7 (Abel)**.** 正の実数の組 $r = (r_1,...,r_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ を考える．これに対して $\{a_{\nu_1\cdots\nu_n}r_1^{\nu_1}\cdots r_n^{\nu_n} \mid \nu_1, ..., \nu_n \in \mathbb{N}\}$ が有界であるならば，上の級数 (1.10) は $\Delta(a;r)$ 上広義一様絶対収束し，したがって (1.10) は $\Delta(a;r)$ 上の正則函数 $f(z)$ を与える．偏導函数は

$$\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} f}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_n^{k_n}}(z) = \sum\text{(各項を微分したもの)} \tag{1.11}$$

である．

証明 任意の $\nu_1, ..., \nu_n$ に対して $|a_{\nu_1\cdots\nu_n}r_1^{\nu_1}\cdots r_n^{\nu_n}| \le M$ であるとする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，級数 (1.10) が $\overline{\Delta}(a;r-\varepsilon)$ 上で[*]一様絶対収束することを示せば，(1.10) が

[*] $r-\varepsilon$ は正実数の組 $(r_1-\varepsilon,...,r_n-\varepsilon) \in (\mathbb{R}^+)^n$ のことを表す．

$\Delta(a;r)$ で広義一様絶対収束することがわかる．$z\in\overline{\Delta}(a;r-\varepsilon)$ に対し

$$
\begin{aligned}
|a_{\nu_1\cdots\nu_n}(z_1-a_1)^{\nu_1}\cdots(z_n-a_n)^{\nu_n}| &= |a_{\nu_1\cdots\nu_n}r_1^{\nu_1}\cdots r_n^{\nu_n}|\left|\frac{z_1-a_1}{r_1}\right|^{\nu_1}\cdots\left|\frac{z_n-a_n}{r_n}\right|^{\nu_n}\\
&\le M\left(1-\frac{\varepsilon}{r_1}\right)^{\nu_1}\cdots\left(1-\frac{\varepsilon}{r_n}\right)^{\nu_n}
\end{aligned}
$$

だから，(1.10) の各項をその絶対値に置きかえて得られる級数は幾何級数でおさえられ，したがって (1.10) は $\overline{\Delta}(a;r-\varepsilon)$ 上で一様絶対収束する．偏導函数が項別微分によって得られることは，Weierstraßの二重級数定理（定理 1.6）によってわかる．■

与えられた冪級数に対して，定理 1.7 の条件にあるような $r\in(\mathbb{R}^+)^n$ が存在するとき，その冪級数は**収束冪級数**であるという．

点 $a\in\mathbb{C}^n$ を中心とする 2 つの収束冪級数が，もし函数として a のある近傍で一致しているならば，級数としても一致する．なぜなら，(1.11) に $z=a$ を代入すれば，冪級数の係数が

$$
\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}f}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_n^{k_n}}(a)=k_1!\cdots k_n!\,a_{k_1\cdots k_n} \tag{1.12}
$$

で与えられることがわかるからである．

定理 1.8. 函数 f が領域 $D\subset\mathbb{C}^n$ で正則であるとする．また，$a\in D$ を任意の点とし，$\overline{\Delta}(a;r)\subset D$ となる多重円板をとる．そのとき，a を中心とする冪級数であって，$\Delta(a;r)$ で広義一様絶対収束し，函数として f に一致するようなものがただ一つ存在する．この冪級数の係数は

$$
a_{\nu_1\cdots\nu_n}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\gamma_1}\cdots\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\,d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)^{\nu_1+1}\cdots(\zeta_n-z_n)^{\nu_n+1}} \tag{1.13}
$$

で与えられる．ただしここで $\gamma_j=\partial\Delta(a_j;r_j)$ である．

証明 Cauchy の積分公式（定理 1.3）により任意の $z\in\Delta(a;r)$ に対し

$$
f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\gamma_1}\cdots\int_{\gamma_n}\frac{f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)\,d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}
$$

である．ここで，$|z_j-a_j|/|\zeta_j-a_j|<1$ であることから

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta_j-z_j}&=\frac{1}{(\zeta_j-a_j)-(z_j-a_j)}=\frac{1}{\zeta_j-a_j}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z_j-a_j}{\zeta_j-a_j}}\\
&=\frac{1}{\zeta_j-a_j}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{z_j-a_j}{\zeta_j-a_j}\right)^{\nu}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(z_j-a_j)^{\nu}}{(\zeta_j-a_j)^{\nu+1}}
\end{aligned}
$$

なので

$$
\frac{1}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}=\sum_{\nu_1,\,\dots,\,\nu_n=0}^{\infty}\frac{(z_1-a_1)^{\nu_1}\cdots(z_n-a_n)^{\nu_n}}{(\zeta_1-a_1)^{\nu_1+1}\cdots(\zeta_n-a_n)^{\nu_n+1}}.
$$

右辺は ζ について $\gamma_1\times\cdots\times\gamma_n$ 上で一様収束している．したがって，(1.13) で $a_{\nu_1\cdots\nu_n}$ を定義すれば，項別積分定理によって

$$f(z)=\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n=0}^{\infty} a_{\nu_1\cdots\nu_n}(z_1-a_1)^{\nu_1}\cdots(z_n-a_n)^{\nu_n}$$

を得る．一意性は，定理の直前で述べたことからしたがう． ■

この定理で得られた冪級数を，函数 f の $a\in D$ における **Taylor 展開**という．

定理 1.9 (一致の定理). 函数 f が領域 $D\subset\mathbb{C}^n$ で正則であるとする．もしある点 a において，$0=(0,...,0)$ 以外のすべての $\nu=(\nu_1,...,\nu_n)\in\mathbb{N}^n\setminus\{0\}$ について

$$\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n}f}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_n^{\nu_n}}(a)=0 \tag{1.14}$$

が成り立っているならば，f は D 上定数である．したがってまた，D 上で定義された 2 つの正則函数 f,g が D のある開集合で一致すれば，f,g は D 全体で一致する．

証明

$$A=\left\{z\in D \;\middle|\; \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n}f}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_n^{\nu_n}}(z)=0 \quad (\forall\nu\in\mathbb{N}^n\setminus\{0\})\right\}$$

は D の閉集合であって，仮定により空集合でない．これが開集合でもあることを示せば，D の連結性により $A=D$ となることになり，f は定数であることがわかる．

A に属する任意の点 z を中心とする f の Taylor 展開を考えると，A の定義と (1.12) により，定数項以外のすべての項が 0 になるから，f は z の近傍で定数となる．よって A は開集合である． ■

注意　1 変数の場合には，$A\subset D$ を D 内に集積点を持つような D の部分集合とすれば，A 上一致するような 2 つの正則函数は D 全体で一致する．しかし多変数の場合には，その仮定では足りない．

1.4　Cauchy–Riemann の関係式

まず，いくつかの記号を準備しよう．

1.1 節で述べたように，点 $(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$，$z_j=x_j+iy_j$ $(x_j,\ y_j\in\mathbb{R})$ に対し $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^{2n}$ を対応させることにより，$\mathbb{C}^n$ と $\mathbb{R}^{2n}$ は同一視できるのであった．

このように見たとき，$\mathbb{C}^n$ の各点における余接空間の元 dx_j,dy_j を用いて，まず

$$dz_j=dx_j+i\,dy_j,\qquad d\bar{z}_j=dx_j-i\,dy_j \tag{1.15}$$

と定める．また，接空間の元 $\dfrac{\partial}{\partial x_j}, \dfrac{\partial}{\partial y_j}$ により

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \tag{1.16}$$

と定義する．そうすれば

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \cdot dz_k = \delta_{jk}, \quad \frac{\partial}{\partial z_j} \cdot d\bar{z}_k = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \cdot dz_k = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \cdot d\bar{z}_k = \delta_{jk} \tag{1.17}$$

となる．

$f(z)$ を複素数値 C^1 級函数とするとき，

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j \tag{1.18}$$

と定める．これは，(1.15), (1.16) により

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j \tag{1.19}$$

と書き換えることもできる．ここで $\dfrac{\partial f}{\partial z_j}, \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}$ は (1.16) で定義した $\dfrac{\partial}{\partial z_j}, \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ を f に作用させたものを表す．特に，$\dfrac{\partial f}{\partial z_j}$ は定義 1.1 で定義した偏導函数の値を表しているわけではない．そもそも，f が正則函数でないかぎり，f の偏導函数は定義されない．

しかしながら，f が正則である場合には，$\dfrac{\partial f}{\partial z_j}$ は実は偏導函数の値に一致する．

例 1.10. $z = x + iy$ に対し

$$\frac{\partial}{\partial x} z^n = nz^{n-1} \frac{\partial}{\partial x} z = nz^{n-1}, \quad \frac{\partial}{\partial y} z^n = nz^{n-1} \frac{\partial}{\partial y} z = inz^{n-1}$$

だから (1.16) により

$$\frac{\partial}{\partial z} z^n = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) z^n = \frac{1}{2}\left(nz^{n-1} - i^2 nz^{n-1}\right) = nz^{n-1}$$

であり，これはたしかに z^n を z で微分したものに一致している．

一般的に証明しよう．

定理 1.11. $D \subset \mathbb{C}^n$ とし，f を D で与えられた複素数値 C^1 級函数とする．

(1) 函数 f が正則であるための必要充分条件は $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \equiv 0,\ j = 1, ..., n$ が成り立つことである．

(2) このとき，$\dfrac{\partial}{\partial z_j}$ を f に作用させたものは，定義 1.1 で定めた偏導函数 $\dfrac{\partial f}{\partial z_j}$ の値に一致する．

証明 (1) $f(z)=u(z)+iv(z)$ とおくと，$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\equiv 0,\ j=1,...,n$ とは

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}-\frac{\partial v}{\partial y_j}\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}+\frac{\partial u}{\partial y_j}\right)\right\}\equiv 0,\qquad j=1,...,n$$

ということである．これは

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}=\frac{\partial v}{\partial y_j},\quad \frac{\partial v}{\partial x_j}=-\frac{\partial u}{\partial y_j},\qquad j=1,...,n \tag{1.20}$$

と同値である．すなわち u,v は 1 つの変数 z_j の函数とみれば Cauchy–Riemann の関係式を満たす．したがって f は各変数ごとに正則だから，命題 1.2 の逆により正則である．逆は明らか．

(2) 偏導函数の定義により $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f}{\partial z_j},\ \dfrac{\partial f}{\partial y_j}=i\dfrac{\partial f}{\partial z_j}$ である．ゆえに，

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}+\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}-i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)f=\frac{\partial}{\partial z_j}f$$

となる． ■

複素数値 C^1 級函数 f に対し，上の定理 1.11 の (1) の条件式

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\equiv 0,\qquad j=1,...,n \tag{1.21}$$

のことを **Cauchy–Riemann の関係式**と呼ぶ．なお，この式と (1.20) が同値であって，(1.20) からは正則函数 f の実部 u についての式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_j\partial y_k}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial y_k}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial y_j}=0,\qquad j,k=1,...,n \tag{1.22}$$

が得られることにも注意しておく．

系 1.12. 領域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 上で正則な函数 f に対し，f がいたるところで実数値をとるならば f は定数である．また，$|f|$ が定数ならば f は定数である．

証明 f が正則であることから Cauchy–Riemann の関係式 (1.21) が成り立つ．f が実数値であれば，両辺の共役をとって $\partial f/\partial z_j\equiv 0,\ j=1,...,n$ となるので f は定数である．

次に，$|f|$ が定数であるとする．$|f|\equiv 0$ であれば $f\equiv 0$ であるからよい．$f(a)\neq 0$ であるような点 a が存在するならば，$r=|f|$ とおくと，点 a の近傍では，f は C^1 級の（一価）実数値函数 $\theta(z)$ により $f(z)=re^{i\theta(z)}$ と表すことができる．そして仮定より

$$0\equiv\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}=ire^{i\theta}\frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}_j}$$

だから $\partial\theta/\partial\bar{z}_j \equiv 0$，したがって θ は正則だが，これは実数値函数なので，すでに示したことにより θ は定数である．これで f は a の近傍で定数だとわかった．一致の定理（定理 1.9）より，f は D 全体で定数である．■

1.5　最大値原理

命題 1.13 (最大値原理). 領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上の正則函数 f に対し，$|f|$ が D において最大値をとるならば，f は定数である．

証明 D 内の点 a において $|f|$ が最大値をとるとする．a を通る D の任意の複素 1 次元の切り口を考えると，1 変数の場合の最大値原理によってその切り口の a を含む連結成分上で f は定数である．ゆえに f は a を中心として D に含まれるような開球で定数だから，一致の定理（定理 1.9）により，f は D 全体で定数であることがわかる．■

D を $\mathbb{C}^n$ の有界領域とし，f を D で正則な $\overline{D}$ 上の連続函数とする．そして，∂D の閉部分集合 S が

$$\sup\{|f(z)| \mid z \in \overline{D}\} = \sup\{|f(z)| \mid z \in S\} \tag{1.23}$$

を満たすとしよう．これが任意の f について成り立つとき，S は D の**最大値をとる部分境界**であるという．

定理 1.14. D を $\mathbb{C}^n$ の有界領域とする．D の最大値をとる部分境界の中で，最小のもの $S_0(D)$ が（ただ一つ）存在する．

この定理 1.14 の証明は省略する*．$S_0(D)$ を D の **Širov 境界**と呼ぶ．

例 1.15. $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ に対しては $S_0(D) = \partial D$ である．なぜなら，絶対値 1 の任意の複素数 $a \in \mathbb{C}$ に対して，e^{az} という函数を考えると，$|e^{az}|$ は $\overline{D}$ 上で $\bar{a}$ だけで最大値をとるから，$\bar{a} \in S_0(D)$ でなければならない．

例 1.16. $D = \Delta(0; r_1, r_2) \in \mathbb{C}^2$ を考える．

$$\gamma_j = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r_j\}, \quad D_j = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r_j\}, \qquad j = 1, 2$$

とおけば，$\partial D = (\gamma_1 \times \overline{D}_2) \cup (\overline{D}_1 \times \gamma_2)$ であるが，一方で $S_0(D) = \gamma_1 \times \gamma_2$ となる．このことを示そう．

*たとえば，一松信『多変数解析函数論』（培風館），定理 1.13 を見よ．

$r_1 = r_2 = 1$ として一般性を失わないので，そのように仮定する．まず，$f(z_1, z_2)$ を D 上正則な $\overline{D}$ 上の連続函数とすれば，任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して，$f(e^{i\theta}, z_2)$ は z_2 の函数として $\Delta(0;1)$ 上で正則であることに注意しておく．なぜならこれは，z_2 についての正則函数の一様収束極限になっているからである．さて，$(z_1, z_2) \in \overline{D}$ において $|f|$ が最大値をとったとしよう．そのとき，まず z_1 について最大値原理を用いることにより，$|f(z_1, z_2)| = |f(e^{i\theta_1}, z_2)|$ なる θ_1 が存在することがわかる．次いで，上の注意から z_2 について最大値原理を適用することができ，$|f(e^{i\theta_1}, z_2)| = |f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})|$ となる θ_2 が得られる．したがって $\gamma_1 \times \gamma_2$ は D の最大値をとる部分境界である．例 1.15 と同様にして，これが $S_0(D)$ であることがわかる．

例 1.17. 実 $2n$ 次元の開球 $D = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < r\}$ を考えると，やはり例 1.15 と同様にして，$S_0(D) = \partial D$ とわかる．

第 2 講

4 月 27 日

2.1　陰函数定理，逆写像定理

領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上で定義された正則函数 $f_1, ..., f_m$ によって $F = (f_1, \ldots, f_m)$ と表される写像 $F : D \to \mathbb{C}^m$ のことを，**正則写像**という．以下，F はこのような正則写像とする．

定理 2.1 (陰函数定理). a を D の点とし，$F(a) = b$ とおく．そして，$m \leq n$ であって，

$$\det \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(z_1, \ldots, z_m)}(a) \neq 0 \tag{2.1}$$

が成り立つと仮定する．そのとき，a を含む領域 $D' = D_1 \times D_2 \subset D$（$D_1$ は $\mathbb{C}^m$ の，D_2 は $\mathbb{C}^{n-m}$ の領域），および D_2 上の正則函数 $\varphi_1(z_{m+1}, \ldots, z_n), ..., \varphi_m(z_{m+1}, \ldots, z_n)$ をとって，D' 上の点 $z = (z_1, \ldots, z_n)$ に対しては

$$F(z) = b \Longleftrightarrow \begin{cases} z_1 = \varphi_1(z_{m+1}, \ldots, z_n) \\ \quad \vdots \\ z_m = \varphi_m(z_{m+1}, \ldots, z_n) \end{cases} \tag{2.2}$$

となるようにすることができる．

定理 2.2 (逆写像定理). a を D の点とする．そして，$m = n$ であって，

$$\det \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}(a) \neq 0 \tag{2.3}$$

と仮定する．このとき，a を含む領域 $D' \subset D$ および領域 $D'' \subset \mathbb{C}^n$ が存在して，F の D' への制限 $F|_{D'}$ が D'' の上への 1 対 1 正則写像になる*．またこのとき，逆写像 $(F|_{D'})^{-1} : D'' \to D'$ も正則である．

---

* **“1 対 1 写像”**というのは単射のことである（全単射ではない）．**“上への写像”**は全射のことである．

逆に，原点を含む領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上の 1 対 1 正則写像 $F: D \to \mathbb{C}^n$ に対しては，(2.3) が成立する．

注意 実微分可能のカテゴリーでは逆は正しくない．たとえば，$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^3$ は 1 対 1 かつ上への写像だが原点において微分は 0 である．その一方で，$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^3$ はやはり原点において微分は 0 だけれども，1 対 1 写像ではないから，逆写像定理の逆に矛盾しない．

以下で，逆写像定理（定理 2.2）およびその逆の証明を，1 変数の場合のみについて与える．領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の定数でない正則写像（正則函数）$f: D \to \mathbb{C}$ を考えよう．

$a \in \mathbb{C}$ に対し，$f(z^0) = a$ である点 $z_0 \in D$ を f の a **点**と呼ぶ．さらに，

$$f(z_0) = a, \quad f'(z_0) = 0, \quad \ldots, \quad f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0 \tag{2.4}$$

であるとき，z_0 は m **位の** a 点であるという．このとき，f の z_0 における Taylor 展開は $f(z) = a + a_m(z - z_0)^m + \cdots$, $a_m \neq 0$ となる．

$$f(z) = a + (z - z_0)^m g(z), \qquad g(z) \text{ は } D \text{ で正則，} g(z_0) \neq 0 \tag{2.5}$$

と表すこともできる．

補題 2.3. 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の定数でない正則函数 $f: D \to \mathbb{C}$ を考える．点 z_0 が f の m 位の a 点であるとする．このとき，z_0 のいくらでも小さい近傍 U が存在して，

(i) $W = f(U)$ とおくと W は $a = f(z_0)$ の開近傍であり，

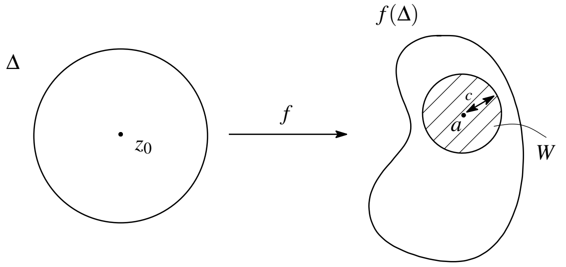
(ii) $f|_{U \setminus \{z_0\}} : U \setminus \{z_0\} \to W \setminus \{a\}$ は m 対 1 写像となる．

(iii) 特に $m = 1$ のとき，逆写像を $g: W \to U$ とおくと，g は W 上正則である．一般の m (≥ 1) に対しては，逆対応 $g: W \to U$ は m 価の代数函数となる．

代数函数について簡単に説明しておく．z に関する，w の正則函数を係数とする多項式 $P(z, w) = z^m + a_1(w) z^{m-1} + \cdots + a_m(w)$ があって，w を 1 つ固定して $w = w_0$ とすると $P(z, w_0) = 0$ は根 $z_1, \ldots, z_m$ を持つとする．このとき，$w_0 \mapsto (z_1, \ldots, z_m)$ という“対応”のことを m 価の**代数函数**と呼ぶのである*．

補題 2.3 の証明 $f(z) - a = (z - z_0)^m g(z)$, $g(z_0) \neq 0$ と表しておく．点 z_0 のある小近傍 $\Delta = \Delta(z_0; \varepsilon)$ をとれば $g(z)$ は $\overline{\Delta}$ 上で 0 にならない．定数 $c > 0$ を $\partial\Delta$ 上で $|f(z) - a| > c$ であるようにとり，$W = \Delta(a; c)$ とおく．

*このレクチャーノートでは補題 2.3 以外では一般の代数函数を扱わないので正確な定義は述べない．詳しくは，たとえば L. Ahlfors, *Complex Analysis,* 3rd ed., McGraw–Hill の Chapter 8, §2 や，O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces,* Springer–Verlag の Chapter 1, §8 を見よ．



W の点 w に対し $\mu(w)=\#\{z\in\Delta \mid f(z)=w\}$（右辺は位数を込めて数える）と定めると，

$$\mu(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta}\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-w}$$

である．これは w について正則で，かつ整数値をとるから，W 上一定である．したがって $\mu(w)=\mu(a)=m$．そこで $f^{-1}(W)\cap\Delta=U$ とおけば，$f|_{U\setminus\{z_0\}}: U\setminus\{z_0\}\to W\setminus\{a\}$ は m 対 1 の全射になっている．

$m=1$ の場合は $f|_U: U\to W$ が正則な全単射である．逆写像は

$$g(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} z\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-w}$$

で与えられるから，こちらも正則であることがわかる．

$m\geq 1$ のとき，U における $f(z)=w$ の根を $z_1(w),...,z_m(w)$ とすれば，

$$g_k(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} z^k\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-w}=\sum_{l=1}^{m} z_l(w)^k$$

は w について正則である．このことから，根の l 次基本対称式 $\sigma_l(z_1(w),\ldots,z_m(w))$ も，$g_1,...,g_m$ の多項式として表されるから w の正則函数であるとわかる．これらを $a_l(w)$ とおけば，

$$P(z,w)=z^m-a_1(w)z^{m-1}+\cdots+(-1)^{m-1}a_{m-1}(w)z+(-1)^m a_m(w)$$

により与えられる代数函数が逆対応 $g: W\to U$ にほかならない． ■

系 2.4. 領域 $D\subset\mathbb{C}$ 上の正則函数 $f: D\to\mathbb{C}$ が点 $z_0\in D$ の近傍で 1 対 1 ならば，$f'(z_0)\neq 0$ である．

これで逆写像定理（定理 2.2）およびその逆が 1 変数の場合に証明されたことになる．

問　補題 2.3 の U に対して，$f|_{U\setminus\{z_0\}}: U\setminus\{z_0\}\to W\setminus\{a\}$ は被覆写像（定義 4.21）になっている．このことを示せ．

2.2　1 点において双正則な写像

定義 2.5. 領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ で定義された正則写像 $F : D \to \mathbb{C}^n$ が点 a において逆写像定理（定理 2.2）の仮定 (2.3) を満たすとき，F は a **において双正則**であるという．$F = (f_1, \ldots, f_n)$ が a において双正則であるとき，$f_1, \ldots, f_n$ は a における**局所座標系**であるという．

原点における，収束する Taylor 級数の全体 $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ を**収束冪級数環**という．これは可換な局所環であり，$z_1, \ldots, z_n$ の生成するイデアル $\mathfrak{m} = (z_1, \ldots, z_n)$ がその唯一の極大イデアルである*．収束冪級数環の元は原点の近傍で定義された正則函数とみなすことができるから，原点を原点に移す正則写像 $F : D \to \mathbb{C}^m$ があるとき，

$$\sum_{(i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}^m} a_{i_1 \cdots i_m} w_1^{i_1} \cdots w_m^{i_m} = g(w) \mapsto g(F(z)) \tag{2.6}$$

は環準同型 $\mathbb{C}\{w_1, \ldots, w_m\} \to \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ を与える．この準同型を F^* で表す．

定理 2.6. 原点を含む領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ への正則写像 $F = (f_1, \ldots, f_n)$ であって，原点を原点に移すようなものを考える．そのとき，F が原点における局所座標系を与えるためには，$F^* : \mathbb{C}\{w_1, \ldots, w_n\} \to \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ が同型写像であることが必要充分である．

証明 F が原点における局所座標系を与えるとし，逆写像定理（定理 2.2）によって局所的に存在が保証された F の逆写像を G とする．任意に $f(z) \in \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ をとると，$g(w) = (G^* f)(w) = f(G(w))$ は w について原点の近傍で正則であって，$\mathbb{C}\{w_1, \ldots, w_n\}$ の元が得られる．そして $(F^* g)(z) = g(F(z)) = f(z)$ となるので，$F^* \circ G^* : \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ は恒等写像である．同様に $G^* \circ F^*$ も恒等写像とわかるから，F^* は同型である．逆は容易†． ■

問 $n \geq m$ とする．原点を含む領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^m$ への正則写像 $F = (f_1, \ldots, f_m)$ であって，原点を原点に移すようなものを考える．そのとき，もし

$$\det \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(z_1, \ldots, z_m)}(0) \neq 0$$

---

*収束冪級数環は，さらに Noether 環，正則環であることが知られている．Noether 環であることは定理 8.7 で証明する．

†写像 F^* が同型であると仮定する．各々の収束冪級数環の極大イデアルをそれぞれ $\mathfrak{m}_z, \mathfrak{m}_w$ と書くことにすれば，F^* は $\mathfrak{m}_w$ を $\mathfrak{m}_z$ に，したがってまた $\mathfrak{m}_w^2$ を $\mathfrak{m}_z^2$ に移すから，ベクトル空間の同型写像 $\mathfrak{m}_w/\mathfrak{m}_w^2 \to \mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2$ を誘導する（つまり，2 次以上の項を“捨てる”ことにより，斉 1 次式の空間のあいだの写像が矛盾なく定義され，これが同型になるということ）．これを $w_1, \ldots, w_n$ および $z_1, \ldots, z_n$ という基について行列表示したものが式 (2.3) に現れる行列にほかならないので，F が原点における局所座標系を与えることがわかる．

であるならば，$\mathbb{C}^{n-m}\times\mathbb{C}^m$ の原点の近傍で定義された正則函数 $\varphi_j(z_{m+1},\dots,z_n,w_1,\dots,w_m)$, $j=1,\dots,m$ であって

$$F(z)=w \Longleftrightarrow \begin{cases} z_1=\varphi_1(z_{m+1},\dots,z_n,w_1,\dots,w_m) \\ \qquad\vdots \\ z_m=\varphi_m(z_{m+1},\dots,z_n,w_1,\dots,w_m) \end{cases}$$

となるものが存在する．そして，$(f_1,\dots,f_m,z_{m+1},\dots,z_n)$ が原点 $0\in D$ における局所座標系になっている．この座標系に関して，F は射影である．すなわち，D のこの新しい局所座標を $(z_1',\dots,z_m',z_{m+1},\dots,z_n)$ と書けば

$$F:(z_1',\dots,z_m',z_{m+1},\dots,z_n)\mapsto(z_1',\dots,z_m')$$

である．以上のことを証明せよ．

2.3　双正則写像，等角写像

定義 2.7. D_1, D_2 を $\mathbb{C}^n$ の 2 つの領域とする．1 対 1 かつ上への正則写像 $F:D_1\to D_2$ があるとき，F を D_1 と D_2 の間の**解析的同型写像**，あるいは**双正則写像**という．またこのような F が存在するとき，D_1 と D_2 は**解析的に同型**，あるいは**正則同型**であるといい，$D_1\cong D_2$ と書く．

$F:D_1\to D_2$ が解析的同型写像であれば，2.1 節で述べたように逆写像定理（定理 2.2）はその逆も成立するのだから，逆写像 $F^{-1}:D_2\to D_1$ も正則写像である．

問　$\Delta(0;1,1)=\{z\in\mathbb{C}^2 \mid |z_1|<1, |z_2|<1\}$ と $D^2=\{z\in\mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2+|z_2|^2<1\}$ は解析的に同型ではないことを示せ．（1 変数の場合には，後述するように，有界な単連結領域同士は Riemann の写像定理（定理 5.9）により解析的に同型である．しかしながら 2 変数以上では事情が異なるのである．）

命題 2.8. $F:D_1\to D_2$ を解析的同型とする．そのとき，F は向きを保つ写像である．

証明　式 (1.16) を書き換えると

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial}{\partial z_n},\frac{\partial}{\partial \bar z_1},\dots,\frac{\partial}{\partial \bar z_n}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n},\frac{\partial}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial}{\partial y_n}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n \\ -\frac{i}{2}I_n & \frac{i}{2}I_n\end{pmatrix}$$

である．したがって，$F=(f_1,\dots,f_n)$ として $f_j(z,\bar z)=u_j(x,y)+iv_j(x,y)$ $(j=1,\dots,n)$ とおくと

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_j}{\partial z_k} & \dfrac{\partial f_j}{\partial \bar z_k} \\ \dfrac{\partial \overline{f}_j}{\partial z_k} & \dfrac{\partial \overline{f}_j}{\partial \bar z_k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_n & iI_n \\ I_n & -iI_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_j}{\partial x_k} & \dfrac{\partial u_j}{\partial y_k} \\ \dfrac{\partial v_j}{\partial x_k} & \dfrac{\partial v_j}{\partial y_k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n \\ -\frac{i}{2}I_n & \frac{i}{2}I_n\end{pmatrix}$$

なので

$$\det \frac{\partial(f_1,\ldots,f_n,\overline{f}_1,\ldots,\overline{f}_n)}{\partial(z_1,\ldots,z_n,\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_n)} = \det \frac{\partial(u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)}. \tag{2.7}$$

とくに，$f_1, ..., f_n$ が正則であれば

$$\det \frac{\partial(u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)} = \left|\det \frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(z_1,\ldots,z_n)}\right|^2 > 0$$

となり，F は向きを保つことがわかる． ■

$\mathbb{C}$ 上の C^1 級曲線 $\gamma : [0,1) \to \mathbb{C}$ を考える．$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ とおくとき，0 における**接ベクトル**は

$$\gamma'(0) = \frac{d\gamma}{dt}(0) = \frac{dx}{dt}(0) + i\frac{dy}{dt}(0) \tag{2.8}$$

で与えられる．接ベクトル $\gamma'(0)$ が 0 でないとき，曲線 γ は $t = 0$ で**非特異**であるという．ともに a を始点とする 2 つの曲線 γ_1, γ_2 があり，どちらも $t = 0$ で非特異であるとき，これらの $t = 0$ における交角を

$$\arg\left(\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}\right) \qquad \mathrm{mod}\ 2\pi \tag{2.9}$$

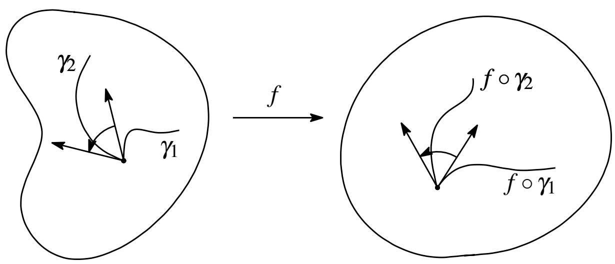
で定義する．

定義 2.9. 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の C^1 級写像 $f : D \to \mathbb{C}$ を考える．また，$a \in D$ とする．$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とおくとき，

$$\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(a) \neq 0 \tag{2.10}$$

を満たし，a を始点とし $t = 0$ で非特異であるようなどんな 2 つの曲線 γ_1, γ_2 についても，γ_1 と γ_2 の $t = 0$ における交角が $f \circ \gamma_1$ と $f \circ \gamma_2$ の $t = 0$ における交角に等しくなるとき，f は a において**等角**であるという．

D 上の任意の点において f が等角であるとき，f を**等角写像**という．



定理 2.10. 領域 $D \subset \mathbb{C}$ で定義された C^1 級写像 $f : D \to \mathbb{C}$ が等角写像であるためには，f が正則でかつ D 上 $f'(z) \neq 0$ であることが必要充分である．

証明　a を始点とする曲線 γ について，$(f\circ\gamma)(t)$ の $t=0$ における接ベクトルは

$$(f\circ\gamma)'(0)=\frac{\partial f}{\partial z}(a)\gamma'(0)+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\overline{\gamma}'(0)$$

で与えられる．したがって，f が正則ならば任意の γ_1,γ_2 に対して

$$\arg\left(\frac{(f\circ\gamma_2)'(0)}{(f\circ\gamma_1)'(0)}\right)=\arg\left(\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a)\gamma_1'(0)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a)\gamma_2'(0)}\right)=\arg\left(\frac{\gamma_1'(0)}{\gamma_2'(0)}\right)$$

となるので f は等角である．

逆に，f が等角写像であるとし，a を D の任意の点とする．$f(z)=u(z)+iv(z)$ とおく．いま仮に $(\partial f/\partial z)(a)=0$ であるとすれば，f の a における微分 $(df)_a$ は (1.16) により $(df)_a=(\partial f/\partial\bar{z})(a)\cdot(d\bar{z})_a$ であるが，仮定 $\partial(u,v)/\partial(x,y)\neq 0$ により $(df)_a\neq 0$ であることに注意すると，この式は f の a における等角性に矛盾する．したがって $(\partial f/\partial z)(a)\neq 0$ である．そこで

$$c=\frac{(\partial f/\partial\bar{z})(a)}{(\partial f/\partial z)(a)}$$

とおいてみよう．そのとき，a を始点とする任意の γ_1,γ_2 について

$$\arg\left(\frac{(f\circ\gamma_2)'(0)}{(f\circ\gamma_1)'(0)}\right)=\arg\left(\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a)\gamma_2'(0)+\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}(a)\overline{\gamma}_2'(0)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a)\gamma_1'(0)+\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}(a)\overline{\gamma}_1'(0)}\right)=\arg\left(\frac{\gamma_2'(0)+c\overline{\gamma}_2'(0)}{\gamma_1'(0)+c\overline{\gamma}_1'(0)}\right)$$

であって，この式の左辺は $\arg(\gamma_2'(0)/\gamma_1'(0))$ に等しい．そこで，γ_1,γ_2 として特に $\gamma_1'(0)=1$, $\gamma_2'(0)=e^{i\theta}$ $(\theta\in\mathbb{R})$ であるようなものを考えることで

$$\arg(e^{i\theta})=\arg\left(\frac{e^{i\theta}(1+ce^{-2i\theta})}{1+c}\right)$$

すなわち $\arg(1+ce^{-2i\theta})=\arg(1+c)$ を得る．これが任意の θ について成立するのは $c=0$ の場合に限られる．ゆえに $(\partial f/\partial\bar{z})(a)=0$ であって，a は任意だから f は正則であることがわかった．■

領域 $D_1,D_2\subset\mathbb{C}$ のあいだの解析的同型 F は，逆写像定理（定理 2.2）の逆と定理 2.10 によって等角写像である．そこで，F のことを**等角同型**ともいう．

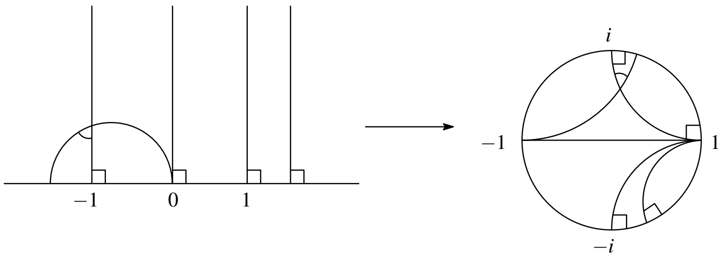
例 2.11. $z=(w-i)/(w+i)$ という変換は，上半平面 $H=\{w\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}w>0\}$ と単位開円板 $B=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ のあいだの等角同型を与える．実際，

$$|z|^2-1=\left|\frac{w-i}{w+i}\right|^2-1=\frac{-4\operatorname{Im}w}{|w+i|^2}$$

だからこの変換は H から B への写像を与えており，

$$w=-i\frac{z+1}{z-1}$$

と逆に解くこともできる．$w=\infty, 0, 1, -1$ は順に $z=1, -1, -i, i$ に移されている．



領域 $D\subset\mathbb{C}$ 上一価正則な函数 f が，$z_1\neq z_2\in D$ ならば $f(z_1)\neq f(z_2)$ を満たすとき，f は**単葉**であるという．f が単葉函数であるならば $f(D)\subset\mathbb{C}$ は領域であり，$f:D\to f(D)$ は等角同型である．

定義 2.12. 領域 $D\subset\mathbb{C}^n$ に対し，D 上定義された D への解析的同型写像全体は，写像の合成によって群になる．これを D の**自己同型群**といい，$\mathrm{Aut}(D)$ で表す．

例 2.13. (1) $D=B$（単位開円板）のとき．

$$\mathrm{Aut}(B)=\left\{ w=f(z)=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \;\middle|\; \theta\in\mathbb{R}, \alpha\in B \right\}.$$

このことは Schwarz の補題を用いるとわかる．$\alpha\in B$ に対して $w=f_\alpha(z)=(z-\alpha)/(1-\overline{\alpha}z)$ とおけば，

$$1-|w|^2=\frac{(1-|z|^2)(1-|\alpha|^2)}{|1-\overline{\alpha}z|^2}>0$$

だから f_α は B を B の中に移す．逆写像 $z=f_\alpha^{-1}(w)=(w+\alpha)/(1+\overline{\alpha}z)$ についても同様だから，f_α は解析的同型 $B\to B$ である．さて，任意の $f\in\mathrm{Aut}(B)$ について，$f(\alpha)=0$ とおくと，$f\circ f_\alpha^{-1}$ も $\mathrm{Aut}(B)$ の元であって $f\circ f_\alpha^{-1}(0)=0$ である．すると Schwarz の補題により $f\circ f_\alpha^{-1}(w)=e^{i\theta}w$ と表される．ゆえに

$$f(z)=e^{i\theta}f_\alpha(z)=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}.$$

(2) $D=\mathbb{C}$ のとき．$\mathrm{Aut}(\mathbb{C})=\{w=az+b \mid a, b\in\mathbb{C}, a\neq 0\}$.

(3) $D=H$（上半平面）のとき．

$$\mathrm{Aut}(H)=\left\{ \frac{az+b}{cz+d} \;\middle|\; a, b, c, d\in\mathbb{R}, ad-bc>0 \right\}.$$

問　例 2.13 の (2), (3) を証明せよ．

第 3 講

5 月 4 日

3.1　解析接続

定義 3.1 (解析接続)**.** $D_0 \subset \mathbb{C}^n$ を領域，f_0 をその上で定義された正則函数とする．

$D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$ であるような領域 $D_1 \subset \mathbb{C}^n$ およびその上で定義された正則函数 f_1 があって，f_1 が $D_0 \cap D_1$ のある連結成分上で f_0 と一致するとき，f_1 を f_0 の D_1 への**解析接続**という（このような f_1 は特に f_0 の**直接解析接続**と呼ばれる）．

さらにそれに続けて，$D_2, D_3, ..., D_m$ という領域の列，およびそれぞれの領域の上で定義された正則函数 $f_2, f_3, ..., f_m$ があって，$D_j \cap D_{j+1} \neq \emptyset$ であり，各 f_{j+1} が f_j の D_{j+1} への直接解析接続となっているとき，$f_2, f_3, ..., f_m$ も f_0 の解析接続という．函数の列 $f_0, f_1, ..., f_m$ のことも f_0 の解析接続と呼ぶ.

こうして，D_0 上の函数 f_0 から出発して，“$D = D_0 \cup D_1 \cup \cdots \cup D_m$” 上の “函数” f が定まった．しかし，次の例に示すように，たとえば $D_0 \cap D_m \neq \emptyset$ だからといって $f_0|_{D_0 \cap D_m}$ と $f_m|_{D_0 \cap D_m}$ が一致するとは限らない．一般に f は “多価函数” となる．f を通常の意味での函数（“一価函数”）と考えるためには “$D = D_0 \cup D_1 \cup \cdots \cup D_m$” に適切な解釈を与える必要があるが，ここではやらない.

例 3.2. 函数 $\sqrt{z}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上で一価函数としては定義できないが，“2 価函数” としてなら定義される．それは次のような意味においてである．まず，$D_0 = \{re^{i\theta} \mid 0 < \theta < \pi\}$ において $f_0(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$ とおく．この f_0 を次のように解析接続していく．

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \left\{ re^{i\theta} \,\middle|\, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right\}, & f_1(z) &= \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}, \\
D_2 &= \{ re^{i\theta} \mid \pi < \theta < 2\pi \}, & f_2(z) &= \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}, \\
D_3 &= \left\{ re^{i\theta} \,\middle|\, \frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2} \right\}, & f_3(z) &= \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}, \\
D_4 &= \{ re^{i\theta} \mid 2\pi < \theta < 3\pi \}, & f_4(z) &= \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}.
\end{aligned}
$$

D_4 と D_0 は一致した領域だが，その上の函数 f_4 と f_0 は $f_4 = -f_0$ の関係にある．解析接続をさらにもう 1 周行えば，今度はもとの f_0 が現れる．

命題 3.3 (函数関係の不変性). (1) $f_0, f_1, ..., f_m$ が f_0 の解析接続であれば，$\partial f_0/\partial z_k, \partial f_1/\partial z_k, ..., \partial f_m/\partial z_k$ は $\partial f_0/\partial z_k$ の解析接続である．

(2) $D_j \cap D_{j+1} \neq \emptyset$ を満たす領域の列 $D_0, D_1, ..., D_m$ があり，領域 D_0 上で定義された l 個の正則函数 $f_{10}, ..., f_{l0}$ のそれぞれについて $D_0, D_1, ..., D_m$ 上の解析接続 $f_{i0}, f_{i1}, ..., f_{im}$ $(i = 1, 2, ..., l)$ が与えられているとする．さらに U_j $(j = 0, 1, ..., m)$ を $\mathbb{C}^l$ の領域とし，$(f_{1j}, \ldots, f_{lj})$ の値は U_j に属するものとする．そして，F_0 を U_0 上の正則函数，$F_0, ..., F_m$ をその $U_0, ..., U_m$ 上の解析接続であるとしよう．そのとき，函数の列 $F_0(f_{10}(z), \ldots, f_{l0}(z))$, $F_1(f_{11}(z), \ldots, f_{l1}(z)), ..., F_m(f_{1m}(z), \ldots, f_{lm}(z))$ は，$F_0(f_{10}(z), \ldots, f_{l0}(z))$ の $D_0, D_1 ..., D_m$ 上の解析接続となる．特に，$F_0(f_{10}(z), \ldots, f_{l0}(z)) \equiv 0$ ならば $F_m(f_{1m}(z), \ldots, f_{lm}(z)) \equiv 0$ である．

この命題の証明は容易であろう．それでは，“多価函数”の例をもういくつか挙げよう．

例 3.4. $z = e^w$ の“逆函数”$w = \log z$ を考えたい．$z = re^{i\theta}$ とおき，θ の変域をひとつ指定するごとに（たとえば $-\pi < \theta < \pi, 0 < \theta < 2\pi$），$\{z = re^{i\theta} \mid r > 0, \theta \in (\text{指定した変域})\}$ において $\log|z| + i\theta$ という $\log z$ の**分枝**が得られる．任意に選んだひとつの分枝から解析接続によってすべての分枝が得られるから，$\log z$ は解析接続によって得られる多価函数であると考えればよい．$\log z$ は“無限多価函数”となる．一般に多価函数の導函数は命題 3.3 (1) によって再び多価函数となるが，$\log z$ の場合には，それは結果的に一価函数になる：$(\log z)' = 1/z$. これは各分枝について計算してもよいが，命題 3.3 (2) を用いればただひとつの分枝について計算しただけでわかる．なお，$z = 0$ は $\log z$ の**対数型分岐点**と呼ばれる．

例 3.5. 一般の $\alpha \in \mathbb{C}$ について $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ と定義すれば，z^α が $z = 0$ を除いた領域で多価正則函数として定まる．z^α のある分枝に対して，$z = 0$ のまわりを 1 回転して得られる分枝は $(ze^{2\pi i})^\alpha = z^\alpha e^{2\alpha\pi i}$ である．導函数は $z(z^\alpha)' = \alpha z^\alpha$ を満たす．

(1) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ のとき，$m\alpha$ $(m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ は整数にはならないから $e^{2m\alpha\pi i} \neq 1$. ゆえに z^α は無限多価函数となる．

(2) $\alpha \in \mathbb{Q}$ のとき．$\alpha = q/p$（p, q は互いに素な整数）と表せば，$e^{2m(q/p)\pi i}$ は m が p の倍数のとき 1 となる．よって $z^\alpha = z^{q/p}$ は p 価函数である．この場合，$z = 0$ を $z^{q/p}$ の**代数的分岐点**という．

(3) $\alpha \in \mathbb{R}$ のとき, (1), (2) のどちらの状況であるかによらず, $|z^\alpha| = |e^{\alpha \log z}| = e^{\mathrm{Re}(\alpha \log z)} =$

$e^{\alpha \operatorname{Re}(\log z)} = e^{\alpha \log|z|} = |z|^{\alpha}$ である．したがって

$$\lim_{z\to 0}|z^{\alpha}| = \begin{cases} 0, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \\ \infty, & \alpha < 0. \end{cases}$$

3.2　冪級数による解析接続

命題 3.6. 冪級数

$$f(z) = \sum_{\nu_1,\,\dots,\,\nu_n} a_{\nu_1,\dots,\nu_n}(z_1 - a_1)^{\nu_1} \cdot\cdots\cdot (z_n - a_n)^{\nu_n} \tag{3.1}$$

がある多重円板 $\Delta(a;r) \subset \mathbb{C}^n$ で広義一様収束し正則函数 f を定めており，かつ $\overline{\Delta}(a;r)$ を含むそれより真に大きい多重円板ではもはや広義一様収束しないとする．そのとき，点 $z' \in \partial\Delta(a;r)$ であって，f が z' のいかなる近傍にも直接接続できないようなものが存在する（このような点 z' を f の**特異点**という）．

証明 $\partial\Delta(a;r)$ 上に特異点がないとすれば，f は $\overline{\Delta}(a;r)$ を含むある多重円板 $\Delta(a;r')$ に正則に拡張できる．その拡張の a における Taylor 展開は (1.12) により元の冪級数 (3.1) に等しいから，定理 1.8 により (3.1) は $\Delta(a;r')$ で広義一様収束する．これは仮定に反する．■

例 3.7 (Vivanti)**.** 係数がすべて 0 以上の実数であるような 1 変数の冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $(a_n \geq 0)$ を考える．もしこの冪級数の収束半径が 1 であるならば，$z = 1$ は f の特異点である．

定理 3.8 (H. Cartan–Thullen)**.** $D \subset \mathbb{C}^n$ を領域とし，$K \subset D$ をそのコンパクトな部分集合として，$\rho = |K, \partial D| = \inf\{|z - z'| \mid z \in K, z' \in \partial D\}$ とおく．

点 $a \in D$ において，D 上の任意の正則函数 f に対し，

$$|f(a)| \leq \sup_{z\in K}|f(z)| \tag{3.2}$$

が成り立つとする．そのとき，D 上の任意の正則函数は，多重円板 $\Delta(a;\rho)$ まで*直接解析接続できる．

証明 f を D 上正則な函数とする．点 a で f を冪級数展開したものを

$$\sum a_{\nu_1\cdots\nu_n}(z_1 - a_1)^{\nu_1}\cdots(z_n - a_n)^{\nu_n} \tag{3.3}$$

---

*n 個の数の組 $(\rho,\dots,\rho)$ のことを単に ρ と書いた．

とする．ここで (1.12) より，

$$|a_{\nu_1\cdots\nu_n}| = \frac{1}{\nu_1!\cdots\nu_n!}\left|\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n}f}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_n^{\nu_n}}(a)\right| \leq \frac{1}{\nu_1!\cdots\nu_n!}\sup_{z\in K}\left|\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n}f}{\partial z_1^{\nu_1}\cdots\partial z_n^{\nu_n}}(z)\right|. \tag{3.4}$$

z' を K の任意の点とする．$\overline{\Delta}(z';\rho-\varepsilon)\subset D$ なので，$K_{\rho-\varepsilon}=\{z\in\mathbb{C}^n \mid |z,K|\leq\rho-\varepsilon\}\subset D$, $M_\varepsilon = \sup_{z\in K_{\rho-\varepsilon}}|f(z)|$ とおくと，Cauchy の評価式（系 1.4）により (3.4) の右辺は上から

$$\frac{M}{(\rho-\varepsilon)^{\nu_1}\cdots(\rho-\varepsilon)^{\nu_n}}$$

でおさえられる．よって (3.3) は少なくとも $\Delta(a;\rho-\varepsilon)$ 上で広義一様収束する．$\varepsilon\to 0$ として，f を $\Delta(a;\rho)$ 上に解析接続できた． ■

D 上の任意の正則函数 f に対して (3.2) が成り立つような点 a の全体を $\hat{K}$ で表し，K の**正則凸包**と呼ぶ．

3.3 正則領域

領域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 上の正則函数 f について，f が ∂D の点を含むどんな領域にも直接解析接続することができないとき，D を f の**自然な定義域**といい，∂D を f の**自然境界**という．ある正則函数の自然な定義域になっているような領域のことを**正則領域**という．

定理 3.8 から次のことがただちにしたがう．

系 3.9. $D\subset\mathbb{C}^n$ が正則領域ならば，D の任意のコンパクト集合 K に対し $\hat{K}$ もコンパクトである（この条件を満たす領域のことを**正則凸領域**という）．

証明 D を正則領域とする．そのとき，どの ∂D の点の開近傍 U を考えても，U に直接解析接続されないような D 上の正則函数が存在する．したがって定理 3.8 により，D の任意のコンパクト集合 K に対し $|\hat{K},\partial D|\geq|K,\partial D|$ である．したがって $\hat{K}$ はコンパクト． ■

実は，「正則凸領域 $\Longrightarrow$ 正則領域」も成り立つことが知られている．

例 3.10 (Hadamard の空隙定理). $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^{n_\nu}$, $\varliminf_{\nu\to\infty} n_{\nu+1}/n_\nu>1$ という形の，収束半径が正であるような 1 変数の冪級数を考える．すると，その収束円板が f の自然な定義域となる*.

例 3.11. $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}z^{\nu!}$ は単位円板を自然な定義域とする．なぜなら，f の収束半径は 1 であって $\lim_{\nu\to\infty}(\nu+1)!/\nu!=\infty$ だから，Hadamard の空隙定理（例 3.10）が適用できる．したがって特に，単位円板は正則領域である．なお，

$$f(re^{iq/p})=\sum_{\nu=0}^{p-1}(re^{iq/p})^{\nu!}+\sum_{\nu=p}^{\infty}r^{\nu!}\to\infty \quad (r\uparrow 1)$$

に注意して直接確かめることもできる．

例 3.12. 任意の多重円板 $\Delta(a;r)\subset\mathbb{C}^n$ は正則領域である．$a=0$ のときに確かめれば充分だが，$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}z^{\nu!}$ とすると

$$f\left(\frac{z_1}{r_1}\right)+f\left(\frac{z_2}{r_2}\right)+\cdots+f\left(\frac{z_n}{r_n}\right)$$

は $\Delta(0;r)$ を自然な定義域とする函数である．

例 3.13. $B=\{z\in\mathbb{C}^n \mid |z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<1\}$ は正則凸領域である．任意のコンパクト集合 $K\subset B$ に対し，$r=\sup_{z\in K}\sqrt{|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2}\ (<1)$ とおく．すると

$$\hat{K}\subset\{z\in B \mid |z_1|^2+\cdots+|z_n|^2\le r^2\}=\overline{B}_r\subset B$$

となる．これは $z'\in B\setminus\overline{B}_r$ に対して B 上の正則函数 f で $|f(z_0)|>\sup_{z\in K}|f(z)|$ なるものがとれるということだが，それは明らかだろう．1 次函数でそのようなものがとれる．

例 3.14 (Hartogs の接続定理). K を多重円板 $\Delta(0;r)\subset\mathbb{C}^n$ のコンパクトな部分集合とし，$D_K=\Delta(0;r)\setminus K$ は連結であるとする．$n>1$ のとき，f が D_K で正則な函数なら，それは必ず $\Delta(0;r)$ に正則に拡張できる．したがって特に D_K は正則領域でない．このことを証明しよう．

---

*たとえば，R.E. Greene & S.G. Krantz, *Function Theory of One Complex Variable,* 3rd ed., American Mathematical Society の Theorem 9.2.1 を参照せよ．なお，さらに強い次の事実が知られている（**Ostrovski 超収束**）．$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ を収束半径が正であるような 1 変数の冪級数とし，自然数の増加列 $\{n_\nu\}$ を $\varliminf_{\nu\to\infty} n_{\nu+1}/n_\nu>1$ を満たすものとして，$\varphi_\nu(z)=\sum_{n=0}^{n_\nu}a_nz^n$ とおく．そのとき，もし $f(z)$ の収束円板の境界上に $f(z)$ がその点の近傍に正則に拡張できる点があれば，$\{\varphi_\nu\}$ は $\nu\to\infty$ のときその点の近傍で一様収束する．

$r=(r_1,...,r_n)$ に対し，$r'_j<r_j$ であるような $r'=(r'_1,...,r'_n)$ を $K\subset\overline{\Delta}(0;r')$ となるようにとることができる．f は $\Delta(0;r)\setminus\overline{\Delta}(0;r')$ で正則である．

$r'_j<r''_j<r_j$ なる r'' をとり，$\Delta(0;r'')$ 上で

$$\tilde{f}(z_1,...,z_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta_1|=r''_1}\cdots\int_{|\zeta_n|=r''_n}\frac{f(\zeta_1,...,\zeta_n)\,d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}$$

と定める．$r'_1<|z_1|<r''_1$ であるような範囲で考えると Cauchy の積分公式により $f=\tilde{f}$ である（いったん z_1 を固定して，f および $\tilde{f}$ を残りの変数の函数として考えればよい）．仮定より $\Delta(0;r'')\setminus K$ も連結だから，f と $\tilde{f}$ はその定義域の共通部分で一致し，f の $\Delta(0;r)$ への拡張を与える．

例 3.15. $n\geq 2$ のとき正則函数は孤立零点を持ちえない．なぜなら，f が a を孤立零点として持つとすると，a を中心とする小さな多重円板 Δ をとれば，$1/f$ は $\Delta\setminus\{a\}$ で正則だが Δ に正則に拡張されない．これは例 3.14（Hartogs の接続定理）に反する．

例 3.16. 任意の領域 $D\subset\mathbb{C}$ は必ず正則領域であることを示す．

$\mathbb{C}$ は明らかに正則領域だから，$D\neq\mathbb{C}$ として証明する．D の有理点全体は可算個なので $\{z_m\}_{m=1,2,...}$ と番号づけておく．z_m を中心として D に含まれる最大半径の円板をとり，その円周と ∂D との交点の 1 つ ζ_m をとっておく．$\{a_m\}_{m=1,2,...}$ を正数列で $\sum_{m=1}^{\infty}a_m<\infty$ なるものとする．このとき

$$f(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{z-\zeta_m}$$

とおくと，

(1) $f(z)$ は D 上広義一様収束し，
(2) $\{\zeta_m\}_{m=1,2,...}$ は ∂D 上稠密で，
(3) $\displaystyle\lim_{z\to\zeta_m,\,z\in\overline{z_m\zeta_m}}|f(z)|=\infty$ となる（$\overline{z_m\zeta_m}$ は z_m と ζ_m を結ぶ線分）．

したがって f は D を自然な定義域とする正則函数となる*．上の (1), (2), (3) を順に示そう．

---

*実は (2) よりも強い次のことを示しておく必要がある．

(2′) ∂D の点の任意の連結開近傍 U に対し，C を $D\cap U$ の任意の連結成分とすれば，C 内の有理点 z_m であって，対応する ζ_m も U に属し，さらに線分 $\overline{z_m\zeta_m}$ 上の点は ζ_m を除き C の中にあるようなものが存在する．

証明しよう．∂C 上には，$\partial D\cap U$ の点 ζ が存在する（C の中の点から D の外部の点へと U の中を通りながら進むとき，C から出る瞬間の点を考えればよい）．$\Delta(\zeta;2\varepsilon)\subset U$ となるよう $\varepsilon>0$ を定め，$\Delta(\zeta;\varepsilon)\cap C$ の有理点 z_m をとる．z_m に最も近い ∂D の点 ζ_m は $\Delta(\zeta;2\varepsilon)$ の中にあるから（なぜなら，$\Delta(\zeta;2\varepsilon)$ の外の点よりも ζ のほうが z_m に近い），$\zeta_m\in U$ である．$\overline{z_m\zeta_m}$ 上の ζ_m 以外の点は，$D\cap U$ の中にあるから，C の中にある．

(1) $K \subset D$ を任意のコンパクトな部分集合とする．$|K,\partial D| = d$ とおくと，K 上で $|z-\zeta_m| \geq d$ だから $f(z)$ は K 上で絶対一様収束する．

(2) 任意の $\zeta \in \partial D$ に対し，ζ を中心とする半径 ε の円板 $\Delta(\zeta;\varepsilon) \cap D$ はある有理点 z_m を含む．z_m と ζ_m の距離は高々 ε で，$|\zeta-\zeta_m| \leq |\zeta-z_m| + |z_m-\zeta_m| \leq \varepsilon+\varepsilon \leq 2\varepsilon$.

(3) $m \in \mathbb{N}$ を固定する．$\displaystyle\sum_{n>N} a_n < a_m$ となる N をとる．すると $z \in \overline{z_m\zeta_m}, z \neq \zeta_m$ に対して

$$\begin{aligned}|f(z)| = \left|\sum \frac{a_n}{z-\zeta_n}\right| &\geq \sum_{\zeta_n=\zeta_m} \frac{a_n}{|z-\zeta_m|} - \sum_{\zeta_n\neq\zeta_m} \frac{a_n}{|z-\zeta_n|} \\ &\geq \frac{a_m}{|z-\zeta_m|} - \sum_{n>N,\zeta_n\neq\zeta_m} \frac{a_n}{|z-\zeta_n|} - \sum_{n\leq N,\zeta_n\neq\zeta_m} \frac{a_n}{|z-\zeta_n|} \\ &\geq \frac{1}{|z-\zeta_m|}\left(a_m - \sum_{n>N} a_n\right) - \sum_{n\leq N} \frac{a_n}{|z-\zeta_n|}.\end{aligned}$$

ただし最後の $\geq$ は，線分 $\overline{z_m\zeta_m}$ 上の点 z に対して $|z-\zeta_m| \leq |z-\zeta_n|$ が成り立つことからしたがう．$z \to \zeta_m$ のとき右辺は ∞ に発散する．これで示された．

3.4　正則函数の芽のなす層

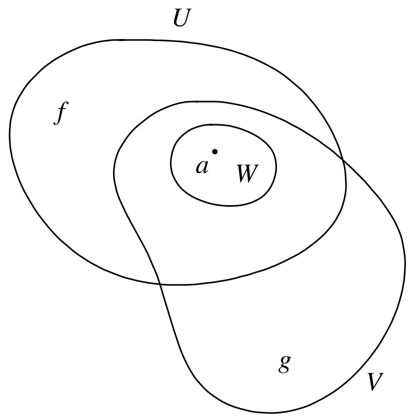
領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ の点 $a \in D$ について，次のような集合を考える．

$$\{(U,f) \mid U \text{ は } a \text{ の開近傍}, f \text{ は } U \text{ 上の正則函数}\}. \tag{3.5}$$

この集合（以下単に $\{(U,f)\}$ と書く）に同値関係 $\sim$ を

$$\begin{aligned}&(U,f) \sim (V,g) \\ &\quad\Longleftrightarrow a \text{ の開近傍 } W \subset U \cap V \text{ であって } f|_W = g|_W \text{ であるものが存在する}\end{aligned} \tag{3.6}$$

により導入する．



商集合 $\{(U,f)\}/\sim$ を $\mathcal{O}_a$ と書き，その元を点 a における**正則函数の芽**と呼ぶ．$\mathcal{O}_a$ は自然に環の構造を持つ．(U,f) の定める芽を f_a で表す．

問　原点における正則函数の芽のなす環 $\mathcal{O}_0$ は，原点を中心とする収束冪級数環 $\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\}$ と自然に同一視できる．このことを確かめよ．

集合としての直和をとって $\mathcal{O}=\bigcup_{a\in D}\mathcal{O}_a$ と書き，これを領域 D 上の**正則函数の芽のなす層**という*.

$\mathcal{O}$ の元 $\boldsymbol{f}\in\mathcal{O}_a\subset\mathcal{O}$ に対し，$\boldsymbol{f}$ の代表元 (U,f) をとり，$N(U,f)=\{f_b \mid b\in U\}\subset\mathcal{O}$ とおく．このような $N(U,f)$ 全体の集合を $\boldsymbol{f}$ の基本近傍系とすることにより，$\mathcal{O}$ に位相が定まる．

問　$\mathcal{O}$ は Hausdorff 空間であることを示せ．また，$p:\mathcal{O}\to D$ を $f_a\mapsto a$ により定めれば，p は局所同相写像であることを示せ．

---

*現在は，このように定義される位相空間は，正則函数の芽のなす層の**層空間**と呼ばれるのが普通である．層そのものがどのように定義されるか，および層と層空間の関係については，たとえば O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces,* Springer–Verlag の Chapter 1, §6 を見よ．

第 4 講

5 月 11 日

今日の講義の中では，「曲線」とは連続な曲線のことを指す．微分可能性は仮定しない．

4.1　曲線に沿った解析接続

定義 4.1. 点 $a \in \mathbb{C}^n$ を中心とする収束冪級数 $f_a(z)$（a における**函数要素**ともいう）と，a を始点とする曲線 $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^n$ が与えられたとする．そのとき，f_a の γ **に沿った解析接続**とは次のような $f(z,t)$ のことである．

(i) 任意の $t \in [0,1]$ に対し，$f(z,t)$ は $\gamma(t)$ を中心とするある収束冪級数（函数要素）である．

(ii) $f(z,0) = f_a(z)$.

(iii) 任意の $t \in [0,1]$ に対し，充分小さい ε をとれば，$|s-t| < \varepsilon$ なる s については $f(z,s)$ は $f(z,t)$ の直接接続となる．

このような $f(z,t)$ があるとき，f_a は γ **に沿って解析接続可能**であるといい，終点 $\gamma(1)$ における函数要素 $f(z,1)$ を f_a の曲線 γ に沿った**解析接続**ともいう．

定理 4.2. (1) f_a が曲線 γ に沿って解析接続可能ならば，解析接続はただ 1 つしかない．

(2) f_a が曲線 γ に沿って f_b に解析接続されるならば，f_b は逆向きの曲線 γ^{-1} によって f_a に解析接続される．

証明 (1) γ に沿って 2 通りの解析接続 $f(z,t), g(z,t)$ があったとする．

$$J = \{t \in [0,1] \mid s \le t \text{ について } f(z,s) = g(z,s)\}$$

とおく．$0 \in J$ だから $J \neq \emptyset$. そこで，J が $[0,1]$ の開集合でも閉集合でもあることを示せば，$J = [0,1]$ であるとわかり，主張がしたがう．

<u>J が開集合であること</u>．$t \in J$ ならば $f(z,t) = g(z,t)$ であり，定義の (iii) より，$|s-t| < \varepsilon$ なる s について $f(z,s)$ は $f(z,t)$ の，$g(z,s)$ は $g(z,t)$ の直接接続である．一致の定理と Taylor 展開の一意性から $f(z,s) = g(z,s)$ である．

<u>J が閉集合であること</u>．$t \in \overline{J}$ としてみると，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $t - \varepsilon < s < t$ なる $s \in J$ が存在する．$f(z,s) = g(z,s)$ である．一方 (iii) より $\varepsilon > 0$ が充分小さければ $f(z,s)$ は $f(z,t)$ の，$g(z,s)$ は $g(z,t)$ の直接接続であり，したがって $f(z,t) = g(z,t)$．つまり $t \in J$ である．

(2) f_a の曲線 γ に沿った解析接続を $f(z,t)$ とすれば，$f(z,1-t)$ が f_b の曲線 γ^{-1} に沿った解析接続となる． ■

系 4.3. f を D において正則な一価函数とし，点 $a \in D$ での冪級数展開を f_a とする．そのとき，f_a は D 内 a を始点とする任意の曲線に沿って解析接続可能であり，しかも $f(z,t)$ は f の $\gamma(t)$ における冪級数展開にほかならない．

系 4.4. D_0, D_1, ..., $D_m \subset \mathbb{C}^n$ を領域，f_0, f_1, ..., f_m をそれぞれの領域上の正則函数，$D_j \cap D_{j+1} \neq \emptyset$, f_{j+1} は f_j の直接接続とする．f_j と f_{j+1} がその上で一致しているような $D_j \cap D_{j+1}$ の連結成分を C_{j+1} とする．曲線 $\gamma\colon [0,1] \to \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ があり，$0 = t_0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_m \le t_{m+1} = 1$, $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset D_j$, $t_j \in C_j$ なる分点があるとする．そのとき，f_0 が定める $\gamma(0)$ における函数要素は曲線 γ にそって接続可能で，かつ，$f(z,1)$ は f_m が定める $\gamma(1)$ における函数要素に一致する．

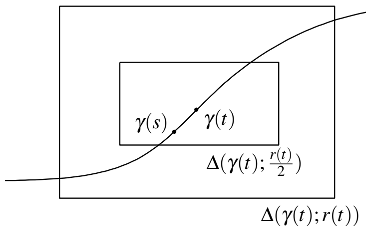
命題 4.5. $f(z,t)$ をある曲線 $\gamma(t)$ に沿った解析接続とする．このとき，ある $r = (r_1, \dots, r_n)$ $(r_j > 0)$ が存在して，$f(z,t)$ は任意の $t \in [0,1]$ に対して少なくとも $\Delta(\gamma(t); r)$ で収束する．

注意　$n = 1$ のとき，$f(z,t)$ の収束半径を $r(t)$ とするとこれは t の連続函数である．

証明　任意の $t \in [0,1]$ に対し，$f_0(z,t)$ はある多重円板 $\Delta(\gamma(t); r(t))$ で収束する．（$r(t)$ は t について連続とは限らない．）$t \in [0,1]$ に対し，$\varepsilon > 0$ を充分小さくとれば，$U_t = \{s \in [0,1] \mid |s-t| < \varepsilon\}$ の任意の s について

$$\text{(i) } f(z,s) \text{ は } f(z,t) \text{ の直接接続,} \qquad \text{(ii) } \gamma(s) \in \Delta\left(\gamma(t); \frac{r(t)}{2}\right)$$

となる．

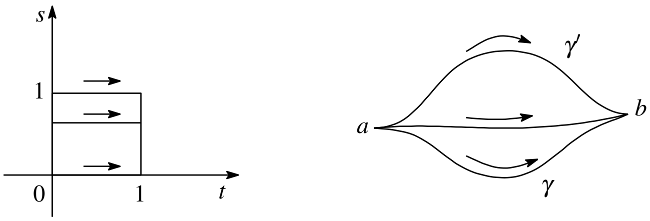


$\bigcup_{t\in[0,1]} U_t$ は $[0,1]$ の開被覆だから，有限個の $t_1, ..., t_k$ が存在して $U_{t_1}\cup\cdots\cup U_{t_k}=[0,1]$ となる．任意の $t\in[0,1]$ はある U_{t_i} に含まれ, (i), (ii) より $f(z,t)$ は少なくとも $\Delta(\gamma(t);r(t_i)/2)\subset\Delta(\gamma(t_i);r(t_i))$ で収束するので，$\min_{1\le i\le k} r(t_i)/2$ が求める r である． ■

定義 4.6. $a\in D\subset\mathbb{C}^n$ とし，f_a を a を中心とする冪級数とする．a を始点とする D 内の任意の曲線 γ に沿って f_a が解析接続可能であるとき，f_a は D において**無制限に解析接続可能**であるという．

定義 4.7. γ, γ' を a を始点，b を終点とする 2 つの曲線とする．次のような連続写像 $H:[0,1]\times[0,1]\to D$, $(t,s)\mapsto H(t,s)$ が存在するとき，γ と γ' は D で**ホモトピック**であるといい，$\gamma\sim\gamma'$ と書く．

(i) $H(t,0)=\gamma_0(t), H(t,1)=\gamma_1(t)$.
(ii) $H(0,s)=a, H(1,s)=b$.



命題 4.8. 始点および終点が共通であるような曲線 $\gamma, \gamma', \gamma''$ について

(0) $\gamma\sim\gamma$.
(1) $\gamma\sim\gamma'\Longrightarrow\gamma'\sim\gamma$.
(2) $\gamma\sim\gamma', \gamma'\sim\gamma''\Longrightarrow\gamma\sim\gamma''$.
(3) $\gamma\sim\gamma'\Longrightarrow\gamma^{-1}\sim\gamma'^{-1}$.

これらは明らかであろう．(0), (1), (2) により，与えられた始点および終点を持つ曲線全

体の同値類別が可能となる．γ の属する同値類を γ の定める**ホモトピー類**といい，$[\gamma]$ と書くことにする．

定理 4.9 (一価性定理). 領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ の 1 点 $a \in D$ を中心とする函数要素 f_a が与えられており，f_a は D 内で無制限に解析接続可能であるとする．

a と b を結ぶ 2 つの道 γ, γ' がホモトピックならば，それぞれの道に沿って f_a を解析接続して得られる b における函数要素 f_b, f_b' は等しい．すなわち，解析接続により得られる b における函数要素は γ のホモトピー類のみに依存する．

証明 $\gamma \sim \gamma'$ だから，定義 4.7 で述べた条件 (i), (ii) を満たす連続写像 $H : [0,1] \times [0,1] \to D$ がある．H の変数 s を固定すれば $H(\cdot, s)$ は a から b への道を与える．これを γ_s と書く．γ_s に沿った f_a の解析接続によって b に函数要素 f_{γ_s} が定まる．この f_{γ_s} が s によらず同一の冪級数となることを示せばよい．そのためには，任意の $s \in [0,1]$ に対し，s の小近傍では f_{γ_s} が s によらないことを示せば充分である．

曲線 γ_s に沿った解析接続を $f_{\gamma_s}(z,t)$ とすると，命題 4.5 によりある r が存在し，$f_{\gamma_s}(z,t)$, $0 \le t \le 1$ は少なくとも $\Delta(\gamma_s(t); r)$ で収束する．$H(t,s) = \gamma_s(t)$ の一様連続性より，ある $\delta > 0$ が存在し，$|s - s'| < \delta$ なる s' に対し $|\gamma_s(t) - \gamma_{s'}(t)| < \dfrac{r}{3}$, $0 \le t \le 1$ とでき

$$\gamma_{s'}(t) \in \Delta\left(\gamma_s(t); \frac{r}{3}\right).$$

上のような s' に対し，曲線 $\gamma_{s'}$ にそっての接続を $f_{\gamma_{s'}}(z,t)$ とすると，$f_{\gamma_{s'}}(z,t)$ は $f_{\gamma_s}(z,t)$ の直接接続となる．そのことを証明しよう．

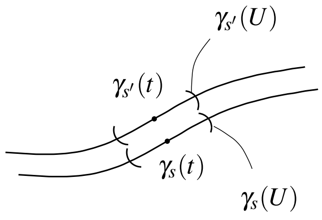
$$J = \{t \in [0,1] \mid \text{任意の } t' \le t \text{ に対し } f_{\gamma_{s'}}(z,t') \text{ は } f_{\gamma s}(z,t') \text{ の直接接続 } \}$$

とおく．

<u>J が開集合であること</u>．$t \in J$ とする．t の $[0,1]$ 内での近傍 U で次のようなものがある．

(i) $\gamma_{s'}(U) \subset \Delta\left(\gamma_s(t); \dfrac{r}{3}\right)$, $\gamma_s(U) \subset \Delta\left(\gamma_s(t); \dfrac{r}{3}\right)$.

(ii) 任意の $t' \in U$ に対して，$f_{\gamma_s}(z,t')$ は $f_{\gamma_s}(z,t)$ の直接解析接続であり，$f_{\gamma_{s'}}(z,t')$ は $f_{\gamma_{s'}}(z,t)$ の直接解析接続．



$t \in J$ だから $f_{\gamma_{s'}}(z,t)$ が $f_{\gamma_s}(z,t)$ の直接解析接続でもあることに注意しよう．すると，$\Delta(\gamma_s(t');r) \supset \Delta(\gamma_s(t);2r/3) \supset \Delta(\gamma_{s'}(t);r/3) \ni \gamma_{s'}(t')$ なので，$f_{\gamma_{s'}}(t')$ は $f_{\gamma_s}(t')$ の直接解析接続である．

J が閉集合であること．$t \in \overline{J}$ とする．t に充分近い $t' < t$ については

(i) $f_{\gamma_{s'}}(z,t')$ は $f_{\gamma_s}(z,t')$ の直接接続，
(ii) $f_{\gamma_s}(z,t)$ は $f_{\gamma_s}(z,t')$ の直接接続，$f_{\gamma_{s'}}(z,t)$ は $f_{\gamma_{s'}}(z,t')$ の直接接続

となる．よって，t' を t の充分近くにとることで $f_{\gamma_{s'}}(t)$ は $f_{\gamma_s}(t)$ の直接接続となり，$t \in J$.

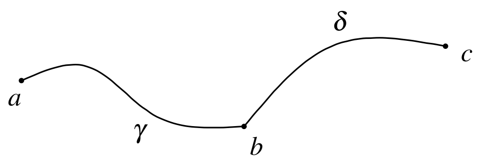
$0 \in J$ だから $J \neq \emptyset$ で，$[0,1]$ の連結性により $J = [0,1]$ とわかった．したがって特に $|s'-s| < \delta$ のとき $f_{\gamma_{s'}}(z,1)$ は $f_{\gamma_s}(z,1)$ の直接解析接続だから，これは b における同じ函数要素となる． ■

4.2　基本群

定義 4.10. γ を a を始点，b を終点とする曲線とし，δ を b を始点，c を終点とする曲線とする．そのとき，γ と δ をつないで得られる a を始点，c を終点とする曲線を $\delta\gamma$ で表す．つまり

$$\delta\gamma = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \le t \le \dfrac{1}{2}, \\ \delta(2t-1), & \dfrac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

である．



次は明らかである．

命題 4.11. $\gamma \sim \gamma'$, $\delta \sim \delta'$ ならば $\delta\gamma \sim \delta'\gamma'$ である．

したがってホモトピー類 $[\gamma], [\delta]$ に対し $[\delta\gamma]$ が矛盾なく定まる．

定義 4.12. $a \in D$ を固定する（**基点**と呼ぶ）．a を始点とする閉曲線 γ が **0 にホモトピック**であるとは，$\gamma \sim e_a$（e_a は恒等的に a に留まる曲線）となることをいう．このとき $[\gamma] = 1$ と書く．

閉曲線 γ を $S^1 \to D$ という写像とみなしたとき，γ が 0 にホモトピックであることは，$\gamma : S^1 \to D$ が連続写像 $\overline{B} \to D$（$\overline{B}$ は単位閉円板）に拡張されることと同値である．そのことから次がわかる．

定理 4.13. (1) a を始点，b を終点とする 2 つの曲線 γ, γ' について，$\gamma \sim \gamma' \iff \gamma'^{-1}\gamma \sim e_a$.

(2) a を始点かつ終点とする道 γ のホモトピー類 $[\gamma]$ の集合を $\pi_1(D,a)$ と書くと，$\pi_1(D,a)$ は積 $[\delta][\gamma] = [\delta\gamma]$ に関して群をなす．すなわち，

(i) $([\gamma][\gamma'])[\gamma''] = [\gamma]([\gamma'][\gamma''])$.

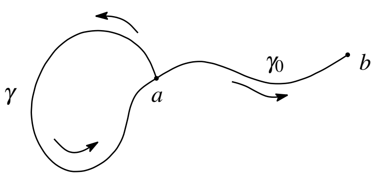
(ii) e_a の属するホモトピー類が単位元になる．

(iii) $[\gamma]$ に対し $[\gamma^{-1}]$ が逆元になる．

この $\pi_1(D,a)$ のことを，a を**基点**とする D の**基本群**という．D の 2 点 a, b に対し，a を始点，b を終点とする曲線 γ_0 を 1 つ固定しておくと，

$$\pi_1(D,a) \ni [\gamma] \mapsto [\gamma_0\gamma\gamma_0^{-1}] \in \pi_1(D,b)$$

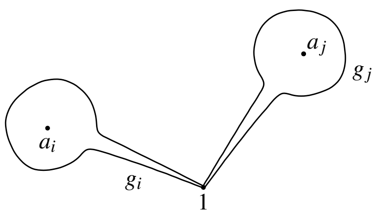
は群の同型を与え，したがって基本群は基点の取り方によらずにその同型類が定まる．



例 4.14. $\pi_1(\mathbb{C}) = \{1\}$.

$\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1) = \mathbb{Z}[\gamma]$. ただし γ は 1 を始点として原点のまわりを 1 周する閉曲線．

$\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, ..., a_n\}, 1) = ([g_1], ..., [g_n]$ で生成される自由群).



定義 4.15. 次の 3 条件は同値となるので，これらの条件の成り立つ D は**単連結**であるという．

(i) $a \in D$ について，$\pi_1(D,a) = \{1\}$.

(ii) D の任意の閉じた道は 1 点に連続的に縮められる.

(iii) D 内の 2 点 a, b を結ぶ任意の 2 つの道はホモトピック.

定理 4.16. 領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ の 1 点 $a \in D$ における函数要素 f_a が与えられており，f_a は D 内で無制限に解析接続可能であるとする.

(1) γ を a を始点とする 0 にホモトピックな閉曲線とすると，f_a を γ に沿って解析接続して得られる a における函数要素 f_γ は f_0 に等しい.

(ii) D が単連結ならば，任意の点 $z \in D$ に対し，f_a の点 z への解析接続はただ 1 つしかなく，したがって D 上一価の正則函数 f が f_a の解析接続により定まる.

証明　一価性定理（定理 4.9）からしたがう.　■

D が単連結でなければ，f_a を z まで解析接続するとき，曲線 γ のホモトピー類 $[\gamma]$ によって得られる z における函数要素 $f_{[\gamma]}$ は異なる可能性がある．したがって，f_a を D 内で解析接続してできる“函数”f は一般には多価である．それぞれの函数要素を，f の**分枝**と呼ぶ．このとき，f の z における分枝は高々可算個しかなく，したがって f は高々可算多価の函数となる．それは次の事実による（証明は省略する）.

定理 4.17. (1) 基本群 $\pi_1(D,a)$ は高々可算個の元よりなる.

(2) D の 2 点 a, b を結ぶ道のホモトピー類は可算無限しかない.

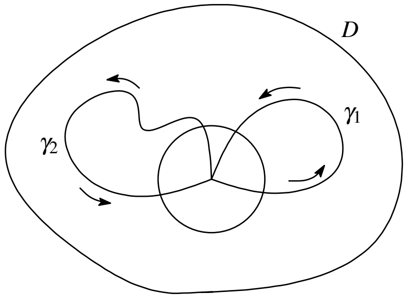
点 $a \in D$ における f の分枝の集合を A とする．$[\gamma] \in \pi_1(D,a)$ に対し A から A への 1 対 1 かつ上への変換 $\rho_{[\gamma]}$ を

$$\rho_{[\gamma]} : A \ni f_j \mapsto (f_j \text{ を } \gamma \text{ に沿って解析接続して得られる分枝}) \in A \tag{4.2}$$

で定義する．この $\rho_{[\gamma]}$ のことを $[\gamma]$ に対応する**モノドロミー変換**と呼ぶ.

$$\rho : \pi_1(D,a) \to \mathfrak{S}(A) \quad (A \text{ の置換群}), \quad [\gamma] \mapsto \rho_{[\gamma]} \tag{4.3}$$

は群の準同型であり，基本群 $\pi_1(D,a)$ の表現（置換表現）とみることができる．これを**モノドロミー表現**という．この ρ が求まれば，f の多価性がわかったと言える.



例 4.18. $z^{1/m}$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上の m 価函数．基点を $a=1$ とし，そこにおける分枝のひとつを $\sqrt[m]{z}$ で表すと，$A=\{e^{k(2\pi/m)i}\sqrt[m]{z}\mid 0\le k<m\}$ である．γ を 1 を出発して原点のまわりを 1 回転する閉曲線とすれば $\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\},1)=\mathbb{Z}[\gamma]$ で，

$$\rho_{[\gamma]}: e^{k(2\pi/m)i}\sqrt[m]{z}\mapsto e^{(k+1)(2\pi/m)i}\sqrt[m]{z}.$$

よって $\rho(\mathbb{Z}[\gamma])\cong\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ である．

問　$D\subset\mathbb{C}^n$ を単連結な領域とし，f は D 上正則かつ任意の $z\in D$ について $f(z)\neq 0$ であるとする．そのとき，D 上正則なある g が存在して $f(z)=e^{g(z)}$ である．このことを示せ．

定理 4.19 (Cauchy)**.** 単連結領域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 上の正則函数 $g_1,...,g_n$ があり，$\partial g_k/\partial z_j=\partial g_j/\partial z_k$ であるとする．そのとき，D 上正則なある f が存在して，$g_j=\partial f/\partial z_j$ と書ける．言い換えれば，正則函数 $g_1,...,g_n$ によって $\omega=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}g_j(z)dz_j$ と表される 1 形式（**正則 1 形式**）について，$\partial\omega=0$ ならばある D 上の正則函数 f により $\omega=\partial f$ と表される．

補題 4.20. 多重円板 $\Delta\subset\mathbb{C}^n$ 上の正則函数 $g_1,...,g_n$ があり，$\partial g_k/\partial z_j=\partial g_j/\partial z_k$ であるとする．そのとき，Δ 上正則なある f が存在して，$g_j=\partial f/\partial z_j$ と書ける．

証明　n に関する帰納法を用いる．$n=1$ のときはよく知られている．$n-1$ の場合に補題が成立するとする．そのとき，g_n を

$$g_n(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(z_1,...,z_{n-1})z_n^{\nu}$$

と表して（**Hartogs 級数**），

$$f_n(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu+1}c_\nu(z_1,...,z_{n-1})z_n^{\nu+1}$$

とする．右辺は広義一様収束するから，f_n は Δ 上正則で，$\partial f_n/\partial z_n=g_n$ である．$h_j=g_j-\partial f_n/\partial z_j$ とおく．$h_n\equiv 0$ である．また，$\partial h_k/\partial z_j=\partial h_j/\partial z_k$ であって，さらに

$$\frac{\partial h_j}{\partial z_n}=\frac{\partial g_j}{\partial z_n}-\frac{\partial^2 f_n}{\partial z_n\partial z_j}=\frac{\partial g_j}{\partial z_n}-\frac{\partial g_n}{\partial z_j}=0$$

だから $h_1,...,h_{n-1}$ は z_n によらない．帰納法の仮定によりある f_0 が存在して $\partial f_0/\partial z_j=h_j$ と表せる．$f=f_n+f_0$ とおけばよい．■

定理 4.19 の証明のために，被覆空間の定義とその性質のひとつを述べておく．

定義 4.21 (被覆空間)**.** X,X' を Hausdorff 空間，$\pi:X'\to X$ を連続写像とする．そのとき，(X',π,X) が**被覆空間**であるとは，任意の $x\in X$ に対しその開近傍 U で次の条件を満たすものが存在することをいう．

(i) $\pi^{-1}(U)$ は X' の共通部分を持たない開集合の和集合 $\bigcup U'_j$ の形に表され,

(ii) π の各 U'_j への制限 $\pi|_{U'_j} : U'_j \to U$ が同相写像となる.

またこのとき π を**被覆写像**という.

補題 4.22. (X', π, X) を被覆空間とし，$a \in X$, $a' \in X'$ を $\pi(a') = a$ であるような点とする．そのとき，a を始点とする D 内の任意の曲線 γ に対し，a' を始点とする γ の**リフト**が存在する．すなわち，a' を始点とする X' 内の曲線 γ' であって $\pi \circ \gamma' = \gamma$ であるものが存在する.

このことから特に，被覆空間 (X', π, X) において X が弧状連結であれば，被覆写像 π は全射であることがわかる.

定理 4.19 の証明 D 上の正則函数の芽のなす層 $\mathcal{O}$ を考える．射影 $p : \mathcal{O} \to D$, $f_a \mapsto a$ を用いて，直積 $\underbrace{\mathcal{O} \times \cdots \times \mathcal{O}}_{n\text{ 個}}$ の部分空間 $\mathcal{O}^n$ を

$$\mathcal{O}^n = \{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \mid \varphi_j \in \mathcal{O},\, p(\varphi_1) = \cdots = p(\varphi_n)\}$$

と定義する．射影 $\pi : \mathcal{O}^n \to D$ が自然に定義される.

$$X_0 = \left\{ (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{O}^n \;\middle|\; \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_j} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_k} \right\}$$

とおき，$\pi|_{X_0} : X_0 \to D$ を π_0 と書くことにする．$\psi : D \to X_0$, $z \mapsto ((g_1)_z, \ldots, (g_n)_z)$ は $\mathcal{O}$ の位相の定義により連続であり，$\pi_0 \circ \psi = \mathrm{id}_D$ である．そこで $X = \psi(D)$ とおくと，$\pi_0|_X : X \to D$ は同相写像となる.

$$\eta : \mathcal{O} \to X_0, \quad f_a \mapsto \left(\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial z_n} \right)_a \right)$$

とする．η は補題 4.20 により被覆写像である.

X' を $\eta^{-1}(X)$ の連結成分の 1 つとする．すると補題 4.22 により $\eta|_{X'} : X' \to X$ もまた被覆写像で，したがって $\pi_0|_X \circ \eta|_{X'} : X' \to D$ も被覆写像である．D は単連結なので，再び補題 4.22 を用いて一価性定理（定理 4.9）と同様の議論をすることにより，$\pi_0|_X \circ \eta|_{X'}$ は単射でもあって，ゆえに（全単射かつ局所同相だから）同相写像であるとわかる．X' の元は正則函数の芽だから，それをこの同相で D の点に移せば，D 上の正則函数 f が定まる．この f が求めるものである. ■

第 5 講

5月18日

5.1　基本群についての補足

連続写像 $f: D_1 \to D_2$ が与えられているとする．$f(a_1) = a_2$ とする．このとき基本群のあいだの準同型 $f_*: \pi_1(D_1, a_1) \to \pi_1(D_2, a_2)$ が $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$ により定まる．f が同相ならば（したがって解析的同型ならば充分），f_* は群の同型となる．特に，単連結な領域に同相な領域は単連結となる．

$\mathbb{C}^n$ の領域 D_1, D_2 のあいだの正則写像 $g: D_1 \to D_2$ があるとする．D_1 が単連結ならば，D_2 上の多価函数 f に対し $f \circ g$ をつくれば，一価性定理（定理 4.9）により $f \circ g$ はいくつかの一価函数に分かれる．その各々を**分枝**という．

例 5.1. $z^{1/2}$ は $D_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ で 2 価である．$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}$ とし，包含写像 $D_1 \hookrightarrow D_2$ によって $z^{1/2}$ を D_1 に引き戻すと，それは 2 つの一価函数に分かれる．その一方を $\sqrt{z}$ と表せば，他方は $-\sqrt{z}$ である．

5.2　正規族

X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし，Y を距離空間とする．2 点 $x, y \in Y$ の距離を $d(x, y)$ と書く．

$C(X, Y)$ を X から Y への連続写像全体の集合とし，Y^X を X から Y への写像全体の集合とする．Y^X は各点収束の位相（**点別位相**）により位相空間となる．$C(X, Y)$ を Y^X の部分空間とみる．

定義 5.2 (コンパクト開位相)**.** コンパクト集合 $K \subset X$, 開集合 $U \subset Y$ に対して

$$\mathcal{U}(K, U) = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset U\} \tag{5.1}$$

とおく．有限個のコンパクト集合 K_1, ..., $K_l \subset X$ と開集合 U_1, ..., $U_l \subset Y$ によって $\mathcal{U}(K_1,U_1)\cap\cdots\cap\mathcal{U}(K_l,U_l)$ の形に表される集合たちを基本近傍系とする位相を，**コンパクト開位相**という．

定義 5.3 (コンパクト一様位相)**.** $g \in C(X,Y)$, $\varepsilon > 0$ に対して

$$\mathcal{U}(g,K,\varepsilon) = \left\{ f \in C(X,Y) \;\middle|\; \sup_{x\in K} d(g(x),f(x)) < \varepsilon \right\} \tag{5.2}$$

とおく．この形の集合たちを g の基本近傍系とする位相を，**コンパクト一様位相**という．

両者の位相は一致することが知られている．そして，この位相は点別位相よりも強い．

命題 5.4. コンパクト開位相は，$\varphi : C(X,Y)\times X \to Y$, $(f,x)\mapsto f(x)$ を連続にするような，$C(X,Y)$ に入る最弱の位相である．

証明 X が局所コンパクト Hausdorff 空間であることから $\varphi : C(X,Y)\times X \to Y$, $(f,x)\mapsto f(x)$ が連続であることはすぐにわかる．逆に，これを連続にする $C(X,Y)$ の位相 $\mathcal{O}$ が与えられたとしよう．任意の開集合 $U \subset Y$, コンパクト集合 $K \subset X$ に対して，$\mathcal{U} = \mathcal{U}(K,U)$ が $\mathcal{O}$ の開集合であることを示せばよい．$f \in \mathcal{U}$ とすれば $\{f\}\times K \subset \varphi^{-1}(U)$ なので，$C(X,Y)$ における f のある近傍 V が存在して，$V\times K \subset \varphi^{-1}(U)$ である．すなわち，$V \subset \mathcal{U}$ となっている． ■

コンパクト一様位相について次のことが知られている．

定理 5.5 (**Ascoli–Arzelà の定理**)**.** X を局所 Hausdorff 空間，Y を距離空間とし，$C(X,Y)$ にはコンパクト一様位相が導入されているものとする．$F \subset C(X,Y)$ について，$\overline{F}$ がコンパクトであるための必要充分条件は

(i) 任意の $x \in X$ に対し，$F(x) = \{f(x) \mid f \in F\} \subset Y$ の閉包がコンパクト，
(ii) 任意の $x \in X$ で F は同程度連続

であることである．ここで，F が点 x で**同程度連続**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し x の近傍 $U \subset X$ が存在して，任意の $f \in F$ に対し，$f(U)$ が $f(x)$ の ε 近傍に含まれることをいう．

定義 5.6. 局所コンパクト Hausdorff 空間 X, 距離空間 Y に対し，$F \subset C(X,Y)$ のコンパクト一様位相に関する閉包 $\overline{F}$ がコンパクトになるとき，F は**正規族**であるという．

X が σ コンパクトであれば $C(X,Y)$ は距離付け可能である．したがってその場合，F が正規族であることは，F に属する任意の函数の列 f_1, f_2 ... に対し，部分列 f_{ν_1}, f_{ν_2}, ... を X

上広義一様収束するように抜き出してくることが可能であることと同値である．

定理 5.7 (Montel の定理). 領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上の正則函数の族 F が D の任意のコンパクト集合 K 上**一様有界**であるとする．すなわち，任意の K に対し，ある $M > 0$ が存在し，任意の $f \in F$ について $\sup_{x \in K} |f(x)| < M$ であるとする．そのとき，$F \subset C(D, \mathbb{C})$ は正規族である．

証明 Ascoli–Arzelà の定理（定理 5.5）の条件 (i), (ii) を示せばよい．(i) は F が一様有界であるから自明である．(ii) を示す．$a \in D$ を任意の点とし，$\overline{\Delta}(a; 2r) \subset D$ となる r をとる．仮定から，ある $M > 0$ が存在して任意の $z \in \overline{\Delta}(a; 2r)$, $f \in F$ に対して $|f(z)| \leq M$ となる．Cauchy の評価式（系 1.4）により，任意の $z \in \Delta(a; r)$, $f \in F$ に対して

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) \right| \leq \frac{M}{r_j}$$

である．したがって

$$\begin{aligned} |f(z) - f(a)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} f(a + t(z-a)) dt \right| = \left| \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(a + t(z-a))(z_j - a_j) dt \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \frac{M}{r_j} \cdot r_j = nM \end{aligned}$$

なので，F は同程度連続である．■

応用例をひとつ挙げよう．

定理 5.8 (H. Cartan)**.** $D \subset \mathbb{C}^n$ を有界領域とし，$0 \in D$, $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n) \in \mathrm{Aut}(D)$, $\varphi(0) = 0$ とする．もし

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}(0) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z_n}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial z_1}(0) & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial z_n}(0) \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

が単位行列ならば，$\varphi = \mathrm{id}_D$ である．

証明 $\varphi \neq \mathrm{id}_D$ であるとしよう．そのとき，$\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ を 0 の近傍で冪級数展開したものは，ある j について

$$\varphi_j(z) = z_j + p_j^{(l)}(z) + p_j^{(l+1)}(z) + \cdots, \qquad p_j^{(l)}(z) \not\equiv 0$$

の形になる．ただし $p_j^{(k)}(z)$ は z について k 次の斉次多項式であって，$l \geq 2$ である．すると，$\varphi^m = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{m\text{ 個}} : D \to D$ を考えれば，

$$(\varphi^m)_j = z_j + m p_j^{(l)}(z) + \cdots$$

となる．$\{(\varphi^m)_j\}_{m=1,2,\dots}$ は明らかに一様有界だから Montel の定理（定理 5.7）により正規族なので，そのある部分列は D 上広義一様収束する．したがって Weierstraßの二重級数定理（定理 1.6）によって冪級数展開の係数も収束しなければならないから，$p_j^{(l)}(z) \equiv 0$ でなければならないが，これは $p_j^{(l)}(z)$ の定め方に反する． ■

5.3　Riemann の写像定理

定理 5.9 (Riemann の写像定理). $D \subset \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ でない単連結領域，$\Delta = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$ を単位円板とする．そのとき，任意の $z_0 \in D$ に対し，ある正則写像 $f : D \to \Delta$ で次の条件を満たすものがただ一つ存在する．

(i) $f : D \to \Delta$ は等角同型.

(ii) $f(z_0) = 0,\ f'(z_0) > 0$.

注意 逆に，領域 D に対しこのような f が存在するとする．そのとき特に f は同相写像だから，5.1 節で述べたように D は単連結である．また，Liouville の定理（系 1.5）から，$D \neq \mathbb{C}$ でなければならない．

証明を始める前に，その方針を述べておく．

Step 1. 正則写像 $g : D \to \Delta$ であって D を Δ の部分領域に等角同型に写像し（すなわち単葉かつ $|g(z)| < 1$ で），かつ $g(z_0) = 0,\ g'(z_0) > 0$ となるものが少なくとも 1 つはあることを示す．

Step 2.

$$\mathcal{F} = \{g : D \to U \mid \text{正則，単葉，} |g(z)| < 1\ (\forall z \in D),\ g(z_0) = 0,\ g'(z_0) > 0\} \tag{5.4}$$

とおくと，これは Step 1 により空集合ではない．もし定理にいうような f が存在するとすれば，任意の $g \in \mathcal{F}$ に対し $\varphi = g \circ f^{-1} : \Delta \to \Delta,\ \varphi(0) = 0$ を考えると，Schwarz の補題により $|\varphi'(0)| \leq 1$ かつ

$$|\varphi'(0)| = 1 \iff |c| = 1 \text{ なる } c \text{ が存在して } \varphi(w) = cw \tag{5.5}$$

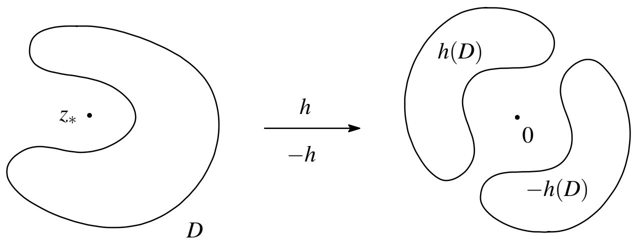
となる．このとき $c = \varphi'(0)$ である．

$$\varphi'(w) = \frac{g'(f^{-1}(w))}{f'(f^{-1}(w))} \quad \text{なので} \quad \varphi'(0) = \frac{g'(z_0)}{f'(z_0)}. \tag{5.6}$$

したがって $g'(z_0) \leq f'(z_0)$ であり，等号が成立するのは $g(z) = f(z)$ のときとわかる．よって，$s = \sup_{g \in \mathcal{F}} g'(z_0)$ とおくと，もし定理にいう f が存在するなら $f \in \mathcal{F}$ が $f'(z_0) = s$ を満たさなければならない．またこのことから，定理にいう f の唯一性がわかる．実際に $f'(z_0) = s$ を満たす f が $\mathcal{F}$ の中に存在することを，正規族の概念を用いて示す．

Step 3. Step 2 で存在を示す f について，$f(D)=\Delta$ であることを示す．すると，f はもともと単葉だったから，等角同型 $D\cong\Delta$ を与えることとなる．

証明 Step 1. $D\subsetneq\mathbb{C}$ だから $z_*\in\mathbb{C}\setminus D$ が存在する．$(z-z_*)^{1/2}$ は $\mathbb{C}\setminus\{z_*\}$ で 2 価の解析函数であるが，これは単連結領域 $D\subset\mathbb{C}\setminus\{z_*\}$ に定義域を制限すれば 2 つの一価函数 $h(z)$ と $-h(z)$ に分かれる．$h(z)^2=z-z_*$ だから $h(z)$ は単葉である（$h(z_1)=h(z_2)$ とすれば $h(z_1)^2=h(z_2)^2$ すなわち $z_1-z_*=z_2-z_*$）．また，$h(D)\cap -h(D)=\emptyset$ である．なぜなら，もし $h(z_1)=-h(z_2)$ であるとすれば，$h(z_1)^2=h(z_2)^2$ より $z_1=z_2$ なので $h(z_1)=-h(z_1)$, よって $h(z_1)=0$ だから $z_1=z_*\notin D$ となり矛盾だからである．



$z_0\in D$ の $-h$ による像を考える．$-h(D)$ は $-h(z_0)$ を中心としたある半径 ε の閉円板を含む．この閉円板は $h(D)$ とは交わらない．すなわち，$h(D)+h(z_0)$ は原点を中心とする半径 ε の閉円板と交わらない．つまり

$$|h(z)+h(z_0)|>\varepsilon,\qquad \forall z\in D.$$

そこで

$$g(z)=\frac{\varepsilon}{h(z)+h(z_0)}$$

とおくと，$g:D\to\Delta$ は単葉となる（$g(z_1)=g(z_2)$ とすると $h(z_1)=h(z_2)$, したがって $z_1=z_2$）．$\varphi:\Delta\to\Delta$ を

$$\varphi(w)=e^{i\theta}\frac{w-g(z_0)}{1-\overline{g(z_0)}w}$$

と定義する．これを用いて $\varphi\circ g:D\to\Delta$ とすれば単葉であり，$(\varphi\circ g)(z_0)=0$ である．また

$$(\varphi\circ g)'(z)=e^{i\theta}\frac{1-|g(z_0)|^2}{(1-\overline{g(z_0)}g(z))^2}\cdot g'(z)$$

なので

$$(\varphi\circ g)'(z_0)=e^{i\theta}\frac{g'(z_0)}{1-|g(z_0)|^2}\neq 0$$

だから，θ を適当に選んで $(\varphi\circ g)'(z_0)>0$ とできる．そのような θ について $\varphi\circ g\in\mathcal{F}$ である．

Step 2. $g \in \mathcal{F}$ に対し $g'(z_0) > 0$ は上に有界であることを示す．$\Delta(z_0;\rho) \subset D$ とする．$g(z_0+\rho z)$ は Δ から Δ への写像で，0 を 0 に移す．よって Schwarz の補題により

$$\left| \frac{d}{dz} f(z_0+\rho z)\bigg|_{z=0} \right| \le 1.$$

左辺は $\rho f'(z_0)$ なので，$|f'(z_0)| \le 1/\rho$ とわかった．

$s = \sup_{f\in\mathcal{F}} f'(z_0)$ とおく．$\mathcal{F}$ の函数列 $f_1, f_2, f_3, \ldots$ で $\lim_{n\to\infty} f_n'(z_0) = s$ となるものがとれる．$\{f_n\}$ は一様有界な函数列だから Montel の定理（定理 5.7）により正規族となり，そのある部分列 $\{f_{n_\nu}\}$ は D 上広義一様収束する．極限函数を f とおく．Weierstraßの二重級数定理（定理 1.6）より，$\{f'_{n_\nu}\}$ は f' に広義一様収束する．$f'(z_0) = s > 0$ である．したがって f は定数ではない．

$f_{n_\nu}(D) \subset \Delta$ より $|f_{n_\nu}(z)| < 1$ だから $|f(z)| \le 1$. もし内点 $z \in D$ で $|f(z)| = 1$ となったら最大値原理（命題 1.13）により $f(z)$ は定数となってしまっておかしいので，$|f(z)| < 1$.

この f が単葉であることがいえれば，$f \in \mathcal{F}$ となる．f の単葉性は次の補題によりわかる．

補題 5.10 (Hurwitz の定理). 領域 $D \subset \mathbb{C}$ における正則函数列 $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$ が定数でない函数 f に広義一様に収束しているとする．

(1) D 内の区分的に C^1 級の Jordan 閉曲線 γ が 0 にホモトピックならば，γ で囲まれる領域 D_1 での f の a 点の重複度をこめた個数*（γ 上には f の a 点はないものとする）は，充分大きな n について，$f_n(z)$ の D_1 における a 点の個数に等しい．

(2) 特に，$\{f_n\}$ が単葉函数列ならば，f も単葉函数となる．

補題 5.10 の証明 (1) $a = 0$ としてよい．$\inf_{z\in\gamma} |f(z)| > 0$ である．すると充分大きな n に対し

---

*$D_1 \subset D$ である．このことを示そう．一般に，$\mathbb{C}$ 内の区分的に C^1 級の閉曲線 γ とその上にない点 $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\gamma$ に対し，

$$n(\gamma,\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-\zeta}$$

は整数値をとる（たとえば L. Ahlfors, *Complex Analysis,* 3rd ed., McGraw–Hill の Chapter 4, §2, Lemma 1）．この値は閉曲線 γ の ζ に関する**回転数**と呼ばれる．$n(\gamma,\zeta)$ は ζ について連続なので，$\mathbb{C}\setminus\gamma$ の連結成分ごとに一定の値をとることになる．γ が Jordan 閉曲線である場合には，ζ が γ に囲まれる領域 D の点ならば Cauchy の積分定理により $n(\gamma,\zeta) = 1$ であり，ζ がもう一方の（非有界な）領域の点であればその領域内で ζ を連続的に動かして $|\zeta| \to \infty$ とできることから $n(\gamma,\zeta) = 0$ である．

さて元の状況に戻り，ζ を $\mathbb{C}\setminus D$ の任意の点とする．定義 4.12 のホモトピー $\gamma \sim e_a$ を与える連続写像を $H(t,s)$ とし，$\gamma_s(t) = H(t,s)$ とおく（$\gamma_0 = \gamma$ である）．$0 < s < 1$ に対しても γ_s が C^1 級であるように $H(t,s)$ をとることができる（証明略）．そのとき，$n(\gamma_1,\zeta) = 0$ であり $n(\gamma_s,\zeta)$ は s について連続だから $n(\gamma,\zeta) = 0$ である．したがって，上に述べたことから，$\zeta \notin D_1$ とわかる．ゆえに $D_1 \subset D$ である．

なお，(2) を示すだけであれば，この脚注でしたような議論をする必要はない．証明を見ればわかるように，γ が D に含まれる円板の境界である場合についてだけ (1) を示せば，(2) は証明できる．

て $\inf_{z\in\gamma}|f(z)| > \sup_{z\in\gamma}|f_n(z)-f(z)|$ であり，特に任意の $z\in\gamma$ に対し

$$|f(z)| > |f_n(z)-f(z)| \tag{5.7}$$

このことから，$f(z)$ と $f_n(z)$ の D_1 における零点の個数が等しいことがしたがう．それを示すために，$g_t(z)=f(z)+t(f_n(z)-f(z))$ とおこう．$g_0(z)=f(z), g_1(z)=f_n(z)$ である．式 (5.7) から $g_t(z)$ は γ 上に零点を持たないので，D_1 における g_t の零点の個数は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dg_t}{g_t}$$

である．これは t について連続で，したがって $t=0$ と $t=1$ のときの値は等しい*.

(2) もし異なる 2 点 $z_1, z_2\in D$ について $f(z_1)=f(z_2)=a$ となったら，z_1, z_2 を中心とする互いに交わらない開円板 D_1, D_2 をとれば，(1) により充分大きな n に対し f_n は D_1, D_2 内でそれぞれ少なくとも 1 つずつ a 点を持つことになり，f_n は単葉でなくなる．■

定理 5.9 の証明の続き Step 3. $f(D)=\Delta$ を示す．もし $f(D)\subsetneq\Delta$ であるとすると，$w_0\in\Delta\setminus f(D)$ がとれる．

$$g : D\to\Delta\setminus\{0\}, \qquad g(z)=\frac{f(z)-w_0}{1-\overline{w}_0 f(z)}$$

は単葉な函数である．ここで $g(z)^{1/2}$ は D 上一価な 2 つの函数 $h(z)$ と $-h(z)$ に分かれる．$h(z)$ も単葉である．

$$\tilde{f}(z)=e^{i\theta}\frac{h(z)-h(z_0)}{1-\overline{h(z_0)}h(z)}$$

とすればこれも D から Δ への一価単葉な函数で，$z_0\in D$ を $0\in\Delta$ にうつす．$e^{i\theta}$ は $\tilde{f}'(z_0)>0$ となるようにとっておく．$\tilde{f}\in\mathcal{F}$ であり，

$$\tilde{f}'(z)=e^{i\theta}\frac{1-|h(z_0)|^2}{(1-\overline{h(z_0)}h(z))^2}h'(z)$$

だから

$$\tilde{f}'(z_0)=e^{i\theta}\frac{h'(z_0)}{1-|h(z_0)|^2}.$$

一方，

$$2h(z)h'(z)=\frac{(1-|w_0|^2)f'(z)}{(1-\overline{w_0}f(z))^2}$$

より $2h(z_0)h'(z_0)=(1-|w_0|^2)f'(z_0)=(1-|h(z_0)|^4)f'(z_0)$. よって

$$\tilde{f}'(z_0)=e^{i\theta}\frac{1+|h(z_0)|^2}{2h(z_0)}f'(z_0)>f'(z_0)$$

*γ 上で (5.7) を満たす f と f_n があるとき，それらが D_1 において持つ零点の重複度をこめた個数が等しいという事実は，**Rouché の定理**と呼ばれる．

となる（最後の不等号は $|h(z_0)| < 1$ だから）．これは f のとり方に矛盾する．

唯一性．証明の方針の中で述べたように，f, g の 2 つがあったとして $g \circ f^{-1}$ に Schwarz の補題を適用すればよい．■

なお，この証明の中で，D の単連結性は次のことを示すことにのみ用いられた．

「D 上の正則函数 f が零点を持たないなら，$f(z)^{1/2}$ は D 上一価正則な 2 つの函数に分かれる．」 (5.8)

したがって，D がこの条件さえ満たしていれば Riemann の写像定理は成り立ち，結果的に D は単連結となる．次のことが知られている．

定理 5.11. $D \subset \mathbb{C}$ を領域とする．これを Riemann 球面 $\mathbb{P}$ の部分領域とみたとき，$\mathbb{P} \setminus D$ が連結であると仮定する（このことを，D は**穴のない領域**であるという）．そのとき，条件 (5.8) が成り立ち，したがって D に対し Riemann の写像定理が成り立つ．特に D は単連結である．

5.4 Vitali の定理

定理 5.12 (Vitali の定理). $D \subset \mathbb{C}^n$ を領域とする．部分集合 $A \subset D$ が次の性質を持つとする．

D 上の正則函数 f であって A 上で恒等的に 0 であるものは，D 上恒等的に 0 である函数に限られる．

そのとき，D 上一様有界な正則函数の列 $\{f_\nu\}$ で A 上各点収束するものは，必ず D で広義一様収束する．

$n = 1$ の場合は，A が定理に述べられた条件を満たすためには D 内に集積点を持てば充分である．一般の次元では，定理 1.9 でみたように，A が D の開集合であればよい．

証明 $\{f_\nu\}$ が D で広義一様収束しないとする．そのとき，あるコンパクト集合 $K \subset D$ とある $\delta > 0$, および $\{f_\nu\}$ のある部分列 $\{f_{\nu_k}\}, \{f_{\mu_k}\}$ が存在して，任意の k について点 $z_k \in K$ であって $|f_{\nu_k}(z_k) - f_{\mu_k}(z_k)| \geq \delta$ であるようなものが存在する．Montel の定理（定理 5.7）により $\{f_{\nu_k}\}, \{f_{\mu_k}\}$ から広義一様収束する部分列がとれるから，

$$f_{\nu_k} \to f, \qquad f_{\mu_k} \to g$$

としてよい．$\{z_k\}$ は K の点列であり K はコンパクトだから，$\{z_k\}$ の集積点 $z_0 \in K$ が存在する．$|f(z_0) - g(z_0)| \geq \delta$ である．しかしながら f, g は D 上正則で A 上では f, g は一

致しており，A についての仮定から D 上 $f=g$ である．これは矛盾． ■

命題 5.13. 1 変数の収束冪級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ があり，その収束半径は 1 であるとする．$f_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ とおく．そのとき，$\{|z|=1\}$ の上のすべての点は $\bigcup_k \{z \mid f_n(z)=0\}$ の集積点である．

証明 $\{|z|=1\}$ 上に f_n の零点の集積点でないような点 ζ があったとする．ζ を中心とする開円板 U を充分小さくとり，充分大きな n については U 上で $f_n(z)\neq 0$ であるようにする．U と $\{|z|<1\}$ との交わりを U_0 とおけば，U_0 で広義一様に $f_n \to f$ である．よって Hurwitz の定理（補題 5.10）から U_0 上 $f(z)\neq 0$ である．

$\varphi_n(z)=\sqrt[n]{f_n(z)}$ とおく．適当な分枝を決めておけばこれは U 上で一価正則である．このとき，あとで示すように，実は

(1) $\{\varphi_n\}$ は一様有界であり，
(2) $z\in U_0$ に対しては $\varphi_n(z)\to 1$ である．

これらのことを認めれば，Vitali の定理（定理 5.12）から $\varphi_n(z)$ は U 上で広義一様に定数函数 1 に収束することがわかる．したがって $|z_0|>1$ なる U の点を任意にとると，任意の $\varepsilon>0$ について，充分大きな n に対して $|\varphi_n(z_0)|<1+\varepsilon$ となる．これはすなわち $|f_n(z_0)|<(1+\varepsilon)^n$ ということだから，

$$|a_n z_0^n| = |f_n(z_0)-f_{n-1}(z_0)| \leq (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon)^{n-1} \leq 2(1+\varepsilon)^n.$$

したがって $|a_n| \leq 2(1+\varepsilon)^n/|z_0|^n$ で，$|a_n|^{1/n} \leq 2^{1/n}(1+\varepsilon)/|z_0|$ なので

$$\varlimsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \leq \frac{1+\varepsilon}{|z_0|}.$$

$|z_0|>1$ で ε は任意だから $\varlimsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}<1$ となるが，これは収束半径が 1 であることに矛盾する．

それでは (1), (2) を証明しよう．

(1) $\varlimsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}=1$ なので $|a_n|^{1/n}$ は有界である．つまり，$K>1$ が存在して $|a_n|<K^{n+1}$ とできる．R を $U\subset \Delta(0;R)$ となるようにとると

$$|f_n(z)| = |a_0+a_1 z+\cdots+a_n z^n| \leq K+K^2R+\cdots+K^{n+1}R^n \leq (n+1)K^{n+1}R^n$$

なので，$|\varphi_n(z)| \leq (n+1)^{1/n}K^{1+1/n}R$ である．

(2) は $z\in U_0$ に対し $\sqrt[n]{f(z)}\to 1$ および $f_n(z)/f(z)\to 1$ であることより明らか． ■

第 6 講

5 月 27 日

6.1　境界の対応

定理 6.1. $\mathbb{C}$ 内の Jordan 閉曲線 γ で囲まれた領域 D は単連結である．

証明 Jordan の曲線定理によって，$\mathbb{C}\setminus\gamma$ は 2 つの連結成分を持つ．それらのうち有界なほうの連結成分のことを γ で囲まれた領域というのだった（p. 2 の脚注参照）．非有界なほうの連結成分を D' とすれば，$\mathbb{P}\setminus D = \gamma\cup D'\cup\{\infty\}$ である．これは D' の $\mathbb{P}$ における閉包に等しいから連結で，したがって定理 5.11 により D は単連結である．■

今日は次の定理を扱う．

定理 6.2 (Carathéodory の境界対応定理). D_1, D_2 をそれぞれ $\mathbb{C}$ 内の Jordan 閉曲線で囲まれた有界領域とし，$f: D_1 \to D_2$ を等角同型とする．すると f は閉包 $\overline{D}_1$ から閉包 $\overline{D}_2$ への連続写像 $\overline{f}: \overline{D}_1 \to \overline{D}_2$ に拡張され，これは同相写像になる．したがってまた $\overline{f}$ は ∂D_1 と ∂D_2 の同相を与える．

簡単のため，γ が区分的に C^1 級であることを仮定して，証明を与えることにする．

6.2　準備

定理 6.3. $f(z)$ は Jordan 閉曲線 γ で囲まれた領域 $D\subset\mathbb{C}$ で正則かつ有界な函数とする．$\zeta_0\in\partial D$ に対し，f が $\overline{D}\setminus\{\zeta_0\}$ まで連続に拡張し，かつ $|f(\zeta)|\le M$ $(\zeta\in\partial D\setminus\{\zeta_0\})$ ならば，$|f(z)|\le M$ $(z\in D)$ である．

証明 D は有界だから充分大きな R に対し $D\subset\Delta(\zeta_0;R)$. よって $g(z)=(z-\zeta_0)/R$ は D で正則かつ $0<|g(z)|<1$. D は単連結なので $g(z)^{1/m}$ $(m\in\mathbb{N})$ は D 上一価の分枝を持つ．そ

の 1 つを選んで $g_m(z)$ とする．

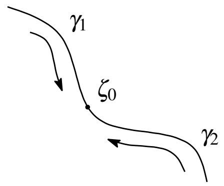
$f_m(z) = g_m(z)f(z)$ とおくと，これは D 上正則かつ $\overline{D}\setminus\{\zeta_0\}$ で有界，さらに $z \in \overline{D}\setminus\{\zeta_0\}$ が ζ_0 に近づくとき $g_m(z) \to 0$, $f(z)$ は有界だから $f_m(z) \to 0$ となる．そこで，$f_m(\zeta_0) = 0$ と定義すれば f_m は $\overline{D}$ で連続かつ $|f_m(\zeta)| \le M$ $(\zeta \in \partial D)$ である．したがって最大値原理（命題 1.13）より $z \in D$ に対し $|f_m(z)| \le M$. よって $m \to \infty$ とした極限である $f(z)$ も $|f(z)| \le M$ $(z \in D)$ を満たす．■

系 6.4. Riemann 球面 $\mathbb{P}$ 上の ∞ を通る Jordan 閉曲線で囲まれた領域 D で正則，有界な函数 $f(z)$ が $\overline{D}\setminus\{\infty\}$ で連続かつ $|f(\zeta)| \le M$ $(\zeta \in \partial D\setminus\{\infty\})$ であるならば，$|f(z)| \le M$ $(z \in D)$ である．

証明 適当な一次分数変換で有界領域にうつせばよい．■

定理 6.5 (Lindelöf)**.** $D \subset \mathbb{C}$ を区分的に C^1 級の Jordan 閉曲線 γ で囲まれた領域とする．$\zeta_0 \in \gamma$ とし，γ の ζ_0 の前後の部分を γ_1, γ_2 とする．$f(z)$ が D で正則，有界，かつ $\overline{D}\setminus\{\zeta_0\}$ で連続とする．もし，ある $a \in \mathbb{C}$ について

$$\varlimsup_{\zeta \to \zeta_0,\, \zeta \in \gamma_1} |f(\zeta) - a| \le m, \qquad \varlimsup_{\zeta \to \zeta_0,\, \zeta \in \gamma_2} |f(\zeta) - a| \le m \tag{6.1}$$



であるならば，

$$\varlimsup_{z \to \zeta_0,\, z \in D} |f(z) - a| \le m. \tag{6.2}$$

証明 $f - a$ をあらためて f とおくことにより，$a = 0$ としてよい．$\overline{D} \subset \Delta(\zeta_0; R)$ とする．$\overline{D}\setminus\{\zeta_0\}$ 上で $|f(z)| \le K$ となるよう K をとる．$\overline{D}\setminus\{\zeta_0\}$ を含むような $\Delta(\zeta_0;R)\setminus\{\zeta_0\}$ に含まれる単連結領域において

$$w = i\log\left(\frac{R}{z-\zeta_0}\right)$$

という写像を考える（右辺の log は，単連結領域でひとつの分枝をとっている）．これは単葉である（なぜなら，$z_1, z_2 \in D$ が $i\log(R/(z_1-\zeta_0)) = i\log(R/(z_2-\zeta_0))$ を満たすならば，e の肩に乗せて $R/(z_1-\zeta_0) = R/(z_2-\zeta_0)$ となるから $z_1 = z_2$）．D の像を D' とし，γ_1, γ_2 の像を γ_1', γ_2' としよう．

$$i\log\left(\frac{R}{z-\zeta_0}\right) = i\left(\log\left|\frac{R}{z-\zeta_0}\right| + i\arg\frac{R}{z-\zeta_0}\right) = i\log\left|\frac{R}{z-\zeta_0}\right| - \arg\frac{R}{z-\zeta_0}$$

で，$|z-\zeta| < R$ であることから $|R/(z-\zeta_0)| > 1$ だから，D' および γ_1', γ_2' は上半平面に入る．

$\varphi(w) = f(z(w))$ とおく．φ は D' 上正則かつ有界で，$\lambda > 0$ を 1 つ固定して

$$\Phi(w) = \frac{w\varphi(w)}{w+i\lambda}$$

とおけばこれも D' で正則である．$w \in D'$ に対し $|\varphi(w)| \le K, |w| < |w+i\lambda|$ だから

$$|\Phi(w)| = \frac{|w|}{|w+i\lambda|}|\varphi(w)| \le K.$$

すなわち Φ も有界．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，充分大きな $l > 0$ をとれば，γ_1' および γ_2' の $\mathrm{Im}\,w > l$ の部分の点 w に対して

$$|\Phi(w)| \le |\varphi(w)| \le m+\varepsilon$$

であり，また $\lambda > 0$ を大きくとっておけば γ の像の残りの部分についても

$$|\Phi(w)| \le \frac{|w|}{|w+i\lambda|}K \le m.$$

系 6.4 により，$w \in D'$ について $|\Phi(w)| \le m+\varepsilon$. すなわち，任意の $w \in D', \mathrm{Im}\,w > l$ に対し

$$|\varphi(w)| = \left|\frac{w+i\lambda}{w}\Phi(w)\right| \le \left|\frac{w+i\lambda}{w}\right|(m+\varepsilon).$$

よって，ε は任意だから，

$$\overline{\lim_{z\to\zeta_0,\, z\in D}}|f(z)| = \overline{\lim_{w\to\infty,\, w\in D'}}|\varphi(w)| \le m$$

である．■

系 6.6. 定理 6.5 と同じ仮定のもとに，

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0,\,\zeta\in\gamma_j} f(\zeta) = a, \quad i = 1, 2 \quad \Longrightarrow \lim_{z\to\zeta_0,\, z\in D} f(z) = a. \tag{6.3}$$

定理 6.7 (Lindelöf)**.** 定理 6.5 と同じ仮定の下に，

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0,\,\zeta\in\gamma_1} f(\zeta) = a, \qquad \lim_{\zeta\to\zeta_0,\,\zeta\in\gamma_2} f(\zeta) = b \tag{6.4}$$

ならば，$a = b$ が成り立つ．しかもこのとき

$$\lim_{z\to\zeta_0,\, z\in D} f(z) = a. \tag{6.5}$$

証明 $F(z) = (f(z)-a)(f(z)-b)$ とおく．F は D で正則かつ有界，かつ

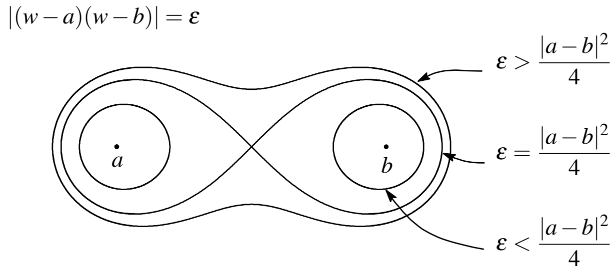
$$\lim_{\zeta\to\zeta_0,\zeta\in\gamma_j} F(\zeta) = 0.$$

系 6.6 より

$$\lim_{z \to \zeta_0,\, z \in D} F(z) = 0 \tag{6.6}$$

とわかる．

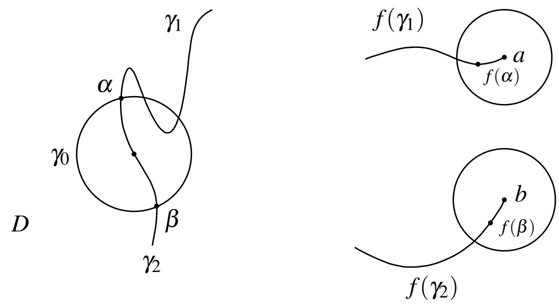
仮に $a \neq b$ であるとする．レムニスケート $|(w-a)(w-b)| = \varepsilon$ を考える．



ε を小さくとっておいて，このレムニスケートは a, b を分離する 2 つの閉曲線 δ_1, δ_2 であるとする．この ε に対し，$r > 0$ を充分小さくとれば，次のような γ と $\partial\Delta(\zeta_0; r)$ の交点 α, β がとれる．

(i) $\alpha \in \gamma_1, \beta \in \gamma_2$ で，$f(\alpha)$ は δ_1 の内側，$f(\beta)$ は δ_2 の内側にあり，α, β を両端とする $\partial\Delta(\zeta_0; r)$ の弧のひとつ γ_0 が $\overline{D}$ に含まれる．

(ii) $\overline{\Delta}(\zeta_0; r) \cap \overline{D}$ 上で $|F(z)| < \varepsilon$.



したがって，$f(\gamma_0)$ が $|(w-a)(w-b)| < \varepsilon$ なる領域に入るが，$f(\alpha), f(\beta)$ はそれぞれ δ_1, δ_2 の内側にある．これは $f(\gamma_0)$ の連結性に反する．よって，$a = b$ でなければならない．式 (6.5) は系 6.6 からしたがう． ■

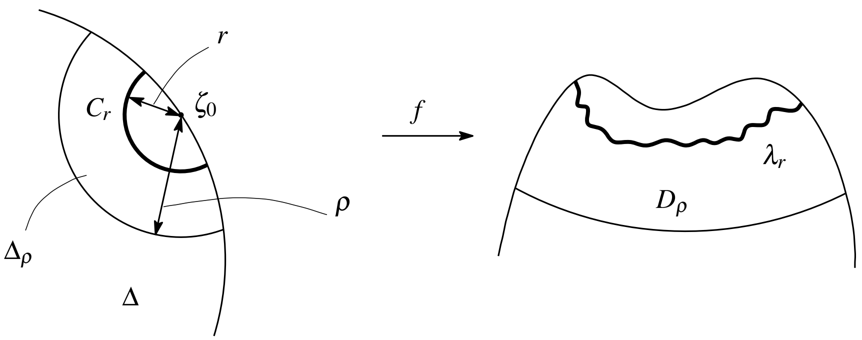
6.3　定理の証明

D_1 が単位円板 Δ の時に証明すれば充分である．円周 $\partial\Delta$ 上の任意の点 ζ_0 に対し，円板内部の点 z が ζ_0 に近づくとき，$f(z)$ は ζ_0 のみによる極限値 w_0 を持つことを示し，$\tilde{f}(\zeta_0) = w_0$ とおくとき，$\tilde{f}$ が求める性質を持つことを示す．

γ が区分的に C^1 級であるという仮定のもとでの定理 6.2 の証明　D_1 が単位円板 Δ であるとして示す．D_2 を D と書く．

$\zeta_0 \in \partial\Delta$ に対し，$\Delta \cap \Delta(\zeta_0;\rho) = \Delta_\rho$ とし，$f(\Delta_\rho) = D_\rho$ とおく．D_ρ の面積を $|D_\rho|$ と書くと，$|D_\rho| \to 0\ (\rho \to 0)$ である．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\rho > 0$ が存在して $|D_\rho| < \varepsilon$ となる．

$r < \rho$ に対し，$\partial\Delta(\zeta_0;r)$ と Δ の交わりを C_r とし，その f による像を λ_r とする．



λ_r の長さを L_r とおく．つまり

$$L_r = \int_{C_r} |f'(z)| r\, d\theta.$$

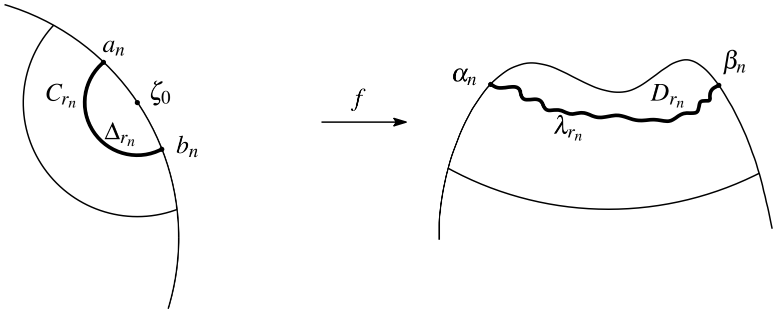
（λ_r は C^1 級だから長さはあるが，有限であるとは限らない．）すると

$$\begin{aligned}\int_0^\rho L_r\, dr &= \int_0^\rho dr \int_{C_r} |f'(z)| r\, d\theta = \int_{\Delta_\rho} |f'(z)| r\, dr\, d\theta \\ &\le \left(\int_{\Delta_\rho} |f'(z)|^2 r\, dr\, d\theta\right)^{1/2} \left(\int_{\Delta_\rho} 1^2 r\, dr\, d\theta\right)^{1/2} = \sqrt{|D_\rho||\Delta_\rho|} \\ &\le \sqrt{\varepsilon \cdot \pi\rho^2} = \rho\sqrt{\pi\varepsilon}.\end{aligned}$$

（1 つ目の不等号は Schwarz の不等式による．）平均値の定理より適当な $0 < r < \rho$ について $L_r \le \sqrt{\pi\varepsilon}$ である．特に，そのような r について L_r は有限である．

$\varepsilon_n \downarrow 0\ (n \to \infty)$ に対し，適当に $r_n \downarrow 0\ (n \to \infty)$ をとれば，$0 \le L_{r_n} \le \sqrt{\pi\varepsilon_n} \to 0$, したがって $L_{r_n} \to 0$ となる．C_{r_n} と $\partial\Delta$ との交点を a_n, b_n とおく．C_{r_n} に沿って $z \to a_n, z \to b_n$ とす

るとき，$w = f(z)$ は $\lambda_{r_n} = f_{c_{r_n}}$ に沿って $\partial\Delta$ の点 α_n, β_n に収束する（λ_{r_n} の長さ L_{r_n} が有限だから）．



$\alpha_n \neq \beta_n$ となる．なぜなら，もし $\alpha_n = \beta_n$ なら λ_{r_n} は Jordan 閉曲線となり，ある領域 D_{r_n} を囲む．f^{-1} を D_{r_n} に制限して考えると*，これは D_{r_n} 上正則かつ有界（$|f^{-1}(w)| < 1$, $w \in D_{r_n}$）である．さらに $\alpha_n = \beta_n$ に終わる λ_{r_n} の 2 つの枝に沿って w が動くとき，$f^{-1}(w)$ はそれぞれ 2 つの相異なる値 a_n, b_n に近づく．このことは Lindelöf の定理（定理 6.7）に矛盾する．

ここで $n \to \infty$ のとき λ_{r_n} の長さ L_{r_n} は 0 に収束するから，$|\alpha_n - \beta_n| \leq L_{r_n} \to 0$, よって $|\alpha_n - \beta_n| \to 0$ である．∂D 上 α_n, β_n を結ぶ弧の長さを $(\overline{\alpha_n\beta_n})$ と書くと，$(\overline{\alpha_n\beta_n}) \to 0$ である．なぜなら，もし $(\overline{\alpha_n\beta_n}) \to 0$ でなければ，ある部分列 n_ν $(\nu = 1, 2, ...)$ および $c > 0$ があって $(\overline{\alpha_{n_\nu}\beta_{n_\nu}}) \geq c$ となる．ここで ∂D はコンパクトだから部分列 n_ν を適当にとれば $\{\alpha_{n_\nu}\}, \{\beta_{n_\nu}\}$ はそれぞれある $\alpha, \beta \in \partial D$ に収束する．$(\overline{\alpha_{n_\nu}\beta_{n_\nu}}) \geq c$ だから $(\overline{\alpha\beta}) \geq c > 0$ で，よって特に $\alpha \neq \beta$．したがって $|\alpha_{n_\nu} - \beta_{n_\nu}| \to |\alpha - \beta| \neq 0$ となり，矛盾である．

$\partial D_{r_n} = \lambda_{r_n} \cup (\overline{\alpha_n\beta_n})$ だから，その長さは $n \to \infty$ のとき 0 に収束する．よって D_{r_n} の直径も 0 に収束する．ゆえに D_{r_n} はある 1 点 w_0 に収束する．

$w_0 \in \overline{D}$ は明らかで，Δ に w_0 に移る点はないから $w_0 \notin \Delta$. よって $w_0 \in \partial\Delta$ である．

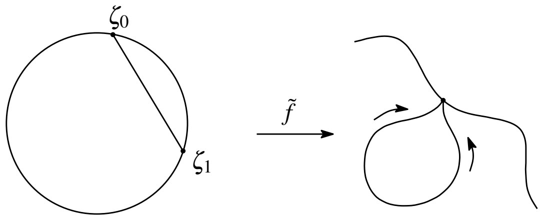
$\tilde{f}(\zeta_0) = w_0$ と定める．これで $\tilde{f}: \overline{\Delta} \to \overline{D}$ という写像が定義できた．

<u>$\tilde{f}$ が連続であること</u>．$\tilde{f}(\zeta_0) = w_0, \zeta_0 \in \partial\Delta$ とする．w_0 の任意の小近傍 U に対し，$\overline{V} \subset U$ となる w_0 の近傍 V がとれる．充分大きい n について $D_{r_n} \subset V$ である．$\tilde{f}$ の構成法より $\tilde{f}(\overline{\Delta}_{r_n}) \subset \overline{D}_{r_n} \subset \overline{V} \subset U$.

<u>$\tilde{f}$ が 1 対 1 であること</u>．もし異なる 2 点 $\zeta_0, \zeta_1 \in \partial\Delta$ について $\tilde{f}(\zeta_0) = \tilde{f}(\zeta_1)$ なら，線分 $\overline{\zeta_0\zeta_1}$ の $\tilde{f}$ による像は Jordan 閉曲線となり，それで囲まれる領域上 f^{-1} を考えると Lindelöf の定理により $\zeta_0 = \zeta_1$ となってしまい，矛盾．

---

*$D_{r_n} \subset D$ となっている．このことを確かめるには，D を囲む Jordan 閉曲線を γ とするとき，γ の外側の領域 D' の点は D' の中だけで無限遠点 ∞ と曲線でつなぐことができるため，そのような点に関する λ_{r_n} の回転数（p. 42 の脚注参照）は 0 であるということに注意すればよい．



<u>$\tilde{f}$ が $\overline{D}$ の上への写像であること</u>．任意の $w_0 \in \partial D$ に対し，それに収束する D の点列 $\{w_n\}$ をとり，$w_n = f(z_n)$ とする．$\{z_n\}$ はある $\partial\Delta$ の点 ζ_0 に集積点を持つ．$\tilde{f}$ は連続だから

$$\tilde{f}(\zeta_0) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(z_n) = \lim_{n\to\infty} w_n = w_0$$

である．

これで，$\tilde{f} : \overline{\Delta} \to \overline{D}$ は連続で，1 対 1 かつ 上への写像であることがわかった．しかも $\overline{\Delta}$ はコンパクトだから，$\tilde{f}$ は同相写像である．■

定理 6.2 を用いると，Jordan 閉曲線に囲まれた領域 D があるとき，その境界 ∂D に向きを定義することができる．まず，単位開円板 Δ については，反時計回りの向きを $\partial\Delta$ の正の向きと定める．そして一般の Jordan 閉曲線に囲まれた領域 D については，Riemann の写像定理（定理 5.9）により存在する等角同型 $f : \Delta \to D$ をひとつとり，それを定理 6.2 によって拡張して得られる同相写像 $\overline{f} : \overline{\Delta} \to \overline{D}$ を考える．$\partial\Delta$ 上を点が正の向きに動くときに，その $\overline{f}$ による像が ∂D 上を動く向きを ∂D の**正の向き**と定める．これは f の選び方にはよらない．

系 6.8. $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ を Jordan 閉曲線 γ_1, γ_2 で囲まれた領域とする．γ_1, γ_2 上に正の向きに並んだ 3 点 $z_1, z_2, z_3 \in \gamma_1$, $w_1, w_2, w_3 \in \gamma_2$ が与えられたとする．このとき，等角同型 $f : D_1 \to D_2$ であって $\overline{f}(z_j) = w_j$ $(j = 1, 2, 3)$ なるものがただ 1 つ存在する．

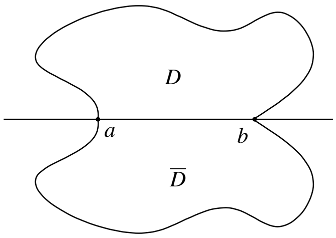
第 7 講

6 月 1 日

7.1　Schwarz の鏡映原理

定理 7.1 (Schwarz の鏡映原理). $D \subset \mathbb{C}$ を上半平面 $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ 内の領域で ∂D が区間 $(a,b) \subset \mathbb{R}$ を含んでいるようなものとする．f が D 上正則，$D \cup (a,b)$ で連続であって，(a,b) 上実数値をとるならば，f は領域 $D \cup (a,b) \cup \overline{D}$ まで*で正則な函数 $g(z)$ に次のように拡張できる．

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & z \in D \cup (a,b), \\ \overline{f(\overline{z})} & z \in \overline{D} \cup (a,b). \end{cases} \tag{7.1}$$



証明　g が連続函数になるのは明らか．また，$\overline{f(\overline{z})}$ は $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} \in D\}$ で正則函数となる．なぜなら，$z = x + iy$ として $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とおけば

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y)$$

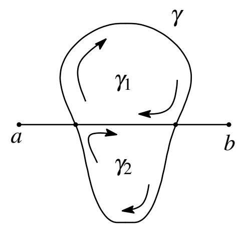
となり，これは x, y について微分可能で，Cauchy–Riemann の関係式 $(\partial f/\partial\overline{z})(z) = 0$ により

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} g(z) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \overline{f(\overline{z})} = \overline{\left(\frac{\partial}{\partial z} f(\overline{z}) \right)} = 0$$

*ここでは $\overline{D}$ は $\{\overline{z} \mid z \in D\}$ のことを表している．

となるからである．

$\tilde{D} = D \cup (a,b) \cup \overline{D}$ 内の任意の区分的に C^1 級の Jordan 閉曲線 γ について $\int_\gamma g(z)\,dz = 0$ が成立していれば Morera の定理により $g(z)$ は正則となるが，上に述べたことから，図に示したような γ について $\int_\gamma g(z)\,dz = 0$ であることをみれば充分である．

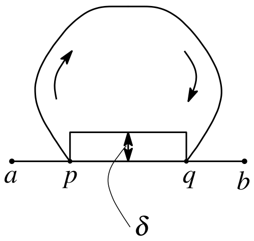


$$\int_\gamma g(z)\,dz = \int_{\gamma_1} g(z)\,dz + \int_{\gamma_2} g(z)\,dz$$

である．γ_1 に沿った積分については

$$-\int_{\gamma_1} g(z)\,dz = \int_p^q (g(x) - g(x+i\delta))\,dx + i\int_0^\delta (g(q+iy) - g(p+iy))\,dy.$$

ただし p, q および δ は次の図のようにとっている．



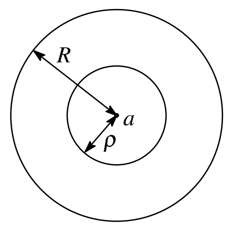
右辺の第 1 項，第 2 項はともに $\delta \to 0$ の極限で 0 に収束するから，左辺の値は 0 である．γ_2 に沿った積分も同様．■

7.2　除去可能特異点（1 変数の理論）

$a \in \mathbb{C}$ とし，その近傍で負の冪を許した冪級数（**Laurent 級数**）

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} \tag{7.2}$$

を考える．いま，右辺の第 1 項の収束半径を R とし，第 2 項を $1/(z-a)$ の級数とみたときの収束半径を $1/\rho$ としよう（R は ∞ でもよいし，ρ は 0 でもよい）．もし $\rho < R$ ならば，$\rho < |z-a| < R$ において上の展開は広義一様収束し，正則函数を与える．そのときこれを**収束 Laurent 級数**といい，$\rho < |z-a| < R$ をその**収束域**という．



定理 7.2. 2 つの Laurent 級数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n \tag{7.3}$$

が同じ $\rho < |z-a| < R$ で同じ正則函数に収束するならば，$a_n = b_n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

証明 これらの Laurent 級数で与えられる正則函数を f とする．$\rho < r < R$ として

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}dz &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{|z|=r}(z-a)^{n-m-1}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} r^{n-m-1}e^{i(n-m-1)\theta}ire^{i\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} ir^{n-m}a_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}d\theta \\
&= a_n.
\end{aligned}$$

したがって a_n は函数 f により一意的に決まる．■

定理 7.3. $f(z)$ が $\rho < |z-a| < R$ で一価正則ならば，その領域で収束 Laurent 級数に展開できる．

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \qquad \rho < |z-a| < R. \tag{7.4}$$

ただし，$\rho < r < R$ なる r をとって

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \tag{7.5}$$

と定める*.

(7.4) を $f(z)$ の **Laurent 展開**という．

証明 $a=0$ としてよい．$\rho < \rho_1 < |z| < R_1 < R$ なる z に対しては，Cauchy の積分公式より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

右辺第 1 項は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

*a_n は r の選び方によらないことが Cauchy の積分定理からわかる．

第 2 項は，$|\zeta| = \rho_1 < |z|$ のとき

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\zeta/z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{\zeta^{n+1}}.$$

この級数は z を固定すれば $|\zeta| = \rho_1$ で一様収束するので，$f(\zeta)/(\zeta - z)$ を項別積分することができて

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \int_{|\zeta|=\rho_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n.$$

これで示された．■

一般に領域 $0 < |z-a| < R$ で定義された正則函数 $f(z)$ があるとき，a は f の**孤立特異点**であるという．$0 < |z-a| < R$ において

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n} \tag{7.6}$$

と Laurent 展開したとき，右辺第 2 項を Laurent 展開の**主要部**という．この主要部に着目して孤立特異点を分類しよう．

(1) 主要部に現れる係数 a_{-n} $(n = 1, 2, ...)$ がすべて 0 のとき，a は**除去可能特異点**であるという．このときは，$f(z) = a_0$ と定義すれば $f(z)$ は $|z| < R$ で正則になる．

(2) そうでない場合，主要部が有限級数になっているならば，f は a で**極**を持つという．

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{k}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}, \qquad a_{-k} \neq 0 \tag{7.7}$$

と書いたとき，k を極の**位数**という．このときは

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-a)^k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^{n+k} + \sum_{n=1}^{k} a_{-n}(z-a)^{k-n}\right) \\ &= \frac{1}{(z-a)^k}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z-a)^n \end{aligned} \tag{7.8}$$

と書き直すことができる．そこで $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z-a)^n$ とおけばこれは a の近傍における正則函数を定め，$g(a) = a_{-k} \neq 0$ である．したがって $1/f(z) = (z-a)^k/g(z)$ は a の近傍で正則であり，a はその k 位の零点となる．

(3) 主要部が無限級数の場合，f は a で**真性特異点**を持つという．

なお，f が $|z| > \rho$ で正則である場合には，$f(1/\zeta)$ が特異点 $\zeta = 0$ を持つが，それが除去可能特異点・極・真性特異点のいずれであるかに応じて，f は無限遠点 ∞ で除去可能特異点・極・真性特異点を持つという．

定理 7.4 (Riemann の除去可能特異点定理). f が $0<|z-a|<R$ で正則で，かつ有界な函数とする．このとき a は除去可能特異点である．

証明 Laurent 展開の係数は (7.5) より

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$$

である．$0<|z-a|<R$ で $|f(z)|<M$ であるとすれば，

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|z-a|=r} \frac{|f(\zeta)|}{r^{n+1}}|d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{M}{r^n} d\theta = \frac{M}{r^n}.$$

したがって $n=1,2,\ldots$ に対し $|a_{-n}|\leq Mr^n$ である．$r\to 0$ として $a_{-n}=0$ を得る． ■

定理 7.5. f は $0<|z-a|<R$ で正則であるとする．このとき

$$f \text{ が } a \text{ で極を持つ} \iff |f(z)|\to\infty \quad (z\to a) \tag{7.9}$$

証明 f が a で極を持つとする．そのとき，極の位数を k とすれば，(7.8) でみたように，$f(z)=(z-a)^{-k}g(z)$, $g(z)$ は正則で $g(a)\neq 0$, と表すことができる．したがって $|f(z)|\to\infty$ となる．

逆に，$|f(z)|\to\infty$ $(z\to a)$ であるとする．そのとき，Riemann の除去可能特異点定理（定理 7.4）により，$1/f(z)$ は a の近傍で正則で，a は零点である．その位数を k とすれば，$1/f(z)=(z-a)^k h(z)$, $h(z)$ は正則で $h(a)\neq 0$, と表せるから，$f(z)=1/(z-a)^k h(z)$ である．$1/h(z)$ は a の近傍で正則なので，f は a で位数 k の極を持つ． ■

定理 7.6. $f(z), g(z)$ が $|z-a|<R$ で正則で $g(a)=0$ であるとき，$g(z)\not\equiv 0$ ならば，$f(z)/g(z)$ は $z=a$ で除去可能特異点を持つか，または極を持つ（つまり，$z=a$ は $f(z)/g(z)$ の真性特異点ではない）．

証明 $z=a$ は $g(z)$ の孤立零点であることからわかる． ■

注意 $n\geq 2$ のときは，例 3.15 でみたように，正則函数に孤立特異点は存在しない．したがってそのような 2 つの函数の比には不確定点が生じる．このことについては，9.2 節でもう少し詳しく扱う．

7.3　多変数の場合の局所理論について

次の問題を考えたい．

問題. $n \geq 2$ のとき，正則函数の“素因数分解定理”があるか.

詳細は次回述べることにして，この節では，議論の概略を紹介しよう.

$a \in \mathbb{C}^n$ とする．3.4 節でやったように，点 a における正則函数の芽の全体 $\mathcal{O}_a$ は，自然に環の構造を持つのだった．Taylor 展開により，$\mathcal{O}_a$ は収束冪級数環 $\mathbb{C}\{z_1 - a_1, ..., z_n - a_n\}$ と同型である．どこで考えても同じなので，以下では $a = 0$ とする．$\mathcal{O}_0$ のことを $\mathcal{O}_n$ と書くことにする．なお，$f \in \mathcal{O}_n$ は 0 の近傍で定義された正則函数の同値類だが，その **0 における値** $f(0)$ は矛盾なく定義されることを注意しておく.

$\mathcal{O}_n$ は**整域**である．すなわち，$f, g \in \mathcal{O}_n$ が $fg = 0$ を満たせば，f と g の少なくとも一方は 0 である．なぜなら，f, g を与える原点の近傍上の正則函数も同じ記号 f, g で表すことにすると，$fg = 0$ とはある原点の近傍 U において $(fg)|_U \equiv 0$ となるということである．U は連結であるとしてよい．このとき，もし $f|_U \not\equiv 0$ であれば，U の中に f が 0 にならない点があり，その近傍 U_1 でも $f \neq 0$ だから $g|_{U_1} \equiv 0$ である．一致の定理により $g|_U \equiv 0$ となる.

以下に定義するいくつかの用語は，一般に，環について使われることばである.

$f, g \in \mathcal{O}_n$ に対し，f が g を**割り切る**とは，ある $h \in \mathcal{O}_n$ により $g = fh$ と表されることをいう．このとき $f \mid g$ と書く．また，f は g の**約元**，g は f の**倍元**であるという.

$u \in \mathcal{O}_n$ が**単元**であるとは，$1 = uv$ となるような $v \in \mathcal{O}_n$ が存在するということである．このとき 0 における値を考えれば $1 = u(0)v(0)$ だから $u(0) \neq 0$ である．逆も成り立つから

$$u \in \mathcal{O}_n \text{ が単元} \Longleftrightarrow u(0) \neq 0 \tag{7.10}$$

である.

$f, g \in \mathcal{O}_n$ について，$f = ug$（u は単元）と表されるとき，f と g は**同値**であるといい，$f \sim g$ と書く.

$f \in \mathcal{O}_n$ が単元でも 0 でもないとする．そのとき，f の約元が単元および f と同値な元しかないとき，f は**既約元**であるという．そうでないときは**可約元**であるという.

$f, g, ... \in \mathcal{O}_n$ が**互いに素**であるとは，単元以外にそれらを同時に約す元がないことをいう.

さて，整域 $\mathcal{O}_n$ は次の性質を持つ.

定理 7.7. 0 でない任意の $f \in \mathcal{O}_n$ は，単元および有限個の既約元の積に分解される.

$$f = up_1^{\nu_1} \cdots p_k^{\nu_k} \qquad (u \text{ は単元，} i \neq j \text{ ならば } p_i \not\sim p_j). \tag{7.11}$$

さらにこの分解は次の意味で一意的である．2 つの分解 $f = up_1^{\nu_1} \cdots p_k^{\nu_k} = vq_1^{\mu_1} \cdots q_l^{\mu_l}$ が与えられたとき，$k = l$ であり，かつ適当に $q_1, ..., q_l$ の順番を入れ替えると $p_j \sim q_j, \nu_j = \mu_j$ $(j = 1, ..., k)$ となる.

$\mathcal{O}_n$ が定理 7.7 に述べられた性質をもつことを指して，$\mathcal{O}_n$ は**一意分解整域 (UFD)** であるという．

この定理を示すためには **Weierstraßの予備定理**が必要になる．さらに，$\mathcal{O}_n$ が Noether 環であることも示すのだが，そのためには次の定理が必要である．

定理 7.8 (Weierstraßの割算定理). $f \in \mathcal{O}_n$ を，ある $k \geq 1$ および単元 $u \in \mathcal{O}_1$ が存在して $f(z_1, 0, ..., 0) = z_1^k u(z_1)$ を満たすようなものとする．そのとき，任意の $g \in \mathcal{O}_n$ に対し，

$$g(z) = q(z)f(z) + \sum_{j=0}^{k-1} z_1^j h_j(z_2, ..., z_n) \tag{7.12}$$

となるような $q \in \mathcal{O}_n$ および $h_0, ..., h_{k-1} \in \mathcal{O}_{n-1}$ が一意的に存在する．

第 8 講

6 月 8 日

8.1 Weierstraßの予備定理

$\mathcal{O}_{n-1}$ 上の多項式環 $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ を考える．その元は $0 \in \mathbb{C}^n$ の近傍における正則函数を与えるから，$\mathcal{O}_{n-1}[z_n] \subset \mathcal{O}_n$ である．以下では，$(z_1, ..., z_{n-1}, z_n)$ をまとめて書くときに z という文字を使い，$(z_1, ..., z_{n-1})$ は z' で表す．

$\mathcal{O}_0 = \mathbb{C}$ と定義しておく．以下で定理などを証明する際には主に $n \geq 2$ の場合を念頭において行うが，適切に解釈すれば，$n = 1$ の場合にも適用できる議論になっている．

定義 8.1. $h \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ が z_n について k 次の **Weierstraß多項式**であるとは，h が

$$h(z', z_n) = z_n^k + a_1(z')z_n^{k-1} + \cdots + a_k(z'), \qquad a_j(0) = 0 \quad (j = 1, ..., k) \tag{8.1}$$

と表されることをいう．このとき $h(0, z_n) = z_n^k$ である．

さて，$f \in \mathcal{O}_n$ を $f(0) = 0$ なる正則函数の芽とする．これが z_n **方向に正常** (regular) であるとは，$f(0, z_n) \not\equiv 0$ であることをいう．そのような正則函数の芽は，次の定理に述べるように，Weierstraß多項式に“直す”ことができる．

定理 8.2 (Weierstraßの予備定理). $f(0) = 0$ を満たす $f \in \mathcal{O}_n$ を考える．これが z_n 方向に正常であって，

$$f(0, z_n) = z_n^k g(z_n) \qquad (g(0) \neq 0)$$

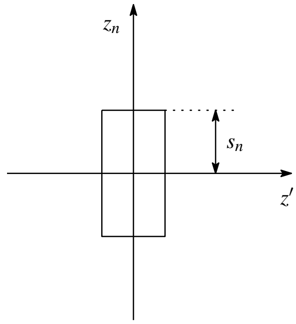
と表されると仮定する（つまり $z_n = 0$ が $f(0, z_n)$ の k 位の零点だということである）．そのとき，k 次の Weierstraß多項式 $h \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ および単元 $u \in \mathcal{O}_n$ を用いて

$$f(z) = u(z)h(z', z_n) \tag{8.2}$$

と表すことができる．この分解は一意的である．

証明 $f(z)$ が原点の近傍 $\Delta(0;r)$ で正則であるとする．$s_n>0$ を充分小さくとり，$f(0,z_n)$ は $|z_n|\le s_n$ の範囲では原点以外の点で 0 にならないようにしておく．

$\inf\limits_{|z_n|=s_n}|f(0,z_n)|>0$ である．$f(z',z_n)$ を，z' をパラメータとする z_n についての 1 変数函数の族と考える．任意の $\varepsilon>0$ に対して $s'>0$ を充分小さくとると



$$\sup_{|z_n|=s_n,\,|z'|<s'}|f(z',z_n)-f(0,z_n)|<\varepsilon$$

となるから，特に

$$\sup_{|z_n|=s_n,\,|z'|<s'}|f(z',z_n)-f(0,z_n)|<\inf_{|z_n|=s_n}|f(0,z_n)|$$

とできる．すると Rouché の定理（p. 43 の脚注参照）により，z' を $|z'|\le s'$ の範囲にとって固定すると $f(z',z_n)$ は重複を込めてちょうど k 個の零点を持つ．それらを $\varphi_1(z'),...,\varphi_k(z')$ とおく（順番はどうでもよい）．そして $a_l(z')$ を $\varphi_1,...,\varphi_k$ の l 次基本対称式とし

$$h(z',z_n)=\prod_{l=1}^{k}(z_n-\varphi_l(z'))=z_n^k-a_1(z')z_n^{k-1}+\cdots+(-1)^k a_k(z') \tag{8.3}$$

と定義する．

留数定理より

$$\tau_r(z')=\sum_{l=1}^{k}\varphi_l(z')^r=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z_n|=s_n} z_n^r\frac{\dfrac{\partial}{\partial z_n}f(z',z_n)}{f(z',z_n)}dz_n.$$

である．右辺は，$\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ $(j=1,...,n-1)$ を施すと微分と積分の順序交換ができて 0 となるから，z' について正則である．そして $a_l(z')$ は $\tau_1(z'),...,\tau_k(z')$ の多項式として表されるから，これも z' について正則とわかる．こうして h は Weierstraß多項式となる（$a_l(0)$ は $\varphi_1(0)=0,...,\varphi_k(0)=0$ の基本対称式だから 0 である）．

h の定義 (8.3) から $|\zeta|=s_n$ 上で $h(z',\zeta)\neq 0$ で，

$$u(z',z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=s_n}\frac{f(z',\zeta)}{h(z',\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-z_n} \tag{8.4}$$

とおくと，これは $|z'|<s',|z_n|<s_n$ で正則な函数である．z' を固定すれば，$|z_n|<s_n$ における $h(z',z_n)$ の零点はすべて $f(z',z_n)/h(z',z_n)$ の除去可能特異点だから，Cauchy の積分公式により $u(z',z_n)=f(z',z_n)/h(z',z_n)$ となる．これで

$$f(z',z_n)=u(z',z_n)h(z',z_n)$$

と表すことができた．さらに，(8.3) により $u(z',z_n)=f(z',z_n)/h(z',z_n)$ は零点を持たない．

この分解が一意的であることをみよう．

$$f = uh = \tilde{u}\tilde{h}$$

と表されたとする．そのとき，z' を固定すると，$|z_n| < s_n$ における $f(z', z_n)$ の零点，$h(z', z_n)$ の零点，$\tilde{h}(z', z_n)$ の零点は一致し，k 個ずつある．しかも $h(z', z_n), \tilde{h}(z', z_n)$ はいずれも最高次の係数が 1 だから，$h(z', z_n) = \tilde{h}(z', z_n)$ である．したがってまた $u(z', z_n) = \tilde{u}(z', z_n)$ であることもわかる．よって $h = \tilde{h}, u = \tilde{u}$. ■

注意 (1) この定理により，正則函数 f の零点集合 $\{f = 0\}$ は，局所的には Weierstraß多項式の零点集合として調べられる．詳しくは 9.1 節を参照せよ．

(2) $k = 1$ のときは陰函数定理である．すなわち，原点の近傍で定義された $f(0) = 0$ であるような正則函数 f について $(\partial f/\partial z_n)(0) \neq 0$ と仮定すれば，その仮定は f が z_n 方向に regular of order 1 であることを意味し，したがってそのとき Weierstraßの予備定理により $f(z', z_n) = (\text{単元}) \cdot (z_n - a_1(z'))$ と表されるから $f(z', z_n) = 0 \Longleftrightarrow z_n = a_1(z')$ となる．

(3) 一般に $f(0) = 0$ であるような $f \not\equiv 0$ が任意に与えられたとき，ある適当な原点を通る複素直線 L を考えれば，その上では $f|_L \not\equiv 0$ である．そこでその L をあらためて $\tilde{z}_n$ 軸とする座標変換 $z = C\tilde{z}$ をとれば，$f(C\tilde{z})$ は $\tilde{z}_n$ 方向に正常となる．

8.2　Weierstraßの割算定理

定理 8.3 (Weierstraßの割算定理). $h(z', z_n) \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ を k 次の Weierstraß多項式とする．すると，任意の $f \in \mathcal{O}_n$ は次の形に表せる．

$$f = g \cdot h + r \qquad (g \in \mathcal{O}_n,\ r \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n],\ \deg r < k). \tag{8.5}$$

さらに，このような表し方は一意的である．

証明 f, g は $\Delta(0; r)$ で正則であるとする．さらに必要なら半径 r を縮めて s として，$h(z', z_n)$ は $|z_n| = s_n, |z'| \leq s'$ で 0 とならないようにする．

$f(z', z_n)/h(z', z_n)$ の“正則部分”を次のように分離する．

$$g(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta| = s_n} \frac{f(z', \zeta)}{h(z', \zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_n}.$$

これは (8.4) のときと同様に $|z_n| < s_n, |z'| < s'$ の範囲で正則である．そして，$f - gh$ を r とおくと

$$\begin{aligned} r(z) &= f(z) - g(z)h(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta| = s_n} \frac{f(z', \zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta| = s_n} \frac{h(z', z_n)}{h(z', \zeta)} \frac{f(z', z_n)}{\zeta - z_n} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta| = s_n} \frac{h(z', \zeta) - h(z', z_n)}{(\zeta - z_n)} \frac{f(z', \zeta)}{h(z', \zeta)} d\zeta. \end{aligned}$$

ここで $(h(z',\zeta)-h(z',z_n))/(\zeta-z_n)$ は z_n についての $k-1$ 次多項式である．すなわち，$\sum_{l=0}^{k-1} z_n^l b_l(z',\zeta)$（$b_l(z',\zeta)$ は正則函数）と表せる．

$$r(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{l=0}^{k-1} z_n^l \int_{|\zeta|=s_n} b_l(z',\zeta)\frac{f(z',\zeta)}{h(z',\zeta)}d\zeta$$

で，右辺に現れている積分は各 l について z' の正則函数である．

この表し方の一意性を示す．$f=gh+r=\tilde{g}\tilde{h}+\tilde{r}$ とすると，$(g-\tilde{g})h=\tilde{r}-r$ で右辺は高々 $k-1$ 次の多項式である．ところが左辺は z' を固定するごとに少なくとも k 個の零点を持つから，$\tilde{r}-r=0$ である．ゆえにまた，$g=\tilde{g}$. ■

8.3　$\mathcal{O}_n$ が UFD であること，Noether 環であること

$f\in\mathcal{O}_n$ が可約であるとは単元でない $g_1, g_2\in\mathcal{O}_n$ により $f=g_1g_2$ と表されることだったが，$\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ に属する元についてはさらに次のように定義する．

定義 8.4. $f\in\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ が**代数的に可約**であるとは，$\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ で可約であることをいう．すなわち，$\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ において単元でない $g_1, g_2\in\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ により $f=g_1g_2$ と表されるということである．

補題 8.5. Weierstraß多項式 $h\in\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ について

(1) h が（$\mathcal{O}_n$ の元として）可約 $\Longleftrightarrow$ h が代数的に可約.

(2) h が可約であるとき，h を Weierstraß多項式の積に分解することができる．

証明 k 次の Weierstraß多項式 h があり，$\mathcal{O}_n$ で可約であるとする．$h=g_1g_2$ と表すと，$z_n^k=h(0,z_n)=g_1(0,z_n)g_2(0,z_n)$ だから g_1, g_2 は z_n 方向に正常となり，Weierstraßの予備定理（定理 8.2）により $g_i=u_ih_i$（u_i は単元，h_i は Weierstraß多項式）と表せる．

$$1\cdot h=u_1u_2h_1h_2$$

であって，h_1h_2 も Weierstraß多項式だから定理 8.2 における分解の一意性から $h=h_1h_2$ である．これで (1) の $\Longrightarrow$ と (2) が示された．

(1) の $\Longleftarrow$ を示す．$h=g_1g_2$（$g_i\in\mathcal{O}_{n-1}[z_n], g_i$ は単元でない）と表されるとする．このとき g_1, g_2 が $\mathcal{O}_n$ の元として単元でないことを示せばよい．

$$z_n^k=h(0,z_n)=g_1(0,z_n)g_2(0,z_n)$$

だから $g_1(0,z_n)=z_n^l a_1(z_n), g_2(0,z_n)=z_n^m a_2(z_n)$ （$k=l+m, a_i(0)\neq 0$）と表せる．もし g_1 が $\mathcal{O}_n$ の元として単元だとすると，$g_1(0)\neq 0$ だから $l=0$, したがって $m=k$ である．

$\deg g_2 \geq k$, $\deg g_1 \geq 0$ で両者を足すと k になるから $\deg g_1 = 0$ で，$g_1(z', z_n) = a(z')$ と表される．$g_1(0) = a(0) \neq 0$ なので $a(z')$ は $\mathcal{O}_{n-1}$ の単元であり，したがって g_1 は $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ で単元となる．これは矛盾である．■

定理 8.6. $\mathcal{O}_n$ は UFD である．

証明 n についての帰納法を用いる．$n = 0$ のときは $\mathcal{O}_0 = \mathbb{C}$ なのでよい．

$\mathcal{O}_{n-1}$ が UFD であることが証明されたとする．そのとき，Gaußの定理により $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ は UFD である．0 でない $f \in \mathcal{O}_n$ を任意にとる．必要なら適当に座標変換して，z_n 方向に正常であると仮定してよい．Weierstraßの予備定理（定理 8.2）により，Weierstraß多項式 h および単元 u を用いて $f = uh$ と書ける．$h \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ だから，これは $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ の元で既約元分解される．補題 8.5 の (2) を繰り返し用いることにより，

$$h = h_1 \cdots h_m \qquad (h_l \text{ は } \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \text{ で既約な Weierstraß多項式})$$

とすることができる．$f = uh_1 \cdots h_m$ で，補題 8.5 の (1) により h_l は $\mathcal{O}_n$ の元として既約である．これで分解できた．

この分解が単元倍を除いて一意的であることを示そう．別に既約元分解 $f = \tilde{u}\tilde{h}_1 \cdots \tilde{h}_l$（$\tilde{u}$ は単元，$\tilde{h}_l$ は既約元）が与えられたとする．そのとき，適当な座標変換を施せば $h_1, ..., h_m, \tilde{h}_1, ..., \tilde{h}_l$ はすべて z_n 方向に正常となる．単元倍することによりこれらは Weierstraß多項式であるとしてよい．

$$h_1 \cdots h_m = \frac{\tilde{u}}{u} \cdot \tilde{h}_1 \cdots \tilde{h}_{m'}$$

で，$h_1 \cdots h_m, \tilde{h}_1 \cdots \tilde{h}_{m'}$ はどちらも Weierstraß多項式なので，Weierstraßの予備定理（定理 8.2）の分解の一意性から $\tilde{u}/u \equiv 1, h_1 \cdots h_m = \tilde{h}_1 \cdots \tilde{h}_{m'}$ である．$\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ は UFD であり，$h_l, \tilde{h}_{l'}$ たちは $\mathcal{O}_n$ の元として既約なことから補題 8.5 の (1) により $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ の元としても既約なので，この 2 つの分解は $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ の単元倍（すなわち $\mathcal{O}_{n-1}$ の単元倍）を除いて一致している．ところが，$h_l, \tilde{h}_{l'}$ たちは Weierstraß多項式なのだから，このことは $h_1, ..., h_m$ と $\tilde{h}_1, ..., \tilde{h}_{m'}$ が順序を除いてまったく同じものであることを意味している．■

定理 8.7. $\mathcal{O}_n$ は **Noether 環**である．すなわち，$\mathcal{O}_n$ の任意のイデアルは有限生成である．

証明 n についての帰納法．$n = 0$ のときは $\mathcal{O}_0 = \mathbb{C}$ だから OK.

$n \geq 1$ とし，$\mathcal{O}_{n-1}$ が Noether 環であるとする．このとき Hilbert の基底定理により $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ も Noether 環である．任意の 0 でないイデアル $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_n$ をとる．

0 でない元 $f \in \mathfrak{a}$ をとる．$\mathfrak{a}$ のすべての元に一斉に座標変換を施してかまわないから，f は z_n 方向に正常であるとしておいてよい．Weierstraßの予備定理（定理 8.2）により，f

はある Weierstraß多項式 h の単元倍である．この h も $\mathfrak{a}$ に属する．

$\mathfrak{a}\cap\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ は $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ のイデアルである．$\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ が Noether 環だったから，g_1, ..., $g_m\in\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ を

$$\mathfrak{a}\cap\mathcal{O}_{n-1}[z_n]=\sum_{l=1}^{m}\mathcal{O}_{n-1}[z_n]g_l$$

となるようにとれる．

$\mathfrak{a}$ が $\mathcal{O}_n$ 上 h, g_1, ..., g_m で生成されることを示そう．任意の $g\in\mathfrak{a}$ は Weierstraßの割算定理（定理 8.3）により $g=g_0h+r$ と表され，$g-g_0h=r\in\mathfrak{a}\cap\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. よって $g-g_0h$ は

$$g-g_0h=f_1g_1+\cdots+f_mg_m \qquad (f_1, ..., f_m\in\mathcal{O}_{n-1}[z_n]\subset\mathcal{O}_n)$$

という形に表される．ゆえに $g=g_0h+f_1g_1+\cdots+f_mg_m\in(h,g_1,...,g_m)$ である． ■

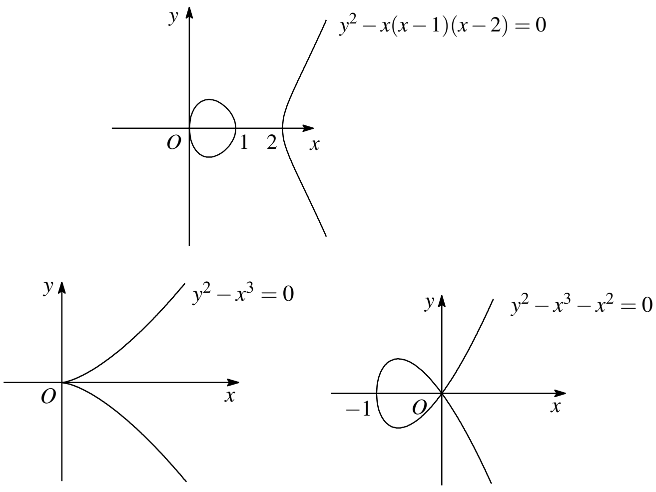
第 9 講

6 月 15 日

9.1　超曲面と Riemann の除去可能特異点定理

定義 9.1. $D \subset \mathbb{C}^n$ を領域とする．閉部分集合 $X \subset D$ が D の**超曲面**であるとは，任意の $x \in D$ に対し，その適当な近傍 $U \subset D$ と U 上の正則函数 $f\ (\not\equiv 0)$ が存在して，$X \cap U = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$ となることをいう．このとき，f を超曲面 X の点 x における**定義函数**という．

例 9.2. たとえば，次のようなものが $\mathbb{C}^2$ の超曲面である[*]．なお，2 つの複素変数を x, y で表し，(x 平面の実軸) $\times$ (y 平面の実軸) による切り口を図に描いている．



[*]ここに挙げている超曲面はいずれも，その全体が $\mathbb{C}^2$ 上のただひとつの正則函数の零点集合として表されている．超曲面は，定義のうえでは全体としてひとつの正則函数の零点集合として表されている必要はなく，各点の近傍でそのようになっていればよい．しかし，$\mathbb{C}^n$ の超曲面の場合には，そういうものは結果として全体としてひとつの正則函数によって与えられることが知られている．このことは，$\mathbb{C}^n$ 上では Cousin の乗法問題（11.1 節を参照せよ）が解けることからしたがう．

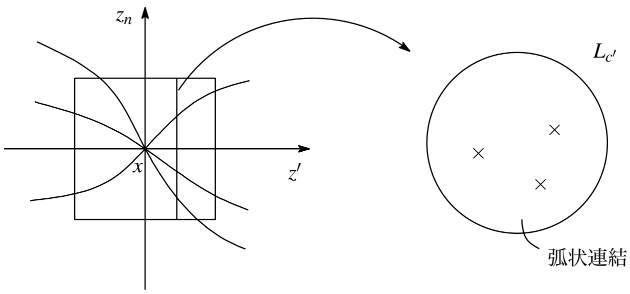
超曲面 X の点 x の近傍における定義函数 f をとる．点 x における正則函数の芽のなす環 $\mathcal{O}_n$ の中で既約元分解して $f=f_1\cdots f_m$ とする（重複する因子があれば省いておく）．x の近傍 U を充分小さくとり，$X_i=\{z\in U \mid f_i(z)=0\}$ とおけば，

$$X\cap U=X_1\cup\cdots\cup X_m \tag{9.1}$$

である．これを超曲面 X の点 $x\in X$ における**既約分解**という．

Weierstraßの予備定理（定理 8.2）とそのあとの注意の (3) により，原点の近傍における局所座標 $(z_1,\dots,z_n)=(z',z_n)$ をうまくとり直せば $f_i(z)=u_i(z)h_i(z',z_n)$（u_i は単元，h_i は Weierstraß多項式）とできる．したがって X_i は x の充分近くでは $\{h_i(z',z_n)=0\}$ とも表される．x の近傍 U をあらためて充分小さくとり直し，かつ直積の形 $U=U'\times U''$ $(U'\subset\mathbb{C}^{n-1},U''\subset\mathbb{C})$ にしておいて，h_i の判別式をとって U' 上の正則函数 $\delta_i(z')$ を作る．これは U' 上で恒等的に 0 ではない．射影 $\pi: X_i\cap U\to U'$ を判別式が 0 にならないところ $Y_i=\pi^{-1}(U'\setminus\{\delta_i=0\})$ に制限したものは，$U'\setminus\{\delta_i=0\}$ の上への被覆写像になる．そして，実は U における Y_i の閉包 $\overline{Y}_i$ が $X_i\cap U$ に一致する．

次に，点 $x\in X$ の近傍 U で上と同じように局所座標をとりかえ，X の定義函数を Weierstraß多項式にして，U を直積 $U'\times U''$ の形で小さくとり直す．そうしておいて，X を $z'=c'$ $(c'\in U')$ なる直線 $L_{c'}$ で切ってみよう．次の図は，点 x の近傍 U における，X と $L_{c'}=\{z'=c'\}$ なる集合との交わりを描いたものである．



すなわち，$L_{c'}\setminus X$ は連結である．ここで c' を U' の中で動かして考えることにより，$U\setminus X$ は連結で，この集合は U の中で稠密であることがわかる．

命題 9.3. 超曲面 $X\subset D$ について，$D\setminus X$ は連結であり（すなわち，領域であり），これは D の中で稠密である．

証明　上で考察したことから，$D\setminus X$ が D で稠密であることはもうわかった．$D\setminus X$ が連結であることを示す．$D\setminus X$ の任意の 2 点 x,y をとり，両者を結ぶ D 内の曲線 γ をとる．γ の各点 $\gamma(t)$ に対し，その近傍 U_t で，$U_t\setminus X$ が連結であるようなものがとれる．$\{U_t\}_{0\le t\le 1}$ は γ の開被覆である．$0=t_0<t_1<\cdots<t_N=1$ を，$U_{t_{k-1}}\cap U_{t_k}$ $(k=1,\dots,N)$ が空でないよ

うにとることができる．以下では U_{t_k} を単に U_k と書くことにしよう．各 $U_{k-1}\cap U_k$ から X 上にない点 x_k をとり，$x_0=x, x_{N+1}=y$ とすれば，すべての $k=0,1,...,N$ について x_k, x_{k+1} はともに $U_k\setminus X$ に属するから，$U_k\setminus X$ の曲線により x_k と x_{k+1} を結ぶことができる．こうして $x=x_0$ と $y=x_{N+1}$ が $D\setminus X$ の曲線で結ばれる．したがって $D\setminus X$ は弧状連結で，ゆえに連結である． ■

注意　$\mathbb{R}^n$ の領域 D における超曲面 X を考えても，$D\setminus X$ は連結にならないことに注意しよう．

定理 9.4. 領域 $D\subset\mathbb{C}^n$ の超曲面 X について，X は点 x で**既約**であるとする（すなわち，既約な $f\in\mathcal{O}_x$ によって，x の充分小さな開近傍 U で $X\cap U=\{f=0\}$ と表せるとする）．そのとき，もし U 上の正則函数 g が $g|_{X\cap U}\equiv 0$ を満たすならば，$\mathcal{O}_x$ において $f\mid g$ である．

証明　Weierstraßの予備定理（定理 8.2）により f を k 次の Weierstraß多項式としてよい．Weierstraßの割算定理（定理 8.3）を用いて

$$g=fq+r,\qquad (r\in\mathcal{O}_{n-1}[z_n], \deg r<k)$$

と表したとき，$f|_{X\cap U}\equiv g|_{X\cap U}\equiv 0$ であることから $r|_{X\cap U}\equiv 0$ である．ところが，$\{\delta(z')\neq 0\}$ 上の z' に対し $f(z',z_n)$ は k 個の根を持つので，命題 9.3 も考慮すると $r|_{X\cap U}\equiv 0$. よって $f\mid g$ である． ■

領域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 上の正則函数 f に対し，$V(f)=\{z\in D \mid f(z)=0\}$ と書く．

命題 9.5. f, g を領域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 上の正則函数とするとき，$\{x\in D \mid f_x, g_x\in\mathcal{O}_x$ で互いに素 $\}$ は開集合である．

証明　$x\in D$ で $f_x, g_x\in\mathcal{O}_x$ が互いに素であるとする．そのとき $V(f)$ と $V(g)$ は x で共通の既約成分を持たないので，定理 9.4 により，$V(f)\cap V(g)$ は x の近傍 U において，特異点を持つ $n-2$ 次元の部分多様体となる．したがって f, g は U の各点でも互いに素となる．なぜならば，もし $x'\in U$ で f, g が互いに素でなければ，単元でない $h\in\mathcal{O}_{x'}$ で $h\mid f, h\mid g$ となるものが存在するが，$V(f)\cap V(g)\supset V(h)$ は，左辺が $n-2$ 次元，右辺が $n-1$ 次元であることに矛盾するからである． ■

定理 9.6 (Riemann の除去可能特異点定理). $D\subset\mathbb{C}^n$ を領域，$X\subset D$ を超曲面とする．f が $D\setminus X$ で正則で，かつ任意の $x\in D$ に対してその近傍 $U\subset D$ が存在して $f|_{U\setminus X}$ が有界であるとする．そのとき，D 上の正則函数 $\tilde{f}$ が存在して，$f=\tilde{f}|_{D\setminus X}$ である．

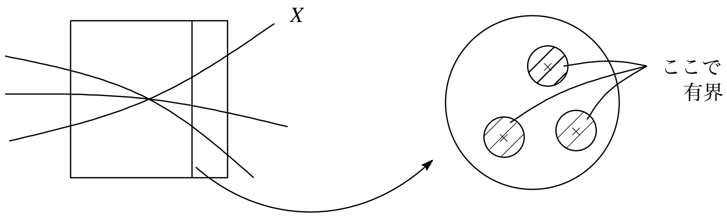
この状況のとき，f の特異点 X は**除去可能**であるという．f は自然に D まで正則に拡張されたとみなし，その拡張を同じ f で表す．

証明 任意の $x \in X$ に対し，その適当な近傍 $U \subset D$ で正則な $\tilde{f}$ で，$\tilde{f}|_{U\setminus X} = f|_{U\setminus X}$ なるものを作ればよい．$x = 0$ としてかまわない．Weierstraß多項式 h により $X \cap U = \{h(z', z_n) = 0\}$ と表されるとしてよい．

Weierstraßの予備定理（定理 8.2）の証明でやったように，$s', s_n > 0$ をうまくとれば，$|z'| \leq s'$ なる z' を固定すると $h(z', z_n)$ は $|z_n| < s_n$ で k 個根を持ち，$|z_n| = s_n$ 上には根がないようにできる．

$$\tilde{f}(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = s_n} \frac{f(z', \zeta) d\zeta}{\zeta - z_n} \tag{9.2}$$

とおけば $\tilde{f}$ は $|z'| < s'$, $|z_n| < s_n$ 内で正則である．z' を固定すると $f(z', z_n)$ は，定理の仮定と 1 変数の場合の除去可能特異点定理（定理 7.4）より $|z_n| \leq s$ で正則な函数になるから，式 (9.2) の右辺は $(z', z_n) \in U \setminus X$ に対し $f(z', z_n)$ に等しい．



■

なお，余次元を 1 でなく 2 とすれば，次の結果がある．

定理 9.7. X を領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ の特異点を持つ $n-2$ 次元の部分多様体とする．そのとき，f が $D \setminus X$ で正則ならば，D 上正則な $\tilde{f}$ で $f = \tilde{f}|_{D\setminus X}$ なるものが存在する．

9.2 有理型函数

$D \subset \mathbb{C}^n$ を領域とする．D の各点の近傍で 2 つの正則函数の比で書けるような函数を有理型函数という．正確には次のように定義される．

定義 9.8. 領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上の**有理型函数**とは，**除外集合**と呼ばれるある疎*な閉部分集合 $E \subset D$ を除いた $D \setminus E$ で定義された正則函数 f であって，任意の $z \in D$ に対し z の近傍

*位相空間 D の部分集合 A が**疎** (nowhere dense) であるとは，A の閉包 $\overline{A}$ が内点を持たないことをいう．

$U \subset D$ および U 上の正則函数 p, q があって $f(z) = p(z)/q(z)$ $(z \in U \setminus E)$ と書けるものをいう．

$\mathcal{O}_x$ で p, q の公約因子を割ってしまうことにより，p, q が $\mathcal{O}_x$ で互いに素となるようにとれる．そのようにしたとき p, q をそれぞれ**局所分子**，**局所分母**と呼ぶ．このとき，命題 9.5 により，必要ならば U を小さくとり直せば，任意の点 $x' \in U$ において p, q は互いに素となる．すなわち，p, q は任意の $x' \in U$ に対して局所分子，局所分母になっている．以下では，p, q, U はそのようにとってあるものとする．

D 上の有理型函数 f の特異点を調べよう．$\mathrm{Sing}(f) \subset D$ を f の**特異点**の集合とする．すなわち，除外集合 E の点のうち，その点の近傍に f を正則に拡張できないようなものの集合とする．

命題 9.9. 上の状況で，$\mathrm{Sing}(f) \cap U = \{z \in U \mid q(z) = 0\}$ である．

証明 $z \in U, q(z) \neq 0$ ならば z の近傍でも q は 0 にならないから，z の近傍で f をあらためて p/q で定義すればこれは正則である．

逆に $q(z) = 0$ とする．もし z の近傍で f が正則函数に接続できたとすると，$qf = p$ だから，$\mathcal{O}_z$ において $q \mid p$ である．q は単元でない．これは p, q が互いに素とした仮定に反する． ■

したがって $\mathrm{Sing}(f)$ は D の超曲面となる．$\mathrm{Sing}(f)$ の点は 2 つに分類される．

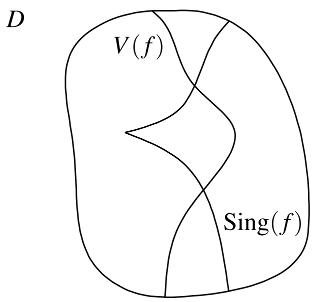
(1) $z \in \mathrm{Sing}(f), p(z) \neq 0$ のとき z を f の**極**という．

(2) $z \in \mathrm{Sing}(f), p(z) = 0$ のとき z を**不確定点**という．

よって $\mathrm{Sing}(f)$ の不確定点は特異点を持つ $n-2$ 次元部分多様体をなす．

$$V(f) = \{z \in D \mid f(z) = 0\} \cup \{\text{ 不確定点 }\} = \{z \in D \mid p(z) = 0\} \tag{9.3}$$

と定める．これは D の超曲面である．$\mathrm{Sing}(f) \cap V(f) = \{\text{ 不確定点 }\}$ となる．



定理 9.10. $D \subset \mathbb{C}^n$ を領域，$X \subset D$ をその超曲面とする．f が $D \setminus X$ で定義された正則函数で，特異点を持つ $n-2$ 次元部分多様体 $Y \subset X$ があって任意の $x \in X \setminus Y$ に対し

$$\lim_{z \to x,\, z \in D \setminus X} |f(z)| = \infty \tag{9.4}$$

であるならば，f は D 上の有理型函数である．

証明の概略 任意の $x \in X \setminus Y$ に対し，x のある近傍 U が存在して，$\inf_{z \in U \setminus X} |f(z)| \geq M > 0$ となる．よって $1/f(z)$ は $U \setminus X$ で正則かつ $\sup_{z \in U \setminus X} |1/f(z)| \leq 1/M$ だから，Riemann の除去可能特異点定理（定理 9.6）より $1/f(z)$ は U で正則．これで $f(z)$ は $D \setminus Y$ で有理型であることがわかった．そのような f は，実は D 上の有理型函数であることが知られている*．■

9.3　1 変数の有理型函数

領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の有理型函数は，定義 9.8 にしたがえば次のように定義されることがわかる．D の点の集合 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ を集積点を持たないとする．そのとき，$D \setminus \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で正則，かつ各 a_n での Laurent 展開の主要部が有限項となる函数を**有理型函数**という．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の点は**極**と呼ばれる．

各 a_n に対し，$\Delta(a_n; \varepsilon)$ には a_n 以外に極がないように $\varepsilon > 0$ をとり，

$$\mathrm{Res}(f, a_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a_n|=\varepsilon} f(z)dz \tag{9.5}$$

と定める．これを f の a_n における**留数**という†．これはまた，a_n における f の Laurent 展開の $1/(z-a_n)$ の係数ということもできる．

f を領域 D で定義された有理型函数とし，γ を D 内の区分的に C^1 級の Jordan 閉曲線，D' を γ で囲まれた領域とする．

定理 9.11. 有理型函数 f が D' 内に有限個の極 $a_1, ..., a_k$ を持つとき

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(f, a_i). \tag{9.6}$$

---

*__Levi の接続定理__と呼ばれる．たとえば，H. Grauert & R. Remmert, *Coherent Analytic Sheaves,* Springer–Verlag の Chapter 9, §5 を参照せよ．

†留数は有理型函数でなくても定義できる．次の定理 9.11 も，定理の主張中の「極」を「孤立特異点」と読み替えれば，f が有理型函数でなくても成立する．

定理 9.12. 有理型函数 f が D' 内に零点，極を重複度を込めてそれぞれ N 個，P 個持つとすれば

$$N-P=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi}\int_\gamma d\arg f(z). \tag{9.7}$$

定理 9.13. 有理型函数 f の D' 内にある零点を $a_1, ..., a_N$, 極を $b_1, ..., b_P$ とし，$g(z)$ を $\overline{D'}$ を含む領域で正則な函数とすると

$$\sum_{i=1}^{N} g(a_i)-\sum_{i=1}^{P} g(b_i)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz. \tag{9.8}$$

9.4 Mittag-Leffler の定理

次に考えたいのはこの問題である．

問題. $D\subset\mathbb{C}$ を領域とする．次のデータが与えられたとする．

(1) D 内に集積点を持たない点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$（a_n たちは互いに相異なる）．

(2) a_n を中心として収束する（つまり $1/(z-a_n)$ の冪級数として収束半径 ∞ である）ような級数 $f_n(z)=\displaystyle\sum_{\nu=1}^\infty \frac{A_\nu^{(n)}}{(z-a_n)^\nu}$.

そのとき，$D\setminus\{a_n\}_{n=1}^\infty$ で正則な函数 f で，各 a_n での Laurent 展開の主要部が f_n と一致するようなものを見つけよ*.

定理 9.14 (Mittag-Leffler の定理). 上の問題は常に解ける．

証明 $\underline{D\subsetneq\mathbb{C}\text{ のとき}}$．$\mathrm{dist}(a_n,\partial D)=r_n$ として，$|c_n-a_n|=r_n$ となる $c_n\in\partial D$ をとっておく．$f_n(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{a_n\}$ で正則だから特に $|z-c_n|>r_n$ で正則なので，点 c_n を中心とした Laurent 展開 $\displaystyle\sum_{\nu=0}^\infty \frac{B_\nu}{(z-c_n)^\nu}$ の部分和 g_n をとって

(i) $|f_n(z)-g_n(z)|<\varepsilon_n$ $(z\in\mathbb{C}\setminus\overline{\Delta}(c_n;2r_n))$,

(ii) $g_n(z)$ は $\mathbb{C}\setminus\{c_n\}$ 上正則

となるようにする．ここで $\varepsilon_n>0$ は $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n<\infty$ となるものをあらかじめ定めておく．

$$\sum_{n=1}^\infty (f_n(z)-g_n(z))=\varphi(z)$$

*(2) の f_n たちのうちに有限項で終わらず無限級数になっているものがあれば，求める f は有理型函数ではないことに注意．9.4 節の内容は 9.3 節とは関係ない．

とする．この φ が $D\setminus\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 上の正則函数を定めることを確かめよう．$f_n(z)-g_n(z)$ は $D\setminus\{a_n\}$ で正則である．任意の $a\in D\setminus\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し a を中心として $D\setminus\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に含まれる円板 Δ をとり，その半径を半分にした円板を $\Delta/2$ で表す．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は集積点を持たないから，$|z-c_n|\le 2r_n$ なる円板と $\Delta/2$ が交わるような n は有限個しかない．だから，充分 N を大きくとれば

$$\frac{\Delta}{2}\subset\{z\mid |z-c_n|>2r_n\}\qquad (n\ge N).$$

すると

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty}(f_n(z)-g_n(z))\right|\le\sum_{n=N}^{\infty}|f_n(z)-g_n(z)|\le\sum_{n=N}^{\infty}\varepsilon_n\qquad\left(z\in\frac{\Delta}{2}\right).$$

ゆえに $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}(f_n-g_n)$ は $\Delta/2$ で一様絶対収束し，正則函数を定める．こうして $\varphi(z)$ は $D\setminus\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で正則であることがわかった．

$$\varphi(z)-(f_k(z)-g_k(z))=\sum_{n\ne k}(f_n(z)-g_n(z))$$

は a_k の近傍で正則である．そして $g_k(z)$ も a_k の近傍で正則だから，$\varphi(z)$ の a_k における Laurent 展開の主要部は f_k に一致する．

<u>$D=\mathbb{C}$ のとき</u>．$0\notin\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と仮定してよい．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は集積点を持たないから $|a_n|\to\infty$ $(n\to\infty)$ である．

$f_n(z)$ は $\Delta(0;|a_n|)$ で正則なので，原点で f_n を Taylor 展開してその部分和 g_n をとり

$$|f_n(z)-g_n(z)|<\varepsilon_n\qquad\left(z\in\Delta\left(0;\frac{|a_n|}{2}\right)\right)$$

とできる．あとは $D\subsetneq\mathbb{C}$ の場合と同様にして，$\varphi(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(f_n(z)-g_n(z))$ は $\mathbb{C}\setminus\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で広義一様収束して正則函数となり，$\varphi(z)$ の a_n における Laurent 展開の主部が $f_n(z)$ に一致していることが示せる．■

系 9.15. f を D 上の有理型函数とする．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D$ を f の極の集合とし*，f の点 a_n における主要部を f_n とする．すると D 上の正則函数 g および g_n $(n=1,2,...)$ が存在して

$$f(z)=g(z)+\sum_{n=1}^{\infty}(f_n(z)-g_n(z))\tag{9.9}$$

となる．

*D 上の有理型函数の極は高々可算無限個しかない．実際，D は局所コンパクトかつ第 2 可算公理を満たすから，D の相対コンパクトな開部分集合からなる開被覆 $\mathcal{U}$ で，その濃度が高々可算であるようなものがとれる．極全体の集合は集積点を持たないから $\mathcal{U}$ の各々の元には極が有限個ずつしか属さない．

証明 Mittag-Leffler の定理（定理 9.14）の函数は $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(f_n(z) - g_n(z))$ の形で作られる．$f(z) - \varphi(z) = g(z)$ は正則である． ■

例 9.16. 系 9.15 を用いると次のような部分分数分解が得られる．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sin z} &= \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (-1)^n \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2\pi^2}, \\
\frac{1}{\cos z} &= 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-(2n-1)\pi/2} + \frac{1}{(2n-1)\pi/2}\right), \\
\cot z &= \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}, \\
\tan z &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z-(2n-1)\pi/2} + \frac{1}{(2n-1)\pi/2}\right), \\
\operatorname{cosec}^2 z &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2}, \\
\sec^2 z &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-(2n-1)\pi/2)^2}.
\end{aligned}
$$

9.5　Weierstraßの因数分解定理

問題. 集積点を持たない点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ が与えられているとする．そのとき，$\mathbb{C}$ 上の正則函数でちょうど $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で零点を持つようなものを作れ．（$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ には同じ点が有限回重複して現れていてもよい．$a = a_n$ となるような n が k 個あるとき，a で k 位の零点を持つようにする．）

定理 9.17 (Weierstraßの因数分解定理). (1) 上の問題は常に解ける．

(2) 逆に，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ でちょうど零点を持つような正則函数 f は

$$
f(z) = z^h e^{g(z)} \prod_{a_n\neq 0} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\lambda_n}} \tag{9.10}
$$

と無限積展開できる．ここで $g(z)$ は $\mathbb{C}$ 上の正則函数，h は $a_n = 0$ なる n の個数，λ_n は正数で任意の $R > 0$ に対し $\sum_{a_n\neq 0} \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{\lambda_n+1} < \infty$ を満たすものである*．

*たとえば，$\lambda_n = n$ ならばよい．

証明 (1) $a_n = 0$ となる n はないとして一般性を失わない．

$$\varphi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\lambda_n}} \tag{9.11}$$

とおく．これが求める函数になっていることを示す．

$$E(z,\lambda) = (1-z)e^{z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots + \frac{1}{\lambda}z^\lambda}$$

とおき，$|z| < 1$ で $\log E(z,\lambda)$ の次の分枝をとる．

$$\log E(z,\lambda) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}z^k + z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots + \frac{1}{\lambda}z^\lambda = -\sum_{k=\lambda+1}^{\infty} \frac{1}{k}z^k.$$

すると

$$|\log E(z,\lambda)| \leq \sum_{k=\lambda+1}^{\infty} |z|^k = \frac{|z|^\lambda}{1-|z|}.$$

特に $|z| < 1/2$ では $|\log E(z,\lambda)| \leq 2|z|^{\lambda+1}$ となる．

式 (9.11) の右辺が $|z| < R$ で収束することを示そう．$n \geq N$ のとき $R \leq |a_n|/2$ であるように N をとると，$n \geq N$ に対しては

$$\left|\log\left\{\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\lambda_n}}\right\}\right| = \left|\log E\left(\frac{z}{a_n}, \lambda_n\right)\right| \leq 2\left|\frac{z}{a_n}\right|^{\lambda_n+1} \tag{9.12}$$

であり，λ_n についての仮定により $|z| < R$ で和 $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} 2\left|\frac{z}{a_n}\right|^{\lambda_n+1}$ は一様収束．したがって (9.12) の左辺の和も一様絶対収束する．ゆえに

$$\prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\lambda_n}}$$

は，$|z| < R$ で値 0 をとらない函数に一様絶対収束する．これに

$$\prod_{n=1}^{N-1} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\lambda_n}}$$

をかけたのが (9.11) の右辺なので，$\varphi(z)$ は $|z| < R$ で正則で，$|a_n| < R$ であるような a_n を零点に持っている．$R > 0$ は任意なので，$\varphi(z)$ が問題の要請を満たす函数であることがわかった．

(2) (1) からただちにわかる．単連結領域で値 0 をとらない正則函数はある正則函数 g によって $e^{g(z)}$ と表されることに注意すればよい．■

例 9.18 (Weierstraß)**.** $\displaystyle\sin z = z \prod_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{\frac{z}{n\pi}} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$

系 9.19. f が $\mathbb{C}$ で有理型ならば，f は $\mathbb{C}$ 上共通零点を持たない 2 つの正則函数の比で表される．より具体的には，f の零点を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 極を $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ としたとき，

$$f(z) = z^k e^{g(z)} \frac{\displaystyle\prod_{a_n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\lambda_n}}}{\displaystyle\prod_{b_n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{b_n}\right) e^{\frac{z}{b_n} + \left(\frac{z}{b_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{\mu_n}\left(\frac{z}{b_n}\right)^{\mu_n}}} \tag{9.13}$$

と表せる．

第 10 講

6 月 22 日

10.1 Γ 函数

定義 10.1. 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の領域 $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ で

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{10.1}$$

と定める*．ここで $t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$ とする．$|e^{(z-1)\log t}| = e^{(\mathrm{Re}\, z-1)\log t} = t^{\mathrm{Re}\, z-1}$ である．

$\Gamma(z)$ は $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ では z の函数として正則である．各階の導函数は

$$F_n(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} (\log t)^n dt \tag{10.2}$$

で与えられる．このことを確かめるには，(10.2) の右辺の広義積分を $\int_0^1$ と $\int_1^\infty$ に分けて，それぞれ $\{a \le \mathrm{Re}\, z\}$, $\{\mathrm{Re}\, z \le b\}$ で一様収束することをいう．すると (10.1) において積分記号下の微分が許されることがわかり，$\Gamma^{(n)}(z) = F_n(z)$ を得る†.

$\Gamma(z)$ は複素平面全体に有理型函数として拡張できる．$\mathrm{Re}\, z > 0$ に対して

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \Big[-e^{-t} t^z\Big]_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z) \tag{10.3}$$

だから

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \qquad (\mathrm{Re}\, z > -1) \tag{10.4}$$

とおけば $\mathrm{Re}\, z > -1$ に拡張される．さらに一般に

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+k)}{z(z+1)\cdots(z+k-1)} \qquad (\mathrm{Re}\, z > -k) \tag{10.5}$$

---

*この Γ 函数の定義は Euler によるものである．

†詳しくは，たとえば杉浦光夫『解析入門 I』（東京大学出版会），第 IV 章，定理 15.1 を見よ．

とする．この函数を Γ **函数**という．極は $z=0,-1,-2,...$ にある（すべて 1 位である）．

$\Gamma(z)$ の部分分数展開を与えよう．$\mathrm{Re}\,z>0$ で

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt + \underbrace{\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt}_{z\in\mathbb{C}\text{ で正則}} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\end{aligned} \tag{10.6}$$

である*．(10.6) の左辺は $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,...\}$ で正則だが，右辺も Weierstraßの二重級数定理 (定理 1.6) によりそうなので，一致の定理 (定理 1.9) により (10.6) は $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,...\}$ 全体で成立する．したがって $\mathrm{Res}(\Gamma,-n)=(-1)^n/n!$ である．

定理 10.2 (Gauß表示).

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \tag{10.7}$$

証明 $\mathrm{Re}\,z>0$ に対しては，(10.1) を次のように変形できる（1 行目の等式の証明はあとで行う）．

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-t}t^{z-1}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1-s)^n n^z s^{z-1}ds \\ &= \lim_{n\to\infty} n^z\left\{\left[\frac{s^z}{z}(1-s)^n\right]_0^1 + n\int_0^1\frac{s^z}{z}(1-s)^{n-1}ds\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} n^z\cdot n\left\{\left[\frac{s^{z+1}}{z(z+1)}(1-s)^{n-1}\right]_0^1 + (n-1)\int_0^1\frac{s^{z+1}}{z(z+1)}(1-s)^{n-2}ds\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} n^z\cdot n!\left[\frac{s^{z+n}}{z(z+1)\cdots(z+n)}\right]_0^1 = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}.\end{aligned}$$

それでは 1 行目の等式の証明をしよう．

$$I_n=\int_0^n e^{-t}t^{z-1}dt-\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt=\int_0^n\left\{e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}t^{z-1}dt$$

とおく．

$0\le t\le n$ では $0\le e^{-t}-(1-t/n)^n\le t^2/2n$ が成り立つ．なぜなら，

$$f(t)=1-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$$

*Prym の分割法と呼ばれる．

と定義すると

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= -e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n - e^t\cdot n\cdot\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\\
&= -e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\left(1-\frac{t}{n}-1\right) = \frac{te^t}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \geq 0
\end{aligned}
$$

だから $0 \leq t \leq n$ では $f(t) \geq 0$ なので

$$
0 \leq f(t) = \int_0^t e^s\left(1-\frac{s}{n}\right)^{n-1}\frac{s}{n}ds \leq e^t\int_0^t \frac{s}{n}ds = e^t\cdot\frac{t^2}{2n}
$$

となるからである．よって

$$
\begin{aligned}
|I_n| &\leq \int_0^n \left|e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right| |t^{z-1}|dt\\
&= \int_0^a \left|e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right| t^{x-1}dt + \int_a^n \left|e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right| t^{x-1}dt\\
&\leq \int_0^a \frac{t^{x+1}}{2n}dt + \int_a^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = \frac{a^{x+2}}{2n(x+2)} + \int_a^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.
\end{aligned}
$$

任意にとった $\varepsilon > 0$ に対して，a を（z に応じて）充分大きい値にして固定すれば，$\displaystyle\int_a^\infty e^{-t}t^{x-1}dt < \varepsilon$ とできる．そうしたとき

$$
|I_n| < \frac{a^{x+2}}{2n(x+2)} + \varepsilon.
$$

ここで $n \to \infty$ とすると $a^{x+2}/2n(x+2) \to 0$ だから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|I_n| = 0$.

一般の z に対しては，$\mathrm{Re}\,z > 0$ についての上の結果と (10.5) を合わせて用いると

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+k)}{z(z+1)\cdots(z+k-1)}\\
&= \frac{1}{z(z+1)\cdots(z+k-1)}\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{z+k}}{(z+k)(z+k+1)\cdots(z+k+n)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(z+n+1)(z+n+2)\cdots(z+n+k)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}
\end{aligned}
$$

である． ■

定理 10.3 (Weierstraß表示).

$$
\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}. \tag{10.8}
$$

ただし，γ は **Euler 定数** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k}-\log n\right)$ を表す．

証明 Gauß表示（定理 10.2）より

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n\to\infty} n^{-z}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!} = \lim_{n\to\infty} n^{-z} z \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{-z\log n} z e^{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{z\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)} z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}.\end{aligned}$$

右辺の無限積は，充分大きな k に対して

$$\begin{aligned}\left|\log\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right| &= \left|\log\left(1+\frac{z}{k}\right)-\frac{z}{k}\right| \\ &= \left|-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{k}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{k}\right)^3-\cdots\right| \leq \frac{|z/k|^2}{1-|z/k|} \leq 2\left|\frac{z}{k}\right|^2\end{aligned}$$

だから収束する．これで示された． ■

定理 10.4 (反転公式).

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}. \tag{10.9}$$

証明

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} &= \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)\cdot(-z)} = \frac{ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\cdot(-z)e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}}{-z} \\ &= z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin\pi z}{\pi}.\end{aligned}$$

なお，一番最後に例 9.18 を用いた． ■

系 10.5.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}. \tag{10.10}$$

証明 反転公式（定理 10.4）から $\Gamma(1/2)^2 = \pi$ である．ところで

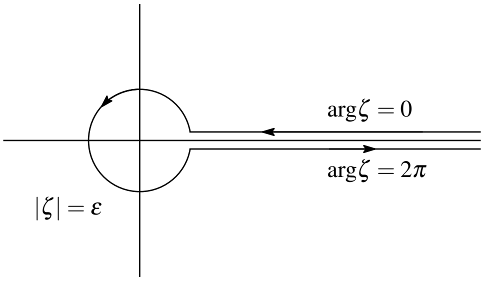
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}dt = 2\int_0^{\infty}e^{-s^2}ds > 0$$

なので，(10.10) が成り立つ． ■

定理 10.6.

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \int_C e^{-\zeta} \zeta^{z-1} d\zeta \qquad (z \notin \mathbb{Z}). \tag{10.11}$$

ただし C は図のような曲線.



証明 $I(z) = \int_C e^{-\zeta} \zeta^{z-1} d\zeta$ とおく．これは $z \in \mathbb{C}$ で正則である.

$$I(z) = (e^{2\pi i z} - 1)\Gamma(z) \qquad (\mathrm{Re}\, z > 0)$$

を示す．そうすれば，一致の定理（定理 1.9）により (10.11) がしたがう.

$$I(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_\infty^\varepsilon e^{-t} t^{z-1} dt + \int_{|\zeta| = \varepsilon} e^{-\zeta} \zeta^{z-1} d\zeta + \int_\varepsilon^\infty e^{-t} (e^{2\pi i} t)^{z-1} dt \right\}.$$

右辺の中かっこの中の第 1 項，第 3 項の極限はそれぞれ $-\Gamma(z)$, $e^{2\pi i z}\Gamma(z)$ で

$$\begin{aligned} \left| \int_{|\zeta|=\varepsilon} e^{-\zeta} \zeta^{z-1} d\zeta \right| &\le \int_{|\zeta|=\varepsilon} |e^{-\zeta}| \varepsilon^{x-1} |d\zeta| \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-\varepsilon \cos\theta} \varepsilon^x d\theta \le e^\varepsilon \varepsilon^x \cdot 2\pi \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0). \end{aligned}$$

これで示された. ■

系 10.7 (Hankel の積分表示).

$$\Gamma(z) = \frac{-1}{2i \sin \pi z} \int_C e^{-\zeta} (-\zeta)^{z-1} d\zeta \qquad (z \notin \mathbb{Z}). \tag{10.12}$$

定理 10.8.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{-\zeta} (-\zeta)^{-z} d\zeta. \tag{10.13}$$

証明 Hankel の積分表示（系 10.7）と反転公式（定理 10.4）により

$$\Gamma(1-z) = \frac{-1}{2i \sin \pi z} \int_C e^{-\zeta} (-\zeta)^{-z} d\zeta = \frac{-\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{2i\pi} \int_C e^{-\zeta} (-\zeta)^{-z} d\zeta.$$

両辺を $\Gamma(1-z)$ で割ればよい．式 (10.13) の両辺はともに連続だから，この式は $z \in \mathbb{Z}$ も含めて正しい. ■

10.2　Stirling の公式

Γ 函数は $z=\infty$ で有理型でない．有理型函数が $z=\infty$ も含めて有理型だと有理函数になってしまうからである．

$\{a<\arg z<b\}$ $(\subset \mathbb{C}\setminus\{0\})$ の形の領域を**角領域**と呼ぶ．

定義 10.9. $f(z)$ が角領域 $\{a<\arg z<b\}$ で正則であるとする．また，r を正の整数とする．このとき形式的級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{z^{k/r}}$ が $f(z)$ の $z=\infty$ における**漸近展開**であるとは，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\lim_{|z|\to\infty,\, a<\arg z<b} z^{n/r}\left(f(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{z^{k/r}}\right)=0 \tag{10.14}$$

となることをいう．このとき

$$f(z)\approx\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{z^{k/r}} \tag{10.15}$$

と書く．

上記の条件式 (10.14) は

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{z^{k/r}}+o\left(\frac{1}{z^{n/r}}\right) \tag{10.16}$$

と書くこともできる．

補題 10.10. $F(\tau)$ は角領域 $\{-\varepsilon<\arg\tau<\varepsilon\}$ で定義された正則函数で，$\tau=0$ の近くで次のように展開できるようなものとする．

$$F(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\tau^{n/r-1} \qquad (r\text{ は正の整数}). \tag{10.17}$$

また，ある正定数 $K,b>0$ が存在し，任意の τ に対し $|F(\tau)|<Ke^{b|\tau|}$ が成立するとする．そのとき，

$$f(z)=\int_0^{\infty}e^{-z\tau}F(\tau)d\tau \tag{10.18}$$

とおくと（F の **Laplace 変換**），$|\arg z|<\pi/2$ において f は

$$f(z)\approx\sum_{n=1}^{\infty}a_n\Gamma\left(\frac{n}{r}\right)z^{-n/r} \tag{10.19}$$

なる漸近展開を持つ．

証明

$$\int_0^\infty e^{-z\tau}\left(\sum_{k=1}^n a_k\tau^{k/r-1}\right)d\tau = \sum_{k=1}^n a_k\int_0^\infty e^{-z\tau}\tau^{k/r-1}d\tau = \sum_{k=1}^n a_k\Gamma\left(\frac{k}{r}\right)z^{-k/r}$$

である*．これを $s_n(z)$ とおく．任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$\lim_{|z|\to\infty,\ |\arg z|<\pi/2-\varepsilon} z^{n/r}|f(z)-s_n(z)|=0$$

となることを示せばよい．以下では，正定数を一般に C で表す（共通の値だというわけではなく，現れるたびに異なる値をとる）．

仮定より $\tau=0$ の近くでは

$$\left|F(\tau)-\sum_{k=1}^n a_k\tau^{k/r-1}\right|\le C|\tau|^{(n+1)/r-1}$$

で，$|\tau|$ が大きいところでは

$$\left|F(\tau)-\sum_{k=1}^n a_k\tau^{k/r-1}\right|\le Ce^{b|\tau|}.$$

よって，$a>0$ を適切にとれば，任意の z（$=x+iy$ と書く）に対し

$$|f(z)-s_n(z)|\le C\left(\int_0^a e^{-\tau x}\tau^{(n+1)/r-1}d\tau+\int_a^\infty e^{-\tau x}e^{b\tau}d\tau\right).$$

右辺のかっこの中の第 1 項は $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\tau x}\tau^{(n+1)/r-1}d\tau=\frac{1}{x^{(n+1)/r}}\Gamma\left(\frac{n+1}{r}\right)$ で上からおさえられる．ゆえに

$$|z|^{n/r}|f(z)-s_n(z)|\le C\left(\frac{|z|^{n/r}}{x^{(n+1)/r}}+\frac{|z|^{n/r}}{x-b}\cdot e^{-a(x-b)}\right).$$

z の動く範囲を $|\arg z|<\pi/2-\varepsilon$ に制限しておけば，$|z|\to\infty$ のとき $x\to\infty$ となるから，右辺は 0 に収束する．これで示された． ■

*2 つ目の等号は明らかではないので説明しておく．$I_k=\displaystyle\int_0^\infty e^{-z\tau}\tau^{k/r-1}d\tau$ とおこう．まず $z\tau$ をあらためて τ とおけば，この積分は $\displaystyle\int e^{-\tau}\tau^{k/r-1}z^{-k/r}d\tau$ と書き換えられる．積分路は半直線 $\tau=zt,\ 0\le t$ である．ところがここで積分路を実軸正の部分に取りかえても積分の値は変わらず（なぜか？），したがって $I_k=\displaystyle\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{k/r-1}z^{-k/r}d\tau=\Gamma(k/r)z^{-k/r}$ となるのである．

定理 10.11 (Stirling の公式). $\mathrm{Re}\,z > 0$ で $\Gamma(z)$ は次の漸近展開を持つ*.

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}. \tag{10.20}$$

ここで $a_0 = 1, a_1 = 1/12, ...$ である.

証明 $\mathrm{Re}\,z > 0$ の範囲で z をひとつ固定して考える.

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\left(\frac{z}{e}\right)^z} = \frac{\int_0^\infty e^{-t} t^z dt}{e^{z\log z - z}} = \int_0^\infty e^{-w(t)} dt.$$

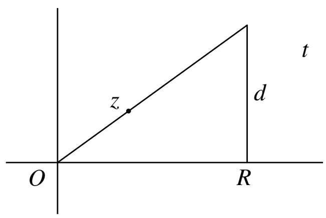
ただしここで $w(t) = t - z\log t - (z - z\log z)$ とおいた．書き換えると

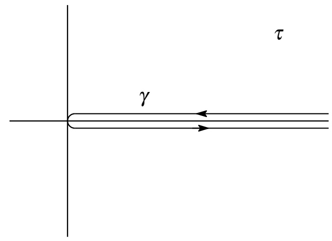
$$w(t) = z\left(\frac{t-z}{z} - \log\left(1 + \frac{t-z}{z}\right)\right).$$

$\tau = w/z$ とおく．$s = (t-z)/z$ とすれば $\tau = s - \log(1+s)$ で，$s = 0$ の近傍では（つまり $t = z$ の近傍では）

$$\tau = \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3} + \frac{s^4}{4} - \cdots$$

である.





積分変数を t から τ に変換する．$\lim_{R\to\infty} \int_d e^{-t} t^z dt = 0$ であることから積分路を $C : t = z\lambda$, $0 < \lambda < \infty$ に置き換えてよい．そうすれば

$$\frac{\Gamma(z+1)}{(z/e)^z} = \int_\gamma e^{-z\tau} \frac{dt}{d\tau} d\tau = z\int_\gamma e^{-z\tau} \frac{ds}{d\tau} d\tau.$$

γ の $+\infty \to 0$ の部分は $-1 < s < 0$ に，$0 \to +\infty$ の部分は $0 < s$ に対応する．それぞれの範囲における $\tau = s - \log(1+s)$ の逆函数を $s = f_1(\tau), s = f_2(\tau)$ で表すと，$\tau = 0$ の近くに

---

*定義 10.9 にしたがえば，次の漸近展開が成り立つ，といったほうが適切である.

$$\sqrt{\frac{z}{2\pi}} \left(\frac{z}{e}\right)^{-z} \Gamma(z) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}.$$

しかし (10.20) のように書いたほうが格好いい.

おける展開は

$$f_1(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k \tau^{k/2}, \qquad f_2(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tau^{k/2}$$

となる．ここで $\tau \to \infty$ のとき $ds/d\tau \to 1$ であることを考慮すると，補題 10.10 を用いて次のように漸近展開できる．

$$\begin{aligned}
\left(\frac{z}{e}\right)^{-z} \frac{\Gamma(z+1)}{z} &= -\int_0^{\infty} e^{-z\tau} \frac{df_1}{d\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-z\tau} \frac{df_2}{d\tau} d\tau \\
&= \int_0^{\infty} e^{-z\tau} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{k}{2}(-1)^k b_k + \frac{k}{2} b_k \right) \tau^{k/2-1} \right) d\tau \\
&= \int_0^{\infty} e^{-z\tau} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) b_{2k+1} \tau^{k-1/2} \right) d\tau \\
&\approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1) b_{2k+1} \Gamma(k+1/2)}{z^{(2k+1)/2}} \\
&\approx \left(\frac{b_1 \Gamma(1/2)}{\sqrt{z}} + \frac{3 b_3 \Gamma(3/2)}{z^{3/2}} + \cdots \right).
\end{aligned}$$

左辺の $\Gamma(z+1)/z$ は $\Gamma(z)$ に等しいから，これで目的の展開が得られた．具体的に計算してみると $b_1 = \sqrt{2}, b_2 = 2/3, b_3 = \sqrt{2}/18, \ldots$ なので，初めの 2 項の係数は $a_0 = 1, a_1 = 1/12$ となる． ■

第 11 講

6 月 29 日

11.1　Cousin の問題

Mittag-Leffler の定理（定理 9.14），Weierstraßの因数分解定理（定理 9.17）で扱った問題に対応する，多変数有理型函数に関する問題は，以下の Cousin の加法問題，乗法問題となる．

定義 11.1. $D \subset \mathbb{C}^n$ を領域とし，$\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ を D の開被覆とする．各開集合 U_i についてその上の有理型函数 φ_i が与えられているとする．そのような $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ を有理型函数のなす **0 コチェイン**という．そのとき，$\{\varphi_i\}_{i \in I}$ が **Cousin の加法分布**であるとは，任意の i, j について $(\varphi_i - \varphi_j)|_{U_i \cap U_j}$ が $U_i \cap U_j$ 上の正則函数であることをいう．$\{\varphi_i\}_{i \in I}$ が **Cousin の乗法分布**であるとは，任意の i, j について $(\varphi_i/\varphi_j)|_{U_i \cap U_j}$ が $U_i \cap U_j$ 上の正則函数であることをいう．

問題 (Cousin の加法問題). 加法分布 $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ が与えられたとき，D 上の有理型函数 φ で，任意の $i \in I$ について $\varphi|_{U_i} - \varphi_i$ が U_i 上で正則となるものを見つけよ．

問題 (Cousin の乗法問題). 乗法分布 $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ が与えられたとき，D 上の有理型函数 φ で，任意の $i \in I$ について $\varphi|_{U_i}/\varphi_i, \varphi_i/\varphi|_{U_i}$ が U_i 上で正則となるものを見つけよ．

今日の講義では，多重円板において加法問題が常に解けることの証明を目標に議論を進めていく*.

各 $U_i \cap U_j$ に対してその上の正則函数 h_{ij} が与えられているようなもの $\{h_{ij}\}_{i, j \in I}$ を，正則函数のなす **1 コチェイン**という．

*Cousin 自身は，D が $\mathbb{C}$ の領域の直積 $D_1 \times \cdots \times D_n$ ($D_j \subset \mathbb{C}$) の形のとき加法問題が常に解けること，さらに高々 1 個を除いてすべての D_j が単連結ならば乗法問題が常に解けることを証明した．歴史的な詳細については，一松信『多変数解析函数論』（培風館）の第 6 章 §2，第 10 章，および付録 I などを見よ．

$\{\varphi_i\}_{i\in I}$ を加法分布とする．任意の $i, j \in I$ に対し

$$h_{ij} = (\varphi_i - \varphi_j)|_{U_i \cap U_j} \tag{11.1}$$

とおくと，正則函数の 1 コチェイン $\{h_{ij}\}_{i,\, j\in I}$ が得られる．この $\{h_{ij}\}_{i,\, j\in I}$ は性質

$$(h_{ij} + h_{jk} + h_{ki})|_{U_i \cap U_j \cap U_k} = 0 \qquad (\forall i, j, k \in I) \tag{11.2}$$

を持つ．この条件を 1 コチェイン $\{h_{ij}\}_{i,\, j\in I}$ に対する**コサイクル条件**といい，コサイクル条件を満たす 1 コチェインを **1 コサイクル**という．

正則函数の 1 コチェイン全体は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間をなす．正則函数の 1 コサイクルの全体はその部分空間であり，$Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ と表される．

正則函数の 1 コチェイン $\{h_{ij}\}_{i,\, j\in I}$ に対し，正則函数のなす 0 コチェイン $\{f_i\}_{i\in I}$ で

$$h_{ij} = (f_i - f_j)|_{U_i \cap U_j} \qquad (\forall i, j \in I) \tag{11.3}$$

を満たすものがあるとき，$\{h_{ij}\}_{i,\, j\in I}$ は **1 コバウンダリ**であるという．またこの状況のとき，記号で $\{h_{ij}\}_{i,\, j\in I} = \partial\{f_i\}_{i\in I}$ と書く．1 コバウンダリの全体 $\partial C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ は，1 コサイクル全体 $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ の部分ベクトル空間をなす．

$$H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) / \partial C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \tag{11.4}$$

と書きこれを，$\mathcal{O}$ に係数をとる，**開被覆 $\mathcal{U}$ に関する 1 次元 Čech コホモロジー群**という．

命題 11.2. $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ を Cousin の加法分布とする．$\{\varphi_i\}_{i\in I}$ に対する Cousin の加法問題が解けるためには，$h_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$ により定まる正則函数の 1 コサイクル $\{h_{ij}\}_{i,\, j\in I}$ が $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ の零元を定めることが必要充分である．

証明 必要性. D 上の有理型函数 φ で $\varphi_i - \varphi$ が U_i 上で正則になるものがあるとし，$\varphi_i - \varphi|_{U_i} = f_i$ とおく．$\{f_i\}_{i\in I}$ は正則函数のなす 0 コチェインであって

$$h_{ij} = \varphi_i - \varphi_j = (\varphi_i - \varphi) - (\varphi_j - \varphi) = f_i - f_j$$

だから，$\{h_{ij}\}_{i,\, j\in I} = \partial\{f_i\}_{i\in I}$ である．

充分性. $\{h_{ij}\}_{i,\, j\in I} = \partial\{f_i\}_{i\in I}$ と表されたとする．そのとき，任意の i, j について，$U_i \cap U_j$ 上で

$$\varphi_i - \varphi_j = h_{ij} = f_i - f_j$$

である．したがって $U_i \cap U_j$ 上 $\varphi_i - f_i = \varphi_j - f_j$ だから，

$$\varphi = \varphi_i - f_i \qquad (U_i \text{ 上で})$$

とすることで D 上の有理型函数 φ が定義され，$\varphi_i - \varphi|_{U_i} = f_i$ は U_i 上正則である．したがって φ は Cousin の加法問題の解となる． ■

11.2 Dolbeault のコホモロジー群

領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ に対し，D 上の複素数値 C^∞ 級函数全体を $C^\infty(D)$ と表す．また，D 上の複素数値 C^∞ 級 1 形式全体，すなわち，$C^\infty(D)$ に係数を持つ $dx_1, ..., dx_n, dy_1, ..., dy_n$ の 1 次結合全体を $\mathcal{E}^1(D)$ で表す．

$$dz_j = dx_j + i\,dy_j, \qquad d\bar{z}_j = dx_j - i\,dy_j \tag{11.5}$$

とおく．すると

$$\mathcal{E}^1(D) = \sum_{j=1}^n C^\infty(D)dz_j + \sum_{j=1}^n C^\infty(D)d\bar{z}_j \tag{11.6}$$

でもある．

$\mathcal{E}^1(D)$ の $C^\infty(D)$ 加群としての外積代数を $\mathcal{E}^*(D)$ と書く．

$$\mathcal{E}^*(D) = \sum_{\substack{j_1 < \cdots < j_p,\, k_1 < \cdots < k_q, \\ 0 \le p,q \le n}} C^\infty(D)dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_p} \wedge d\bar{z}_{k_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{k_q} \tag{11.7}$$

と分解できる．

$$\mathcal{E}^{p,q}(D) = \sum_{j_1 < \cdots < j_p,\, k_1 < \cdots < k_q} C^\infty(D)dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_p} \wedge d\bar{z}_{k_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{k_q} \tag{11.8}$$

と書き，その元を (p,q) **形式**と呼ぶ．

$$\mathcal{E}^*(D) = \sum_{0 \le p,q \le n} \mathcal{E}^{p,q}(D) \tag{11.9}$$

である．$\alpha \in \mathcal{E}^{p,q}(D), \beta \in \mathcal{E}^{p',q'}(D)$ に対し $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{E}^{p+p',q+q'}(D)$ であり，外積をとる順序を逆にすると

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{(p+q)(p'+q')}\alpha \wedge \beta$$

となる．なお，$\mathcal{E}^{p,0}(D)$ の元の中でも，正則函数を係数とする $dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_p}$ の 1 次結合の形に表されるもののことを**正則 p 形式**という．

外微分 $d : \mathcal{E}^*(D) \to \mathcal{E}^*(D)$ は次のように定義される．

$$\alpha = \sum \alpha_{jk} dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_p} \wedge d\bar{z}_{k_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{k_q} \tag{11.10}$$

に対し

$$d\alpha = \sum d\alpha_{jk} \wedge dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_p} \wedge d\bar{z}_{k_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{k_q}, \tag{11.11}$$

$$d\alpha_{jk} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial z_i} dz_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i \tag{11.12}$$

とするのである．

定義 11.3.

$$\partial\alpha = \sum_{i,\,j,\,k}\left(\frac{\partial\alpha_{jk}}{\partial z_i}\right)dz_i\wedge dz_j\wedge d\bar{z}_k, \qquad \overline{\partial}\alpha = \sum_{i,\,j,\,k}\left(\frac{\partial\alpha_{jk}}{\partial\bar{z}_i}\right)d\bar{z}_i\wedge dz_j\wedge d\bar{z}_k. \tag{11.13}$$

こう定義すれば $d=\partial+\overline{\partial}$ である．したがって，$dd=0$ であることから

$$0=(\partial+\overline{\partial})(\partial+\overline{\partial})=\partial^2+(\partial\overline{\partial}+\overline{\partial}\partial)+\overline{\partial}^2 \tag{11.14}$$

となる．$\alpha\in\mathcal{E}^{p,q}(D)$ に対して $\partial^2\alpha\in\mathcal{E}^{p+2,q}(D)$, $(\partial\overline{\partial}+\overline{\partial}\partial)\alpha\in\mathcal{E}^{p+1,q+1}(D)$, $\overline{\partial}^2\alpha\in\mathcal{E}^{p,q+2}(D)$ だから，

$$\partial^2=0, \qquad \partial\overline{\partial}+\overline{\partial}\partial=0, \qquad \overline{\partial}^2=0 \tag{11.15}$$

を得る．特に，最後の $\overline{\partial}^2=0$ から

$$\mathcal{E}^{p,0}(D) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{p,1}(D) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{p,2}(D) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{p,q}(D) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \tag{11.16}$$

は複体となる．$\alpha\in\mathcal{E}^{p,q}(D)$ について，$\overline{\partial}\alpha=0$ のとき α を $\overline{\partial}$ **閉形式**，$\alpha=\overline{\partial}\beta$ となる β があるとき α を $\overline{\partial}$ **完全形式**と呼ぶ．完全形式は閉形式である．α が閉形式であるというのは局所的な性質であり，完全形式であるというのは大域的な性質といえる．

$$H^{p,q}(D)=\{\overline{\partial}\text{ 閉 }(p,q)\text{ 形式 }\}/\{\overline{\partial}\text{ 完全 }(p,q)\text{ 形式 }\} \tag{11.17}$$

とおき，これを **Dolbeault のコホモロジー群**と呼ぶ．

11.3　Dolbeault の補題とその帰結

定理 11.4 (Grothendieck)**.** $D\subset\mathbb{C}$ を，区分的に C^1 級の Jordan 閉曲線 γ で囲まれた領域とする．f を $\overline{D}$ の近傍で定義された C^∞ 級複素数値函数とする．そのとき

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\zeta-z} \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\overline{\zeta}-\bar{z}}d\overline{\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{\partial f}{\partial\zeta}\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\bar{z}}. \end{aligned} \tag{11.18}$$

証明 $z\in D$ を固定する．$\overline{\Delta}(z;r)\subset D$ となるよう r をとる．$\gamma_r=\partial\Delta(z;r)$, $D_r=D\setminus\overline{\Delta}(z;r)$ とする．

$$d\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right)=\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta-z}.$$

Stokes の定理より

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\int_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\iint_{D_r} d\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right)=\iint_{D_r}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta-z}.$$

左辺は r によらず $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - 2\pi i f(z)$ に等しい．そして $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} \frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta - z}$ は D で可積分だから*，上の式において $r\to 0$ とすれば

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} \frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta - z} = \int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - 2\pi i f(z)$$

を得る．第 2 式についても同様. ■

補題 11.5. D, γ, f は前定理と同じとする．このとき，$\overline{D}$ の近傍で定義された C^∞ 級函数 g, h で

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z) = f(z), \qquad \frac{\partial h}{\partial z}(z) = f(z) \tag{11.19}$$

を満たすものがある．さらにもし，f が別の変数 $w_1, ..., w_k$ を含んだ $f(z, w_1, \ldots, w_k)$ という函数で，f が w について連続（あるいは C^∞ 級，正則）であるならば，それに応じて g, h も変数 w を含み g, h は w について連続（あるいは C^∞ 級，正則）であるようにできる．

証明

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\overline{\zeta}$$

とおく．この g が $\partial g/\partial \overline{z} = f$ を満たすことを示せばよい．もし f が w について連続（あるいは C^∞ 級，正則）ならば，g はその定義からやはり w について連続（あるいは C^∞ 級，正則）となる．

任意に $z \in D$ をとり固定する．$\overline{\Delta}(z;r) \subset D$ となる r をとる．Stokes の定理を用いて

$$\iint_{D_r} d\left(f(\zeta)\log|\zeta - z|^2 d\overline{\zeta}\right) = \int_\gamma f(\zeta)\log|\zeta - z|^2 d\overline{\zeta} - \int_{\gamma_r} f(\zeta)\log|\zeta - z|^2 d\overline{\zeta} \tag{11.20}$$

である．

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \iint_{D_r} \partial\left(f(\zeta)\log|\zeta - z|^2\right) d\overline{\zeta} \\ &= \iint_{D_r} \frac{\partial f}{\partial \zeta}\log|\zeta - z|^2 d\zeta\wedge d\overline{\zeta} + \iint_{D_r} f(\zeta)\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z}.\end{aligned}$$

$r\to 0$ とする．(11.20) の右辺第 2 項の極限を $\zeta = z + re^{i\theta}$ として計算すると

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(\zeta)\log|\zeta - z|^2 d\overline{\zeta} = \lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} \underbrace{f(z+re^{i\theta})}_{r\to 0\ \text{のとき有界}} (\log r^2)\cdot(-i)re^{-i\theta}d\theta = 0.$$

*z のまわりで積分を極座標を用いて書き換えてみればわかる．

したがって

$$\int_\gamma f(\zeta)\log|\zeta - z|^2 d\overline{\zeta} = \iint_D \frac{\partial f}{\partial \zeta}\log|\zeta - z|^2 d\zeta\wedge d\overline{\zeta} + \iint_D f(\zeta)\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z}$$
$$= \iint_D \frac{\partial f}{\partial \zeta}\log|\zeta - z|^2 d\zeta\wedge d\overline{\zeta} + 2\pi i g(z)$$

を得る．両辺に $\partial/\partial\bar{z}$ を施して

$$-\int_\gamma f(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\bar{z}} = -\iint_D \frac{\partial f}{\partial\zeta}\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\bar{z}} + 2\pi i\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}.$$

したがって，定理 11.4 より $\partial g/\partial\bar{z} = f$ となる．$\partial g/\partial\bar{z}$ が C^∞ 級であることから g は C^∞ 級である．もう一方についても同様. ■

定理 11.6 (Dolbeault の補題). 多重円板 $\Delta(0;r)\subset\mathbb{C}^n$ を考える．ω を $\overline{\Delta}(0;r)$ の近傍で定義された (p,q) 形式 $(q\geq 1)$ とする．そのとき，もし $\overline{\partial}\omega = 0$ ならば，$\overline{\Delta}(0;r)$ のある近傍で定義された $(p,q-1)$ 形式 η であって，$\omega = \overline{\partial}\eta$ であるものが存在する．

証明 $\Delta(0;r)$ 上で定義された η で $\omega = \overline{\partial}\eta$ となるものが存在することを言えば，定理の主張もしたがう．

$$\omega = \sum_{J,K}\alpha_{J,K}dz_J\wedge d\bar{z}_K$$

とおく．$\alpha_{J,K}\neq 0$ となるような J, K たちを考え，そこに現れる K の中に出てくる最大のインデックスを ν とする（すべての $\alpha_{J,K}$ が 0 の場合，すなわち $\omega = 0$ の場合には，$\nu = 0$ とする）．ν についての帰納法で証明する．

$\nu = 0$ の場合は OK. $\nu\geq 1$ として，$\nu - 1$ の場合には証明されているとする．ω を

$$\omega = \alpha\wedge d\bar{z}_\nu + \beta$$

と表す．ここで α, β は $d\bar{z}_\nu, ..., d\bar{z}_n$ を含まない．すると

$$0 = \overline{\partial}\omega = \overline{\partial}\alpha\wedge d\bar{z}_\nu + \overline{\partial}\beta.$$

$k = \nu + 1, ..., n$ について，$d\bar{z}_k$ の係数を取り出して

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}_k}\wedge d\bar{z}_\nu + \frac{\partial\beta}{\partial\bar{z}_k} = 0$$

を得る*．したがって

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{z}_k} = 0 \qquad (k = \nu + 1, ..., n).$$

*$\partial\alpha/\partial\bar{z}_k$ とは，α の各項の係数を $\partial/\partial\bar{z}_k$ で微分して得られる $(p,q-1)$ 形式を表している．

つまり，α に含まれる各項の係数は $z_{\nu+1}, ..., z_n$ について正則である．

$$\alpha = \sum \alpha_{j_1,\dots,j_p,k_1,\dots,k_{q-1}}(z) dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_p} \wedge d\bar{z}_{k_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{k_{q-1}}$$

とおく．$\alpha_{j_1,\dots,j_p,k_1,\dots,k_{q-1}}(z)$ は $z_{\nu+1}, \dots, z_n$ について正則で，その他の変数についても C^∞ 級だから，前補題（補題 11.5）より，

$$\alpha_{j_1,\dots,j_p,k_1,\dots,k_{q-1}}(z_1,\dots,z_\nu,z_{\nu+1},\dots,z_n) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\nu} \gamma_{j_1,\dots,j_p,k_1,\dots,k_{q-1}}(z_1,\dots,z_\nu,z_{\nu+1},\dots,z_n)$$

となるような函数 $\gamma_{j_1,\dots,j_p,k_1,\dots,k_{q-1}}$ であって，$z_{\nu+1}, \dots, z_n$ について正則，その他の変数についても C^∞ 級のものが存在する．

$$\gamma = \sum \gamma_{j_1,\dots,j_p,k_1,\dots,k_{q-1}}(z) dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_p} \wedge d\bar{z}_{k_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{k_{q-1}}$$

とおこう．すると

$$\overline{\partial}\gamma = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{J,\,K'} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \gamma_{J,K'} d\bar{z}_i \wedge dz_J \wedge d\bar{z}_{K'} = d\bar{z}_\nu \wedge \alpha + \delta$$

と表せる（$J = (j_1, \dots, j_p), K' = (k_1, \dots, k_{q-1})$ とした）．ここで δ は $d\bar{z}_\nu, ..., d\bar{z}_n$ を含まない．

$$\omega = \alpha \wedge d\bar{z}_\nu + \beta = (-1)^{p+q-1}\overline{\partial}\gamma + \beta - (-1)^{p+q-1}\delta$$

である．そして $\beta - (-1)^{p+q-1}\delta$ は $d\bar{z}_\nu, ..., d\bar{z}_n$ を含まない $\overline{\partial}$ 閉形式だから，帰納法の仮定により $\beta - (-1)^{p+q-1}\delta = \overline{\partial}\varepsilon$ と表せる．$\omega = \overline{\partial}((-1)^{p+q-1}\gamma + \varepsilon)$ である． ■

定理 11.7. $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ を多重円板とする（有界でなくてもよい）．そのとき

(1) $H^{p,0}(\Delta)$ は正則 p 形式のなす加群に同型である．

(2) $H^{p,q}(\Delta) = 0$ $(q > 0)$ である．

証明 (1) $H^{p,0}(\Delta) = \{\overline{\partial}$ 閉 $(p,0)$ 形式 $\} = \{\omega \in \mathcal{E}^{p,0}(\Delta) \mid \overline{\partial}\omega = 0\}$ である．$\omega \in \mathcal{E}^{p,0}(\Delta)$ を一般に $\omega = \sum \alpha_J dz_J$ と書けば，$\overline{\partial}\omega = \sum_{J,\,k} \dfrac{\partial \alpha_J}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_J$ なので，$\overline{\partial}\omega = 0$ は任意の J, k について

$$\frac{\partial \alpha_J}{\partial \bar{z}_k} = 0$$

であることと同値．すなわち，すべての α_J が各変数について正則であることと同値である．

(2) $\underline{q \geq 2 \text{ のとき}}$．$\Delta$ を多重円板の増加列 $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \cdots \subset \Delta_\nu \subset \cdots \subset \Delta$ により

$$\Delta = \bigcup_\nu \Delta_\nu$$

と表しておく．ただし，$\overline{\Delta}_\nu \subset \Delta_{\nu+1}$ とする．

φ を Δ 上の (p,q) 形式で $\overline{\partial}\varphi = 0$ であるものとする．ν について帰納的に，$\overline{\Delta}_\nu$ の近傍で定義されている $(p,q-1)$ 形式 ψ_ν で

(i) $\varphi|_{\overline{\Delta}\text{ の近傍}} = \overline{\partial}\psi_\nu$,

(ii) $\psi_{\nu+1}|_{\Delta_\nu} = \psi_\nu|_{\Delta_\nu}$

なるものを構成しよう．もしこのような $\{\psi_\nu\}_{\nu=1,2,\dots}$ ができれば，Δ 上の $(p,q-1)$ 形式 ψ を

$$\psi|_{\Delta_\nu} = \psi_\nu|_{\Delta_\nu}$$

によって定義できて，$\varphi = \overline{\partial}\psi$ となるから，定理の主張が示されたことになる．

$\nu = 1$ は Dolbeault の補題（定理 11.6）そのもの．そこで，$\psi_1, \dots, \psi_{\nu-1}$ まで構成されたとする．Dolbeault の補題より，$\overline{\Delta}_{\nu+1}$ のある近傍で定義された $(p,q-1)$ 形式 $\psi'_{\nu+1}$ で，$\overline{\partial}\psi'_{\nu+1} = \varphi|_{\overline{\Delta}_{\nu+1}\text{ の近傍}}$ なるものがとれる．さらに，$\overline{\Delta}_\nu$ の近傍で $\overline{\partial}(\psi'_{\nu+1}|_{\overline{\Delta}_\nu\text{ の近傍}} - \psi_\nu) = 0$ であることから，$q \geq 2$ なので再び Dolbeault の補題が使えて，$\overline{\Delta}_\nu$ の近傍 U で定義された $(p,q-2)$ 形式 ψ'' で $\psi'_{\nu+1}|_{\overline{\Delta}_\nu\text{ の近傍}} - \psi_\nu = \overline{\partial}\psi''$ なるものが得られる．

ここで，$\mathbb{C}^n$ 上の C^∞ 級函数 σ で $\overline{\Delta}_\nu$ 上 $\sigma \equiv 1, \mathbb{C}^n \setminus U$ で $\sigma \equiv 0$ であるようなものをとり，

$$\psi_{\nu+1} = \psi'_{\nu+1} - \overline{\partial}(\sigma\psi'')$$

とおく．これは $\overline{\Delta}_{\nu+1}$ の近傍で定義された $(p,q-1)$ 形式で，$\overline{\partial}\psi_{\nu+1} = \overline{\partial}\psi'_{\nu+1} = \varphi|_{\overline{\Delta}_{\nu+1}\text{ の近傍}}$ であるし，また確かに $\psi_{\nu+1}|_{\Delta_\nu} = \psi'_{\nu+1}|_{\Delta_\nu} - \overline{\partial}\psi''|_{\Delta_\nu} = \psi_\nu|_{\Delta_\nu}$ を満たす．これでできた．

<u>$q = 1$ のとき</u>．上と同様の $\{\Delta_\nu\}$ をとっておく．$\varphi \in \mathcal{E}^{p,1}(\Delta)$ で $\overline{\partial}\varphi = 0$ であるようなものに対して，ν について帰納的に，$\overline{\Delta}_\nu$ の近傍で定義された $(p,0)$ 形式 ψ_ν で次のようなものを構成する．

(i) $\varphi|_{\overline{\Delta}_\nu\text{ の近傍}} = \overline{\partial}\psi_\nu$.

(ii) $\psi_{\nu+1} - \psi_\nu$ は $\overline{\Delta}_\nu$ の近傍で正則 p 形式であり，

$$\psi_{\nu+1} - \psi_\nu = \sum_I \chi_{\nu,I}(z)dz_I$$

とおいたとき $\overline{\Delta}_\nu$ 上で $|\chi_{\nu,I}(z)| < 2^{-\nu}$ である．

ψ_1 は Dolbeault の補題により作れる．$\psi_1, \dots, \psi_\nu$ まで構成されたとする．Dolbeault の補題を用いて $\overline{\Delta}_{\nu+1}$ の近傍上の $(p,0)$ 形式 $\psi'_{\nu+1}$ で $\overline{\partial}\psi'_{\nu+1} = \varphi$ となるものをとる．$\overline{\Delta}_\nu$ の近傍で $\overline{\partial}(\psi'_{\nu+1} - \psi_\nu) = 0$ であり，$\psi'_{\nu+1} - \psi_\nu$ は $(p,0)$ 形式だから，これは $\psi'_{\nu+1} - \psi_\nu$ が正則 p 形式であることを示す．

$$\psi'_{\nu+1} - \psi_\nu = \sum_I \alpha_I\, dz_I$$

とおく．α_I を冪級数展開して，その適当な部分和 $p_I(z)$ をとれば $\overline{\Delta}_\nu$ 上で $|\alpha_I - p_I| < 2^{-\nu}$ となる．

$$\psi'' = \sum_I p_I\, dz_I$$

は $\mathbb{C}^n$ 上の正則 p 形式である．$\psi_{\nu+1} = \psi'_{\nu+1} - \psi''$ とおく．これは $\overline{\Delta}_{\nu+1}$ の近傍で定義され，$\overline{\partial}\psi_{\nu+1} = \overline{\partial}\psi'_{\nu+1} = \varphi|_{\overline{\Delta}_{\nu+1}\ \text{の近傍}}$ で，$\psi_{\nu+1} - \psi_\nu = \psi'_{\nu+1} - \psi_\nu - \psi'' = \sum_I (\alpha_I - p_I) dz_I$，$\overline{\Delta}_\nu$ 上で $|\alpha_I - p_I| < 2^{-\nu}$ である．これで (i), (ii) を満たす $\{\psi_\nu\}_{\nu=1,2,\ldots}$ ができた．

さて，

$$\psi_\nu = \sum_I \psi_{\nu,I}\, dz_I$$

とおこう．すると

$$\lim_{\nu\to\infty} \psi_{\nu,I}(z) = \lim_{\nu\to\infty} \left\{ \sum_{k=\nu_0}^{\nu-1} (\psi_{k+1,I}(z) - \psi_{k,I}(z)) \right\} + \psi_{\nu_0,I}(z)$$

で，Δ_{ν_0} 上で $|\psi_{k+1,I}(z) - \psi_{k,I}(z)| < 2^{-k}$ であることからこれは各 Δ_{ν_0} 上で収束して C^∞ 級函数を定める．そこで $\psi_I(z) = \lim_{\nu\to\infty} \psi_{\nu,I}(z)$ とおくと

$$\psi = \sum_I \psi_I(z) dz_I$$

が求めるものである．実際，これは Δ 上 C^∞ 級の $(p,0)$ 形式であり，各 Δ_{ν_0} 上で

$$\overline{\partial}\psi|_{\Delta_{\nu_0}} = \overline{\partial}((\text{正則 } p \text{ 形式}) + \psi_{\nu_0}) = \overline{\partial}\psi_{\nu_0} = \varphi|_{\Delta_{\nu_0}}$$

だから Δ 全体で $\overline{\partial}\psi = \varphi$ である．■

注意　一般に複素多様体 D に対し，正則 p 形式のなす加群の層を Ω^p とするとき，$H^q(D, \Omega^p)$ というものが定義され，$H^{p,q}(D) = H^q(D, \Omega^p)$ であることが知られている（**Dolbeault の定理**）．特に，$\Omega^0 = \mathcal{O}$ だから，$H^{0,q}(D) = H^q(D, \mathcal{O})$ である．

例 11.8. $H^{0,1}(D) \neq 0$ であるような領域 D の例を挙げよう．$D = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とおく．$r^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ とすれば $\{z_1 z_2 \neq 0\}$ で

$$\frac{1}{z_1 z_2} = \frac{\bar{z}_2}{z_1 r^2} + \frac{\bar{z}_1}{z_2 r^2}$$

だから

$$0 = \overline{\partial}\left(\frac{1}{z_1 z_2}\right) = \overline{\partial}\left(\frac{\bar{z}_2}{z_1 r^2}\right) + \overline{\partial}\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2 r^2}\right).$$

そこで

$$\omega = \begin{cases} \overline{\partial}\left(\dfrac{\bar{z}_2}{z_1 r^2}\right) & (z_1 \neq 0) \\ -\overline{\partial}\left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2 r^2}\right) & (z_2 \neq 0) \end{cases}$$

とおけば，$\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上 well-defined な $(0,1)$ 形式になる．定義から $\overline{\partial}\omega = 0$ である．しかし $\omega = \overline{\partial}\xi$ となるような $\xi \in C^\infty(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\})$ は存在しないことが Hartogs の接続定理（例 3.14）からわかる．

Cousin の問題に戻る．

定理 11.9. $D \subset \mathbb{C}^n$ を領域とし，$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ をその任意の開被覆とする．そのとき，

$$H^{0,1}(D) = 0 \Longrightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = 0. \tag{11.21}$$

とくに，$H^{0,1}(D) = 0$ のとき，任意の Cousin の加法問題が解ける．

証明 任意にとった $\{h_{ij}\}_{i,\,j\in I} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ に対し，$\{f_i\}_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ であって

$$h_{ij} = f_i - f_j|_{U_i\cap U_j}$$

となるものが存在することを示したい．

Step 1. 各 f_i が U_i 上の C^∞ 級函数であるような $\{f_i\}_{i\in I}$ で $h_{ij} = f_i - f_j|_{U_i\cap U_j}$ なるものが存在することを示す．

D はパラコンパクトである．$\mathcal{U}$ の細分で，かつ局所有限であるような D の開被覆 $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ をとる．$\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を $\mathcal{V}$ に関する 1 の分割とする．すなわち φ_α は D 上の C^∞ 級函数で，$\operatorname{supp}\varphi_\alpha \subset U_\alpha$ であり，D 上で $\displaystyle\sum_{\alpha\in A}\varphi_\alpha \equiv 1$ である．

任意の V_α に対して，それを含むような U_i が存在する．このペアを 1 つとり，固定して考える．各 U_j に対し，その上の C^∞ 級函数 $f_{\alpha j}$ を次のように作る．

$$f_{\alpha j} = \begin{cases} \varphi_\alpha(z) h_{ji}(z) & (z \in V_\alpha \cap U_j), \\ 0 & (z \in U_j \setminus V_\alpha). \end{cases}$$

すると

$$f_{\alpha j} - f_{\alpha k} = \varphi_\alpha h_{ji} - \varphi_\alpha h_{ki} = \varphi_\alpha(h_{ji} - h_{ki}) = \varphi_\alpha(-h_{ij} - h_{ki}) = \varphi_\alpha h_{jk}.$$

したがって

$$\sum_\alpha (f_{\alpha j} - f_{\alpha k})|_{U_j\cap U_k} = \sum_\alpha \varphi_\alpha h_{jk} = h_{jk}$$

なので，$f_j = \displaystyle\sum_\alpha f_{\alpha j}$ とおけばよい．

Step 2. $h_{ij} = f_i - f_j$ だから

$$0 = \overline{\partial} h_{ij} = \overline{\partial} f_i - \overline{\partial} f_j$$

である．ここで $\overline{\partial} f_i, \overline{\partial} f_j$ はそれぞれ U_i, U_j 上定義された $(0,1)$ 形式．この式は D 上の $(0,1)$ 形式 ω で $\omega|_{U_i} = \overline{\partial} f_i$ となるものが存在することを示している．すると $\overline{\partial}\omega = 0$ な

ので，仮定 $H^{0,1}(D)=0$ により，D 上の C^∞ 級函数 ξ が存在して $\omega=\overline{\partial}\xi$ となる．つまり $\overline{\partial}f_i=\overline{\partial}\xi|_{U_i}$ だから，$\overline{\partial}(f_i-\xi)=0$. そこで $\tilde{f}_i=f_i-\xi$ とおけば，$\tilde{f}_i$ は正則で，

$$h_{ij}=f_i-f_j=(f_i-\xi)-(f_j-\xi)=\tilde{f}_i-\tilde{f}_j$$

である．これで証明が完了した． ■

系 11.10. 任意の多重円板（有界でなくてもよい）上で，Cousin の加法問題は常に解ける．

第 12 講

7 月 6 日

12.1　Riemann 面，特に楕円曲線

コンパクトかつ向き付け可能な実 2 次元曲面 X は，その種数 g により分類される．X の種数を g とすれば

$$\pi_1(X,p) \cong \langle a_1,b_1,a_2,b_2,\dots,a_g,b_g \mid a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}=1\rangle. \quad (12.1)$$

各次元の Betti 数は，$b_0=1$, $b_1=2g$, $b_2=1$ である．Euler 標数は $\chi(X)=1-2g+1=2(1-g)$.

定義 12.1. X, Y をコンパクトな実 2 次元曲面とする．$f: X \to Y$ が**分岐被覆**であるとは，

(i) f は連続であり，

(ii) 任意の $p \in X$ に対し，p の近傍 $U \subset X$ および $f(p)$ の近傍 $V \subset Y$ であって，$f|_{U\setminus\{p\}}: U\setminus\{p\} \to V\setminus\{f(p)\}$ が被覆写像となるものがとれる

ことをいう．(ii) の被覆写像が m 重であるとき，$m-1$ のことを点 $p \in X$ の**分岐次数**といい $\mathcal{O}_f(p)$ と表す．$\mathcal{O}_f(p)=0$ のとき p は**通常点**であるといい，$\mathcal{O}_f(p)>0$ のときは**分岐点**であるという．

例 12.2. $\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto z^m$ は分岐被覆である．

命題 12.3. (1) 分岐点すべての集合 A $(\subset X)$ は有限集合である．

(2) $f: X\setminus f^{-1}(f(A)) \to Y\setminus f(A)$ は被覆空間になる．（その次数を r とする．）

(3) 任意の $q\in Y$ に対して $r=\displaystyle\sum_{p\in f^{-1}(q)}(\mathcal{O}_f(p)+1)$ である．

(4) $\chi(X)=r\chi(Y)-\displaystyle\sum_{p\in A}\mathcal{O}_f(p)$.

証明 (4) $f(A)$ を頂点の一部に持つように Y を三角形分割し，それを持ち上げればよい. ■

Y が Riemann 球 $\mathbb{P}$ であるとき，その座標を z とすれば，X に次のように局所座標を導入することにより X は複素 1 次元多様体となる．任意の点 $p \in X$ に対し，

(1) p が通常点であれば $t = z \circ f - z \circ f(p)$,
(2) p が分岐点であれば $t = \sqrt[m]{z \circ f - z \circ f(p)}$

とすればよい．このようにした X を（コンパクト）**Riemann 面**と呼ぶ．（複素 1 次元多様体のことを Riemann 面と呼ぶこともある．）

$P(z,z')$ を多項式とする．$P(z,z') = 0$ により z' が z の多価函数として与えられていると考え，$z' = \varphi(z)$ と書く．そのとき，これを一価にするような z 球面の上の分岐被覆を**代数函数 φ に対応する Riemann 面**という．

$P(z) = a(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_q)$, $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$ を z の q 次多項式とし，$z' = \sqrt{P(z)}$ に対応する Riemann 面 X_P を考える．$a_1, ..., a_q$ が X_P の分岐点となる．また，q が奇数の時に限り無限遠点 ∞ でも分岐する．他には分岐点はない．

$$\chi(X_P) = 2 - 2g = 2\chi(\mathbb{P}) - (\text{分岐点の個数}) = 4 - 2\left[\frac{q+1}{2}\right] \tag{12.2}$$

なので，$g = [(q-1)/2]$ となる．$q = 1, 2$ のとき $g = 0$ で，実は $X_P \cong \mathbb{P}$ である． これを**有理曲線**という．$q = 3, 4$ のときは $g = 1$ で**楕円曲線**と呼ばれる．$q \geq 5$ の場合は**超楕円曲線**である．

第一種積分 $f : X_P \to \mathbb{P}$ を定義する．まず，

$$\omega = \frac{dz}{\sqrt{P(z)}} \tag{12.3}$$

が X_P 上一価の微分形式を与えることをみよう．$p \in X_P$ における局所座標 t を考えると

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{P(z(t))}}\frac{dz}{dt}dt \tag{12.4}$$

である．p が通常点であれば問題ない．$z = a_i$ のときは，$t = \sqrt{z-a_i}$ で $dt = dz/2\sqrt{z-a_i}$ なので

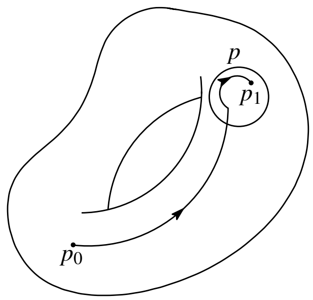
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{P(z)}}\frac{dz}{dt}dt = 2\frac{dt}{\sqrt{\prod_{j\neq i}(z-a_j)}} \tag{12.5}$$

なのでよい．$z = \infty$ が分岐点となっている場合にはそれにも注意する必要があるが，計算してみると，大丈夫だとわかる．

以下では $q=3,4$ のときを考える．X_P 上に 1 点 p_0 をとり固定して，そこを始点とした，終点が p であるような X_P 上の曲線 C をとる．

$$w(p,C)=\int_C \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}=\int_{p_0}^{p}\omega=\int_{C_1}\frac{dz}{\sqrt{P(z)}}+\int_{p_1}^{p}\omega \tag{12.6}$$

とおく．ただし，$p_1\in X_P$ の局所座標近傍（座標を t とする）U をとり，最後の $\int_{p_1}^{p}$ は U 内の道で積分している．



最後の形から，$w(p,C)$ は p の解析函数であり，

$$\frac{dw}{dt}=\frac{1}{\sqrt{P(z)}}\frac{dz}{dt}\neq 0. \tag{12.7}$$

$w(p,C)$ は道 C のホモトピー類のみにより決まるので，普遍被覆面 $\tilde{X}_P\to X_P$ を考えれば，$w(p,C)$ は $\tilde{X}_P$ 上の一価函数に持ち上がる．

定理 12.4. w の持ち上げも $w:\tilde{X}_P\to\mathbb{C}$ と書くことにすると，この w は複素多様体の同型写像である．

$dw/dt\neq 0$ だから，局所的には逆写像 $z=f(w)$ が定義される．この f は $\tilde{X}_P$ への写像だが，射影により，X_P への写像 $f:\mathbb{C}\to X_P$ だと思うことにする．

補題 12.5. $f(w)$ が X_P への写像として $\mathbb{C}$ 全体で矛盾なく定まる．

証明 点 p_0 の近傍では $w=\int_{p_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{P(z)}}$ ならば $z=f(w)$ である．$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{\sqrt{P(z)}}$ なので，0 の近傍で

$$f'(w)=\frac{df}{dw}(w)=\sqrt{P(z)}=\sqrt{P(f(w))}. \tag{12.8}$$

解析接続をしても函数関係は不変なので，$\mathbb{C}$ 全体で $f'(w)=\sqrt{P(f(w))}$ である．したがって，$f(w)$ は $\sqrt{P(f(w))}$ の積分により得られるから，$\mathbb{C}$ が単連結であることから矛盾なく定まる． ■

定理 12.4 の証明　$f:\mathbb{C}\to X_P$ が定義されているのだが，$\mathbb{C}$ は単連結だから，一価性定理（定理 4.9）と同じ議論により持ち上げ $\tilde{f}:\mathbb{C}\to\tilde{X}_P$ が存在する．$\tilde{f}$ と $w:\tilde{X}_P\to\mathbb{C}$ は $\tilde{p}_0$ の近傍と w_0 の近傍のあいだの双正則写像となっているから，一致の定理により正則同型 $\tilde{X}_P\cong\mathbb{C}$ を与える． ■

定理 12.4 から，X_P 上の p_0 を始点とする 2 つの曲線 c_1, c_2 について

$$w(c_1)=w(c_2)\iff p_1=p_2 \text{ かつ } c_1\sim c_2 \text{（ホモトピック）}. \tag{12.9}$$

ここで

$$\pi_1(X,p_0)\cong\langle a,b\,|\,aba^{-1}b^{-1}=1\rangle \tag{12.10}$$

と表しておけば，$w(c_1c_2)=w(c_1)+w(c_2)$ だから

$$L=\{w(c)\mid c\in\pi_1(X_P,p_0)\}=\mathbb{Z}w(a)+\mathbb{Z}w(b)\subset\mathbb{C}. \tag{12.11}$$

$w(a)=\omega_1, w(b)=\omega_2$ とおく．f を射影により $f:\mathbb{C}\to\mathbb{P}$ とみれば，これは L の元を周期とする **2 重周期函数**である．

ω_1,ω_2 が $\mathbb{R}$ 上独立であることを確認しよう．

定理 12.6. 必要なら a と b を逆にすれば，$\mathrm{Im}(\omega_2\overline{\omega}_1)$ は “X_P の面積” $\displaystyle\iint_{\mathbb{P}}\frac{dx\,dy}{|P(z)|}$ に等しい．特に，$\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1)>0$ となる．

証明　$w=u+iv$ とおく．すると $d\overline{w}\wedge dw=2i\,du\wedge dv$ だから，Stokes の定理を用いて

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{P}}\frac{dx\,dy}{|P(z)|}&=\iint_{X_P}du\wedge dv=\frac{1}{2i}\iint_{X_P}d(\overline{w}\,dw)=\frac{1}{2i}\int_{\partial X_P}\overline{w}\,dw\\&=\frac{1}{2i}\left\{\int_{w\circ a}\overline{w}\,dw+\int_{w\circ b+\omega_1}\overline{w}\,dw-\int_{w\circ a+\omega_2}\overline{w}\,dw-\int_{w\circ b}\overline{w}\,dw\right\}\\&=\frac{1}{2i}\left(-\int_a\overline{\omega}_2\,dw+\int_b\overline{\omega}_1\,dw\right)\\&=\frac{1}{2i}(-\overline{\omega}_2\omega_1+\overline{\omega}_1\omega_2)=\mathrm{Im}(\overline{\omega}_1\omega_2)\end{aligned}$$

である． ■

12.2　℘ 函数

$P(z)=4z^3-g_2z-g_3$（ただし $\Delta=g_2^3-27g_3^2\neq 0$）の場合を **Weierstraßの標準形**という．p_0 を無限遠点 ∞ にとって

$$w=\int_\infty^z\frac{dz}{\sqrt{P(z)}} \tag{12.12}$$

とおき，$z=\wp(w)$ とする．これを $\wp$ **函数**という．$\wp$ は偶函数である．

$\wp$ の極の位置を調べると

$$
\begin{aligned}
w\in\mathbb{C} \text{ が } \wp \text{ の極} &\Longleftrightarrow \wp(w)=\infty \\
&\Longleftrightarrow (\wp(w),\wp(w)') \text{ が } X_P \text{ の無限遠点に行く} \\
&\Longleftrightarrow (\wp(w),\wp(w)')=(\infty,\infty)=(\wp(0),\wp(0)') \\
&\Longleftrightarrow w\in L
\end{aligned} \tag{12.13}
$$

より L が $\wp$ の極の全体となる．

原点における Laurent 展開を

$$
\wp(w)=\frac{b_{-n}}{w^{2n}}+\frac{b_{-n+1}}{w^{2n-2}}+\cdots+\frac{b_{-1}}{w^2}+b_0+b_1w^2+b_2w^4+\cdots \qquad (b_{-n}\neq 0) \tag{12.14}
$$

とすると，(12.8) より

$$
\left(\frac{d\wp}{dw}\right)^2=P(\wp(w))=4\wp(w)^3-g_2\wp(w)-g_3=4\frac{b_{-n}^3}{w^{6n}}+\cdots. \tag{12.15}
$$

したがって $4n^2b_{-n}^2=4b_{-n}^3, 2(2n+1)=6n$ だから，$n=1$ で $b_{-1}=1$. 同様に考えていって

$$
\begin{aligned}
\wp(w)&=\frac{1}{w^2}+\frac{g_2}{20}w^2+\frac{g_3}{28}w^4+b_3w^6+\cdots, \\
b_n&=\frac{3}{(2n+3)(n-2)}\sum_{k=1}^{n-2}b_kb_{n-k-1}
\end{aligned} \tag{12.16}
$$

と表せることがわかる．特に，原点における極の位数（したがって，L の各点における極の位数）は 2 である．

$\omega_1,\omega_2\in\mathbb{C}$ が $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1)>0$ を満たすとき，$L=\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$ に対して

$$
\frac{1}{w^2}+\sum_{\omega\in L\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{(w-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right) \tag{12.17}
$$

は $\wp$ と同様 $\mathbb{C}$ 上の有理型函数であり，やはり L を周期とし，L の各点で位数 2 の極を持つ．その導函数は $\displaystyle\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(w-\omega)^3}$ である．

定理 12.7. $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{C}$ が楕円積分 $\displaystyle\int\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}$ の基本周期ならば，

(1)

$$
\wp'(w)=-2\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(w-\omega)^3}, \tag{12.18}
$$

$$
\wp(w)=\frac{1}{w^2}+\sum_{\omega\in L\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{(w-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right). \tag{12.19}
$$

(2)

$$
\frac{g_2}{60}=\sum_{\omega\in L\setminus\{0\}}\frac{1}{\omega^4}, \qquad \frac{g_3}{140}=\sum_{\omega\in L\setminus\{0\}}\frac{1}{\omega^6}. \tag{12.20}
$$

証明 (1) $g(w) = \wp'(w) + 2\sum(w-\omega)^{-3}$, $h(w) = \wp(w) - w^{-2} - \sum\{(w-\omega)^{-2} - \omega^{-2}\}$ とおく．$g(w)$ は 2 重周期を持つ $\mathbb{C}$ 上の正則函数で，有界だから，定数である．さらに奇函数であることからその定数の値は 0 とわかる．また，$dh/dw = g = 0$ だから h は定数で，その値は $w = 0$ で計算すれば 0 であることがわかる．

(2)

$$\wp(w) = \frac{1}{w^2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^{2n}$$

とおくと

$$\wp'(w) + 2w^{-3} = \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n w^{2n-1},$$

つまり

$$-2\sum_{\omega\in L\setminus\{0\}} (w-\omega)^{-3} = \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n w^{2n-1}.$$

両辺を w で $2n-1$ 回微分し，$w = 0$ とおけば

$$(2n+1)!\sum_{\omega\in L\setminus\{0\}} \omega^{-2n-2} = (2n)!b_n, \qquad \therefore \quad b_n = (2n+1)\sum_{\omega\in L\setminus\{0\}} \omega^{-2n-2}.$$

したがって

$$\frac{g_2}{20} = b_1 = 3\sum_{\omega\in L\setminus\{0\}} \omega^{-4}, \quad \frac{g_3}{28} = b_2 = 5\sum_{\omega\in L\setminus\{0\}} \omega^{-6}.$$

これで示された． ■

逆問題を考えてみよう．$\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ を満たす ω_1, ω_2 に対して，$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ とおくと，$\mathbb{C}/L$ はある $\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}$ ($g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$) なる楕円曲線と同じものだろうか．これはよい．上の定理の (2) で与えた公式で g_2, g_3 を定めると，$g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ であり，

$$w = \int^z \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} \tag{12.21}$$

の逆函数は

$$\frac{1}{w^2} + \sum_{\omega\in L\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(w-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) \tag{12.22}$$

と一致し，特に $L' = L$ となる．

$X_{P_{g_2g_3}} \cong \mathbb{C}/L$ と $X_{P_{g_2'g_3'}} \cong \mathbb{C}/L'$ が正則同型となるための条件は何だろうか？ 双正則写像 $\mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/L'$ があるとすれば，これは普遍被覆面のあいだの写像 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $w \mapsto \alpha w$ ($\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$) に持ち上げられる．したがって $w \mapsto \alpha w$ は全単射 $L \to L'$ を与える．逆に，そのよ

うな全単射があれば，明らかに $\mathbb{C}/L \cong \mathbb{C}/L'$ である．

$$
\begin{aligned}
&\exists\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \text{ s.t. } \omega \mapsto \alpha\omega \text{ が全単射 } L \to L' \text{ を与える} \\
&\iff \exists\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \text{ s.t. } \begin{cases} g_2' = \alpha^2 g_2 \\ g_3' = \alpha^3 g_3 \end{cases} \\
&\iff \frac{g_2^3}{g_3^2} = \frac{g_2'^3}{g_3'^2} \\
&\iff \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} = \frac{g_2'^3}{g_2'^3 - 27g_3'^2}.
\end{aligned} \tag{12.23}
$$

$j = \dfrac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$ は**楕円モジュラー函数**と呼ばれる．また，次のようにみることもできる．

$$
\begin{aligned}
&\exists\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \text{ s.t. } \omega \mapsto \alpha\omega \text{ が全単射 } L \to L' \text{ を与える} \\
&\iff \alpha(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2) = \mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2' \\
&\iff \begin{pmatrix} \alpha\omega_1 \\ \alpha\omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} \qquad \left(\exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})\right) \\
&\iff \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{a\cdot\dfrac{\omega_2'}{\omega_1'} + b}{c\cdot\dfrac{\omega_2'}{\omega_1'} + d} \qquad \left(\exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})\right).
\end{aligned} \tag{12.24}
$$

$\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$ に $SL(2,\mathbb{R})$ が作用している．$\tau = \omega_2/\omega_1$, $\tau' = \omega_2'/\omega_1'$ とおくと，τ と τ' は $SL(2,\mathbb{Z})$ の作用で移り合うのである．

$\mathbb{H}/SL(2,\mathbb{Z})$ はどんな図形だろうか？

$$
j(\tau) = \frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2} \tag{12.25}
$$

とおく．ただし

$$
g_2(\tau) = 60 \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m\tau+n)^4}, \tag{12.26}
$$

$$
g_3(\tau) = 140 \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m\tau+n)^6}. \tag{12.27}
$$

すると，(12.23) と (12.24) により

$$
\tau \text{ と } \tau' \text{ が } SL(2,\mathbb{Z}) \text{ の作用で移り合う} \iff j(\tau) = j(\tau'). \tag{12.28}
$$

したがって，$j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ は同型写像 $\mathbb{H}/SL(2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{C}$ を誘導する．

$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ を周期とする $\mathbb{C}$ 上の有理型函数全体のなす体を**楕円函数体**と呼ぶ．これは，実は $\mathbb{C}$ に $\wp, \wp'$ を添加して得られる体である．

索引