

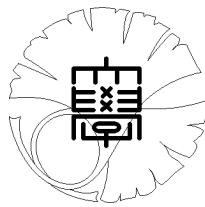
UTMS 2006–19

August 17, 2006

Facteurs epsilon p -adiques

by

Adriano MARMORA



UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

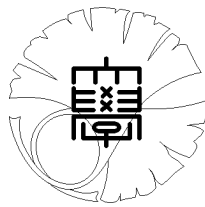
UTMS 2006–19

August 17, 2006

Facteurs epsilon p -adiques

by

Adriano MARMORA



UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

Facteurs Epsilon p -adiques

Adriano Marmora

ABSTRACT

We develop and study the epsilon factor of a “local system” of p -adic coefficients over the spectrum of a complete discrete valuation field K with finite residue field of characteristic $p > 0$. In the equal characteristic case, we define the epsilon factor of an overconvergent F -isocrystal over $\text{Spec}(K)$, using the p -adic monodromy theorem. We conjecture a global formula, the p -adic product formula, analogous to Deligne’s formula for étale ℓ -adic sheaves proved by Laumon, that explains the importance of this local invariant. Namely, for an overconvergent F -isocrystal over an open subset of a projective smooth curve X , the constant of the functional equation of the L -series is expressed as a product of the local epsilon factors at the points of X . We prove the conjecture for rank 1 unit-root overconvergent F -isocrystals and for finite unit-root overconvergent F -isocrystals. As a corollary, we deduce the conjecture for special overconvergent F -isocrystals on the multiplicative group \mathbb{G}_m . In the mixed characteristic case, we study the behavior of the epsilon factor by deformation to the field of norms.

1. Introduction

Dans cet article, nous développons la théorie des *facteurs epsilon* des «systèmes locaux» p -adiques sur $\text{Spec}(K)$, où K est un corps de valuation discrète complet, de corps résiduel k fini de caractéristique $p > 0$.

Soient C un corps de caractéristique zéro, $\psi: K \rightarrow C^*$ un caractère additif non-trivial, μ une mesure de Harr sur K à valeurs dans C . À toute C -représentation (D, ρ) du groupe de Weil absolu W_K de K , Deligne et Langlands [De73, 3.3.1] associent un invariant $\varepsilon(D, \psi, \mu)$ dans C^* , appelé facteur epsilon. C’est une généralisation de la constante locale de la thèse de Tate en dimension 1 [Ta67, 2.4.1]. Cette définition s’étend aux représentations de Weil-Deligne (D, ρ, N) , où N est un endomorphisme nilpotent de D satisfaisant à une donnée de compatibilité avec ρ , cf. (2.2).

Considérons d’abord le cas où K est de caractéristique nulle. Les systèmes locaux p -adiques sur $\text{Spec}(K)$ sont les représentations p -adiques du groupe de Galois absolu G_K de K , qui sont de de Rham dans la classification de Fontaine. Grâce au théorème de monodromie p -adique (cf. [And02], [Berg02], [Ked04] et [Meb02]), on sait qu’elles sont potentiellement semi-stables. La définition des conducteurs et du facteur epsilon d’une telle représentation V est due à Fontaine [Fon94b, 1.3.5] et Fontaine-Perrin-Riou [PR95, C.1.4] : soient C le corps des fractions de l’anneau des vecteurs de Witt $W(k)$ de k , et C^{nr} l’extension maximale non-ramifiée de C . On considère le module de Fontaine $D_{\text{pst}}(V)$ associé à V : il est muni d’une structure de C^{nr} -module de Deligne de K (i.e. un C^{nr} -espace vectoriel de dimension finie, muni d’une action semi-linéaire discrète de G_K , d’un isomorphisme de Frobenius et d’un opérateur de monodromie, vérifiant les compatibilités usuelles), et il est de dimension égale à celle de V , car V est potentiellement semi-stable. En linéarisant l’action discrète de G_K par le Frobenius, on obtient une C^{nr} -représentation de Weil-Deligne $D = (D_{\text{pst}}(V), \rho, N)$. On définit le facteur epsilon $\varepsilon(V, \psi, \mu)$ comme étant égal à $\varepsilon(D, \psi, \mu)$.

2000 Mathematics Subject Classification 11S15 (primary), 12H25, 14F30 (secondary).

Keywords: overconvergent F -isocrystals, de Rham representations, epsilon factor, product formula, norms field theory.

Supposons maintenant que K soit de caractéristique $p > 0$. Les représentations du groupe de Galois ne fournissent alors qu'une sous-catégorie de celle qu'on est amené à étudier. Soient C une extension finie du corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt $W(k)$ de k , munie d'un endomorphisme de Frobenius fixant une uniformisante, C^{nr} l'extension maximale non-ramifiée de C , et \mathcal{R} l'anneau de Robba sur K à coefficients dans C . La catégorie naturelle des systèmes locaux p -adiques sur $\text{Spec}(K)$ est celle des F -isocristaux surconvergents sur $\text{Spec}(K)$. Précisément, il s'agit des (φ, ∇) -modules sur \mathcal{R} , i.e. des modules libres de rang fini sur \mathcal{R} , munis d'une connexion et d'un endomorphisme de Frobenius compatibles. Parmi ceux-ci, les F -isocristaux surconvergents unités correspondent aux représentations galoisiennes à monodromie géométrique locale finie, cf. [Tsu98a].

Pour associer des facteurs epsilon aux F -isocristaux surconvergents sur $\text{Spec}(K)$, on procède d'une façon analogue au cas d'inégales caractéristiques. Par le théorème de monodromie p -adique (cf. [And02], [Ked04] et [Meb02]), tout (φ, ∇) -module sur \mathcal{R} admet une base de sections horizontales sur le «revêtement universel» $\mathcal{B} = \varinjlim \mathcal{R}(L)[\log T]$ de \mathcal{R} , où la limite est prise sur les extensions galoisiennes finies L de K , et $\mathcal{R}(L)$ est l'anneau de Robba sur L , cf. (3.2.2). L'espace $S(M)$ des sections horizontales de $M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B}$ hérite d'une structure de C^{nr} -module de Deligne de K . On obtient ainsi un foncteur $M \mapsto S(M)$ de la catégorie des (φ, ∇) -modules sur \mathcal{R} vers celle des C^{nr} -modules de Deligne de K , qu'on montre être une équivalence. Le module de Deligne $S(M)$ fournit, comme en inégales caractéristiques, une C^{nr} -représentation de Weil-Deligne, notée $\text{WD}(M)$. On définit le facteur epsilon $\varepsilon(M, \psi, \mu)$ comme étant égal à $\varepsilon(\text{WD}(M), \psi, \mu)$.

Pour un (φ, ∇) -module sur \mathcal{R} , Robba et Christol-Mebkhout ont défini l'irrégularité p -adique sur le modèle des équations différentielles classiques [ChMe02, 14.11]. Par un théorème de Matsuda et Tsuzuki (cf. [Mat02, 8.6] et [Tsu98b, 7.2.2]), l'irrégularité coïncide avec le conducteur de Swan. On s'intéresse dans cet article à l'analogue de ce théorème pour le facteur epsilon ; autrement dit on cherche une interprétation différentielle du facteur epsilon. Notre approche est de nature globale. On note \mathbb{P}^1 la droite projective sur k , \mathbb{G}_m le groupe multiplicatif sur k , et pour tout point fermé x de \mathbb{P}^1 , K_x le corps des fractions du complété de l'anneau local de \mathbb{P}^1 en x , $\eta_x = \text{Spec}(K_x)$. Tout F -isocristal M sur \mathbb{G}_m surconvergent le long $\{0, \infty\}$, fournit par image inverse un (φ, ∇) -module M_{η_x} sur $\mathcal{R}(\eta_x)$, où $\mathcal{R}(\eta_x)$ est l'anneau de Robba sur K_x . Inversement, Matsuda a construit un foncteur d'extension canonique $M \mapsto M^{\text{can}}$, analogue p -adique de l'extension canonique de Katz-Gabber : c'est un foncteur de la catégorie des (φ, ∇) -modules sur \mathcal{R} vers celle des F -isocristaux sur \mathbb{G}_m surconvergents le long $\{0, \infty\}$, tel que l'image inverse de M^{can} en 0 (resp. ∞) soit isomorphe à M (resp. modérée). Les objets dans l'image essentielle du foncteur d'extension canonique sont appelés F -isocristaux *spéciaux* sur \mathbb{G}_m . Le choix d'une forme différentielle méromorphe ω sur \mathbb{P}^1 non-nulle détermine, pour tout point fermé x de \mathbb{P}^1 , un caractère additif ψ_x de K_x . On en déduit une famille de facteurs epsilon $\varepsilon(M_{\eta_x}^{\text{can}}, \psi_x)$, dont celui en $x = 0$ est le facteur epsilon de M . Comme dans le cas étale ℓ -adique, il est raisonnable de s'attendre à ce que ces facteurs soit reliés par une formule. En effet, pour un faisceau constructible ℓ -adique sur une courbe propre et lisse X sur k , Deligne a conjecturé que la constante globale de l'équation fonctionnelle de sa série L s'exprime comme le produit des facteurs epsilon locaux aux points fermés de X . Cette conjecture a été démontrée par Laumon [Lau87, 3.2.1.1]. On formule un analogue p -adique de cette formule pour les F -isocristaux sur un ouvert non-vide U de X surconvergeant le long de $X \setminus U$, cf. (4.3.9). On démontre cette conjecture dans trois cas : pour les F -isocristaux surconvergents unités de rang 1 ; pour les F -isocristaux surconvergents unités finis, i.e. ayant monodromie globale finie ; et pour les F -isocristaux spéciaux sur \mathbb{G}_m . La démonstration du premier cas consiste à comparer l'équation fonctionnelle en cohomologie rigide avec l'équation fonctionnelle de Tate. Le deuxième cas se ramène au premier par induction de Brauer. On en déduit le troisième en utilisant une caractérisation des F -isocristaux surconvergents unipotents, due à Chierlotto et LeStum [ChLS99, 4.1.3].

Nous revenons à la fin de cet article au cas d'inégales caractéristiques. Dans un travail précé-

dent, nous avons établi un théorème de comparaison entre conducteur de Swan et irrégularité dans l'esprit du théorème de Matsuda-Tsuzuki, cf. [Mar04, Th.1]. Soient, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $K_r = K(\mu_{p^r})$ l'extension de K obtenue en ajoutant les racines p^r -ièmes de l'unité, V une représentation de Rham de G_K , $N_{\text{dR}}(V)$ le (φ, ∇) -module associé à V par Berger, V_r la restriction de V au groupe de Galois absolu G_{K_r} de K_r . Alors la suite $(\text{sw}(V_r))_{r \in \mathbb{N}}$ des conducteurs de Swan est stationnaire de limite égale à l'irrégularité de $N_{\text{dR}}(V)$. Dans la dernière section de cet article, on étend ce résultat aux facteurs epsilon. On se donne une extension arithmétiquement profinie K_∞ de K , qu'on peut supposer totalement ramifiée pour simplifier. On note, pour tout $r \in \mathbb{N}$, K_r la r -ième sous-extension élémentaire de K_∞ , \mathcal{O}_{K_r} l'anneau des entiers de K_r , et E_K (resp. \mathcal{O}_{E_K}) le corps des normes associé à K_∞ (resp. l'anneau des entiers de E_K). Le corps E_K est de valuation discrète, complet, d'égale caractéristique, de corps résiduel égal à k et de groupe de Galois absolu G_{E_K} canoniquement isomorphe à celui de K_∞ , noté H_K . Soient C le corps des fractions de $W(k)$ et C^{nr} l'extension maximale non-ramifiée de C . On pose $D = D_{\text{pst}}(V)$ et on note D_∞ la restriction de D à H_K , considérée comme C^{nr} -module de Deligne de E_K , qu'on appelle *déformation* de D au corps des normes. Ce module correspond, par l'équivalence décrite plus haut, à un F -isocrystal surconvergent M sur $\text{Spec}(E_K)$. Notre but est d'étudier les facteurs epsilon des restrictions V_r de V à G_{K_r} et de les comparer au facteur epsilon de M . La difficulté tient dans le choix des caractères additifs $\theta: E_K \rightarrow C^*$ et, pour tout r , $\psi_r: K_r \rightarrow C^*$. Pour ce faire, on introduit la notion de *tour admissible* de caractères additifs : c'est une suite de caractères additifs $(\psi_r: K_r \rightarrow C^*)_{r \in \mathbb{N}}$, satisfaisant une condition qui permet d'en déduire un caractère additif limite $\psi_\infty: E_K \rightarrow C^*$. On montre que tout caractère additif θ de E_K est limite d'une telle tour. Soient V une représentation de de Rham de G_K , $\theta: E_K \rightarrow C^*$ un caractère additif non-trivial, $(\psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$ une tour admissible convergente vers θ , et pour tout $r \in \mathbb{N}$, μ_r (resp. μ_∞) une mesure de Haar sur K_r (resp. E_K) à valeurs dans C , normalisée par $\mu_r(\mathcal{O}_{K_r}) = \mu_\infty(\mathcal{O}_{E_K})$. On montre que la suite des facteurs epsilon $(\varepsilon(V_r, \psi_r, \mu_r))_{r \in \mathbb{N}}$ est stationnaire de limite $\varepsilon(M, \theta, \mu_\infty)$. En particulier, si K_∞ est la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique de K , alors $M = N_{\text{dR}}(V)$ et on obtient une généralisation de [Mar04, Th.1] aux facteurs epsilon.

Ce texte est divisé en cinq sections, la première étant cette introduction. La deuxième section contient des rappels sur les représentations de Weil-Deligne et leurs constantes locales. La troisième est consacrée aux F -isocristaux sur un corps local d'égale caractéristique, appelés aussi (φ, ∇) -modules. On démontre l'équivalence tannakienne entre la catégorie des (φ, ∇) -modules sur l'anneau de Robba et la catégorie des modules de Deligne. Dans la sous-section (3.3), on fait le lien avec le théorème de classification de Tsuzuki pour les (φ, ∇) -modules unités. Dans la sous-section (3.4), on définit les constantes locales associées à un F -isocrystal. La quatrième section concerne la formule du produit pour les F -isocristaux surconvergents sur une courbe. Après des rappels sur les F -isocristaux et leurs fonctions L , on énonce la conjecture de la formule du produit (4.3.9), et on la démontre pour les F -isocristaux surconvergents unités de rang 1 (4.3.16), pour les F -isocristaux surconvergents unités finis (4.3.17) et pour les F -isocristaux spéciaux sur \mathbb{G}_m (4.3.19). La cinquième section traite de la déformation au corps des normes du facteur epsilon. Dans la dernière sous-section (5.4), on donne les applications au facteur epsilon d'une représentation de de Rham.

1.1 Convention. Soient G un groupe, A un anneau commutatif, M un A -module. Supposons que G agit à gauche sur A par des automorphismes d'anneaux. On dira que M est muni d'une action *semi-linéaire* de G s'il est muni d'un homomorphisme $\rho: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(M)$ tel que pour tout $\gamma \in G$, $a \in A$ et $m \in M$, on a $\rho(\gamma)(am) = \gamma(a)\rho(\gamma)(m)$.

Si A est muni d'un endomorphisme σ , on dit qu'un homomorphisme de groupes $f: M \rightarrow N$ est un morphisme *σ -linéaire* si pour tout $m \in M$ et $a \in A$, on a $f(am) = \sigma(a)f(m)$.

2. Constantes locales des représentations de Weil-Deligne

2.1 On désigne par K un corps de valuation discrète complet. On note \mathcal{O}_K l'anneau de valuation de K , \mathfrak{m}_K son idéal maximal et k son corps résiduel qu'on suppose fini de cardinal $q = p^f$. On note v_K la valuation de K normalisée par $v_K(K^*) = \mathbb{Z}$, et $\|x\|_K = q^{-v_K(x)}$ la valeur absolue d'un élément x de K .

Soient K^{sep} une clôture séparable de K , k^{sep} le corps résiduel de K^{sep} (qui est une clôture séparable de k), G_K (resp. G_k) le groupe de Galois de K^{sep} sur K (resp. k^{sep} sur k) et I_K le groupe d'inertie de K . On note σ le Frobenius absolu de k^{sep} , défini par $\sigma(x) = x^p$. L'automorphisme $F^* = \sigma^{-f}$ est un générateur topologique de G_k , qui l'identifie à $\widehat{\mathbb{Z}}$, et induit ainsi un homomorphisme $\nu: G_K \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$. On appelle groupe de Weil de K^{sep} sur K et on note W_K le sous-groupe de G_K image inverse de \mathbb{Z} par ν . Cette définition ne dépend pas du générateur topologique de G_k choisi. On appellera *Frobenius géométrique* tout élément de W_K qui relève F^* .

Pour toute extension finie L de K , W_L est un sous-groupe d'indice fini de W_K ; si de plus L/K est galoisienne, alors W_L est distingué dans W_K et le quotient s'identifie au groupe de Galois de L sur K .

2.2 Soit C un corps de caractéristique 0. On dit qu'une représentation de W_K dans un C -espace vectoriel de dimension finie est une *représentation de Weil* si elle est triviale sur un sous-groupe ouvert de I_K . On notera $\text{Rep}_C(W_K)$ la catégorie abélienne des C -représentations de Weil de K .

Une *C -représentation de Weil-Deligne* de K est la donnée d'une représentation de Weil (V, ρ) de K , munie d'une application C -linéaire $N: V \rightarrow V$ nilpotente, telle que, pour tout w dans W_K , on ait $\rho(w)N\rho(w)^{-1} = q^{\nu(w)}N$. On note $\text{Rep}_C(WD_K)$ la catégorie des C -représentations de Weil-Deligne de K , les morphismes étant les applications linéaires qui commutent aux actions de W_K et N .

Une C -représentation de Weil de K est une représentation de Weil-Deligne en prenant $N = 0$. On identifie ainsi $\text{Rep}_C(W_K)$ à une sous-catégorie strictement pleine de $\text{Rep}_C(WD_K)$. Le foncteur $(V, \rho, N) \mapsto (\text{Ker } N, \rho|_{\text{Ker } N})$, de $\text{Rep}_C(WD_K)$ dans $\text{Rep}_C(W_K)$, est un adjoint à droite de l'inclusion et aussi un quasi-inverse à gauche.

La proposition suivante est bien connue, cf. [Lau87, preuve de 3.2.1.7], [Mar06, partie 2 (1.1.3)] :

PROPOSITION 2.3. *Supposons C algébriquement clos et soit (V, ρ) une C -représentation irréductible de Weil de K . Alors il existe un caractère non ramifié $\chi: W_K \rightarrow C^*$ et une C -représentation (V, ρ') de W_K qui se factorise par un quotient fini, tels que $\rho = \rho' \otimes \chi$.*

2.4 La théorie du corps de classe local fournit un isomorphisme, dit de réciprocité, entre le plus grand quotient abélien W_K^{ab} de W_K et K^* , normalisé de sorte que la classe d'un Frobenius géométrique corresponde à une uniformisante de K . On note $r_K: W_K \rightarrow K^*$ l'homomorphisme obtenu en composant la projection canonique de W_K sur W_K^{ab} avec l'isomorphisme de réciprocité. Se donner une C -représentation de Weil de K de rang 1 revient à se donner un homomorphisme localement constant $K^* \rightarrow C^*$. Un tel homomorphisme est classiquement appelé *quasi-caractère*. Il est dit non ramifié s'il est trivial sur \mathcal{O}_K^* ; il correspond alors à une C -représentation de Weil non-ramifiée de rang 1.

2.5 Soit Γ un groupe commutatif. On note Γ_p (resp. Γ_{p^∞}) le sous-groupe de Γ des éléments d'ordre p (resp. une puissance de p). On appelle *caractère additif de K à valeurs dans Γ* un homomorphisme localement constant du groupe additif de K dans Γ , K étant muni de la topologie induite par la valuation v_K . Un tel homomorphisme se factorise par Γ_{p^∞} (en fait par Γ_p si K est de caractéristique p). On s'intéresse surtout aux cas $\Gamma = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ et $\Gamma = C^*$. Dans le second cas, on notera $\mu_{p^\infty}(C) = \Gamma_{p^\infty}$ et $\mu_p(C) = \Gamma_p$. On note $\text{Hom}_C(K, \Gamma)$ le groupe des caractères additifs de K à

valeurs dans Γ .

Soit ψ un caractère additif non-trivial de K à valeurs dans Γ . On appelle codifférente de ψ et on note $\mathcal{D}(\psi)^{-1}$, l'idéal fractionnaire de K défini par $\mathcal{D}(\psi)^{-1} = \{x \in K \mid \forall y \in \mathcal{O}_K, \psi(xy) = 1\}$. L'inverse de la codifférente, noté $\mathcal{D}(\psi)$, est appelé différente ; on étend cette définition en posant $\mathcal{D}(1_K) = (0)$, où 1_K est le caractère trivial. On appelle ordre de ψ et on note $d(\psi)$, la valuation de la différente $d(\psi) = v_K(\mathcal{D}(\psi)) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid \psi(\mathfrak{m}_K^{-n}) = 1\}$.

L'action de K sur lui même par multiplication induit une action de K sur $\text{Hom}_c(K, \Gamma)$ qui en fait un K -espace vectoriel.

PROPOSITION 2.6 [Ta67, 2.2.1]. *La dimension de $\text{Hom}_c(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ sur K est égale à 1. La dimension de $\text{Hom}_c(K, C^*)$ sur K est inférieure ou égale à 1 ; si C est algébriquement clos, elle vaut 1.*

2.7 Supposons K de caractéristique p . Il existe alors un homomorphisme canonique $k \rightarrow \mathcal{O}_K$ inverse à gauche de l'homomorphisme de réduction $\mathcal{O}_K \rightarrow k$. On désigne par $\Omega_{K/k}^1$ l'espace vectoriel des différentielles de K/k , et par $d: K \rightarrow \Omega_{K/k}^1$ la dérivation canonique. Observons que $\Omega_{K/k}^1$ est un K -espace vectoriel de dimension 1 car k est parfait.

Il existe un homomorphisme canonique, \mathcal{O}_K -linéaire, $\text{Res}_k: \Omega_{K/k}^1 \rightarrow k$, appelé résidu, défini par la propriété suivante : pour toute uniformisante π de K et tout entier m , $\text{Res}_k(\pi^m d\pi) = \delta_{m,-1}$, où $\delta_{m,-1}$ est le symbole de Kronecker.

Il existe une application canonique, notée abusivement $v_K: \Omega_{K/k}^1 \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$, définie par la propriété suivante : pour tout $a \in K$ et toute uniformisante π de K , $v_K(a d\pi) = v_K(a)$.

On observe que tout caractère additif $K \rightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ se factorise par le sous-groupe $\frac{1}{p}\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p$ de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, qui est canoniquement isomorphe à \mathbb{F}_p .

LEMME 2.8 [Lau87, Rem. 3.1.3.6]. *Supposons K de caractéristique p . L'application de $\Omega_{K/k}^1$ dans $\text{Hom}_c(K, \mathbb{F}_p)$, qui à ω associe le caractère additif $\psi_\omega: x \mapsto \text{tr}_{k/\mathbb{F}_p}(\text{Res}_k(x\omega))$, est un isomorphisme. L'ordre de ψ_ω est égal à $v_K(\omega)$.*

2.9 Soit $\phi: K \rightarrow C^*$ un caractère additif non-trivial d'ordre d . Par (2.6), l'homomorphisme

$$\Phi(\phi): K \longrightarrow \text{Hom}_c(K, C^*),$$

qui à η associe le caractère $x \mapsto \phi(\eta x)$ est un isomorphisme. Si $\eta \in K$, alors $d(\Phi(\phi)(\eta)) = d + v_K(\eta)$. Donc $\Phi(\phi)$ envoie \mathcal{O}_K dans le sous-groupe $\text{Hom}(K/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*)$ de $\text{Hom}_c(K, C^*)$. On note abusivement cette restriction

$$\Phi(\phi): \mathcal{O}_K \longrightarrow \text{Hom}(K/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*).$$

On vérifie facilement que c'est un isomorphisme. Pour tout $n \leq -d$, l'homomorphisme composé de $\Phi(\phi)$ avec la restriction $\text{res}_n: \text{Hom}(K/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*) \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{m}_K^n/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*)$ a pour noyau

$$\text{Ker}(\text{res}_n \circ \Phi(\phi)) = \{\eta \in \mathcal{O}_K \mid \phi(\eta \mathfrak{m}_K^n) = 1\} = \mathfrak{m}_K^{-n} \mathcal{D}(\phi)^{-1} = \mathfrak{m}_K^{-n-d}.$$

On obtient ainsi un monomorphisme

$$\Phi_n(\phi): \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K^{-n-d} \hookrightarrow \text{Hom}(\mathfrak{m}_K^n/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*)$$

entre groupes de même ordre, donc un isomorphisme. Pour résumer, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} K & \longleftarrow & \mathcal{O}_K & \longrightarrow & \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K^{-n-d} \\ \Phi(\phi) \downarrow \wr & & \Phi(\phi) \downarrow \wr & & \Phi_n(\phi) \downarrow \wr \\ \text{Hom}_c(K, C^*) & \longleftarrow & \text{Hom}(K/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*) & \xrightarrow{\text{res}_n} & \text{Hom}(\mathfrak{m}_K^n/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*) \end{array}$$

2.10 Soit (V, ρ) une C -représentation de Weil de W_K . On note $\text{sw}(V)$ (resp. $\text{ar}(V)$) le conducteur de Swan (resp. Artin) de la restriction de ρ à I_K (cf. [Ser67, §19]). Si F^* est un Frobenius géométrique de W_K , on pose,

$$L(V, t) = \det_C(1 - t\rho(F^*)|V^{I_K})^{-1} \in C[[t]].$$

Cette série formelle ne dépend évidemment pas du Frobenius choisi.

2.11 Soit μ une mesure de Haar sur K à valeurs dans C (cf. [De73, 6.1]). Pour tout $x, y \in K$, on a $\mu(x + y\mathcal{O}_K) = \|y\|_K \mu(\mathcal{O}_K)$. Donc μ est déterminé par $\mu(\mathcal{O}_K)$, et si μ' est une mesure de Haar sur K , il existe $a \in C^*$, tel que $\mu' = a\mu$.

DÉFINITION 2.12 [De73, 3.3–3.4.3]. Soient $\chi: K^* \rightarrow C^*$ un quasi-caractère, $\psi: K \rightarrow C^*$ un caractère additif non-trivial, μ une mesure de Haar sur K à valeurs dans C et π une uniformisante de K . On appelle *facteur epsilon* de (χ, ψ, μ) l'élément de C^* défini par

$$\varepsilon(\chi, \psi, \mu) = \begin{cases} \chi(\pi)^{d(\psi)} q^{d(\psi)} \mu(\mathcal{O}_K) & \text{si } \chi \text{ est non-ramifié;} \\ \int_{K^*} \chi^{-1} \psi \mu & \text{si } \chi \text{ est ramifié.} \end{cases}$$

Cela ne dépend pas du choix de l'uniformisante π .

2.13 Pour une catégorie abélienne A , on notera $\mathbf{Gr}(A)$ son groupe de Grothendieck. Pour tout objet V de A , on notera $[V]$ la classe de V dans $\mathbf{Gr}(A)$. On appelle C -représentation *virtuelle* de Weil de K un élément de $\mathbf{Gr}(\text{Rep}_C(W_K))$.

THÉORÈME 2.14 [De73, Th.4.1]. Soient $\psi: K \rightarrow C^*$ un caractère additif non-trivial et μ une mesure de Haar sur K à valeurs dans C . Il existe un unique homomorphisme

$$\varepsilon(\cdot, \psi, \mu): \mathbf{Gr}(\text{Rep}_C(W_K)) \longrightarrow C^*$$

vérifiant les conditions suivantes :

(1) pour tout $a \in C^*$ et toute C -représentation virtuelle de Weil λ de K , on a

$$\varepsilon(\lambda, \psi, a\mu) = a^{\dim \lambda} \varepsilon(\lambda, \psi, \mu);$$

(2) pour toute extension séparable finie L de K contenue dans K^{sep} , pour toute C -représentation virtuelle de Weil λ de L de rang 0, on a

$$\varepsilon(\text{Ind}_{W_L}^{W_K} \lambda, \psi, \mu) = \varepsilon(\lambda, \psi \circ \text{tr}_{L/K}, \mu),$$

où $\text{tr}_{L/K}$ désigne la trace de L à K et $\text{Ind}_{W_L}^{W_K} \lambda$ la C -représentation virtuelle de Weil de K induite par λ ;

(3) si V est de rang 1, de quasi-caractère associé $\chi: K^* \rightarrow C^*$, alors $\varepsilon([V], \psi, \mu)$ est la constante $\varepsilon(\chi, \psi, \mu)$ définie dans (2.12).

Remarque 2.15. i) Dans *loc.cit.* Th. 4.1, le corps C est supposé algébriquement clos. On montre immédiatement par descente galoisienne que cette hypothèse est superflue (cf. aussi *loc.cit.* Th. 6.5).

ii) Si λ est de dimension zéro, $\varepsilon(\lambda, \psi, \mu)$ ne dépend pas de μ en vertu de (2); on le notera $\varepsilon(\lambda, \psi)$. Pour $V \in \text{Rep}_C(W_K)$, on notera simplement $\varepsilon(V, \psi, \mu)$ au lieu de $\varepsilon([V], \psi, \mu)$ et on l'appellera *facteur epsilon* de la C -représentation de Weil V .

2.16 Soit (V, ρ, N) une C -représentation de Weil-Deligne de K . On note abusivement par V la C -représentation de Weil-Deligne (V, ρ, N) et par V° la C -représentation de Weil (V, ρ) . Soit F^* un Frobenius géométrique de W_K . On définit les conducteurs d'Artin et de Swan de V par les formules

[De73, 8.12.1] :

$$\begin{aligned} \text{ar}(V) &= \text{sw}(V^\circ) + \dim_C V - \dim_C (\text{Ker } N)^{I_K}, \\ \text{sw}(V) &= \text{sw}(V^\circ). \end{aligned}$$

On appelle *fonction* L de V et on note $L(V, t)$, la série formelle définie par [loc. cit. 8.12.2]

$$L(V, t) = \det_C(1 - t\rho(\mathbf{F}^*) | (\text{Ker } N)^{I_K})^{-1} \in C[[t]].$$

Pour un caractère additif non-trivial $\psi: K \rightarrow C^*$ et μ une mesure de Haar sur K à valeurs dans C , on pose [loc. cit. 5.1 et 8.12]

$$\varepsilon(V, \psi, \mu) = \varepsilon(V^\circ, \psi, \mu) \det_C \left(-\rho(\mathbf{F}^*) \Big| (V^{I_K} / (\text{Ker } N)^{I_K}) \right).$$

On définit aussi le *facteur epsilon modifié* par la formule [loc. cit. 8.12]

$$\varepsilon_0(V, \psi, \mu) = \varepsilon(V, \psi, \mu) \det_C \left(-\rho(\mathbf{F}^*) \Big| (\text{Ker } N)^{I_K} \right).$$

Ces définitions ne dépendent pas du choix du Frobenius géométrique \mathbf{F}^* . Lorsque $N = 0$, elles coïncident avec les définitions données plus haut pour une représentation de Weil, cf. (2.2), (2.10) et (2.14).

2.17 On pose $U_K(0) = \mathcal{O}_K^*$ et pour tout entier $n \geq 0$, $U_K(n) = 1 + \mathfrak{m}_K^n$. Soit $\chi: K^* \rightarrow C^*$ un quasi-caractère. On note $\text{ar}(\chi)$ le plus petit entier naturel tel que $U_K(\text{ar}(\chi)) \subseteq \text{Ker } \chi$; c'est le conducteur d'Artin de la C -représentation de Weil de rang 1 associée à χ .

Soient $\chi: K^* \rightarrow C^*$ un quasi-caractère et $\psi: K \rightarrow C^*$ un caractère additif non-trivial. On note c la partie entière de $\frac{\text{ar}(\chi)}{2}$ et $c^+ = \text{ar}(\chi) - c \geq c$. Pour tout $y, z \in K$ tels que $v_K(y) \geq c^+$ et $v_K(z) \geq c^+$, on vérifie facilement que $\chi(1+y+z) = \chi(1+y)\chi(1+z)$, cf. [De73, 4.16]. On en déduit un homomorphisme

$$\begin{aligned} \bar{\chi}: \mathfrak{m}_K^{c^+} / \mathfrak{m}_K^{\text{ar}(\chi)} &\longrightarrow C^* \\ \text{cl}(y) &\longmapsto \chi(1+y). \end{aligned}$$

On vérifie par (2.9) (cf. [De73, 4.16]) qu'il existe un élément $a \in K^*$ tel que :

$$\forall y \in K \mid 2v_K(y) \geq \text{ar}(\chi), \quad \chi(1+y) = \psi(ay). \quad (2.17.1)$$

On appelle un élément $a \in K^*$ satisfaisant (2.17.1) une ψ -jauge de χ . On vérifie que $v_K(a) = -\text{ar}(\chi) - d(\psi)$, que sa classe dans $K^*/U_K(c)$ est uniquement déterminée et que tout élément de cette classe est une ψ -jauge.

PROPOSITION 2.18 [DeHe81, §1.2]. Soient $\chi: K^* \rightarrow C^*$ un quasi-caractère, $\psi: K \rightarrow C^*$ un caractère additif non-trivial et a une ψ -jauge de χ . On note 1_K le quasi-caractère trivial de K .

(1) Si $\text{ar}(\chi) = 2c$ est pair, on a

$$\varepsilon([\chi] - [1_K], \psi) = q^c \frac{\psi(a)}{\chi(a)}.$$

(2) Si $\text{ar}(\chi) = 2c + 1$ est impair, on a

$$\varepsilon([\chi] - [1_K], \psi) = q^c \sum_{\bar{\beta} \in U_K(c)/U_K(c+1)} \frac{\psi(a\beta)}{\chi(a\beta)},$$

où β est un relèvement de $\bar{\beta}$ dans $U_K(c)$.

PROPOSITION 2.19 [De73, §5 (5.4) et (5.5.3)]. Soient V une C -représentation de Weil de K , $\psi: K \rightarrow C^*$ un caractère additif non-trivial et μ une mesure de Haar sur K à valeurs dans C .

(1) Pour tout $a \in K^*$,

$$\begin{aligned}\varepsilon(V, \psi(a \cdot), \mu) &= \det V(a) q^{v_K(a) \dim V} \varepsilon(V, \psi, \mu), \\ \varepsilon_0(V, \psi(a \cdot), \mu) &= \det V(a) q^{v_K(a) \dim V} \varepsilon_0(V, \psi, \mu),\end{aligned}$$

où $\det V(a)$ désigne la valeur en a du quasi-caractère associé à $\det V$.

(2) Si (W, ρ) est une C -représentation de Weil de K non ramifiée, alors

$$\begin{aligned}\varepsilon(V \otimes W, \psi, \mu) &= \det \rho(\mathbb{F}^{\text{ar}(V)+d(\psi) \dim V}) \varepsilon(V, \psi, \mu)^{\dim W}, \\ \varepsilon_0(V \otimes W, \psi, \mu) &= \det \rho(\mathbb{F}^{\text{sw}(V)+(d(\psi)+1) \dim V}) \varepsilon_0(V, \psi, \mu)^{\dim W};\end{aligned}$$

où \mathbb{F}^* est un Frobenius géométrique de W_K . En particulier,

$$\begin{aligned}\varepsilon(W, \psi, \mu) &= \det \rho(\mathbb{F}^{*d(\psi)}) q^{d(\psi) \dim W} \mu(\mathcal{O}_K)^{\dim W}, \\ \varepsilon_0(W, \psi, \mu) &= \det \rho(\mathbb{F}^{*d(\psi)+1}) (-1)^{\dim W} q^{d(\psi) \dim W} \mu(\mathcal{O}_K)^{\dim W}.\end{aligned}$$

3. F -isocristaux sur un corps local

3.0.1 Dans cette section, K désigne un corps de valuation discrète, complet de caractéristique $p > 0$, à corps résiduel k parfait. A partir de (3.4), on supposera k fini de cardinal $q = p^f$. On reprend les notations de (2.1). On fixe une uniformisante de K , ce qui détermine un isomorphisme $\mathcal{O}_K \cong k[[T]]$. Par extension finie séparable de K , on sous-entend une extension finie contenue dans K^{sep} . Pour une telle extension L , on notera \mathcal{O}_L son anneau d'entiers, k_L (resp. \mathfrak{m}_L) le corps résiduel (resp. l'idéal maximal) de \mathcal{O}_L et G_L le groupe de Galois de K^{sep} sur L .

3.0.2 Soient $h \geq 1$ un entier tel que k contienne un sous-corps de cardinal¹ p^h qu'on note \mathbb{F} , et Λ une extension finie de \mathbb{Q}_p de corps résiduel \mathbb{F} . On note $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de k et on pose $C = \Lambda \otimes_{W(\mathbb{F})} W(k)$. C'est un corps de valuation discrète complet de corps résiduel k . On note \mathcal{O}_C (resp. \mathfrak{m}_C) l'anneau des entiers de C (resp. l'idéal maximal de \mathcal{O}_C), v_C la valuation de C normalisée par $v_C(C^*) = \mathbb{Z}$ et $\|x\| = p^{-hv_C(x)}$ la valeur absolue d'un élément $x \in C$. On munit C de l'endomorphisme $\sigma_C = \text{Id}_\Lambda \otimes \sigma^h$, où σ est l'endomorphisme de Frobenius de $W(k)$. Le sous-corps de C fixé par σ_C est Λ . On dit que σ_C est un Frobenius d'ordre h de C . Les corps C et Λ apparaîtront dans la suite comme des *corps de coefficients*.

3.1 Modules de Deligne

3.1.1 Un φ -module sur C est un C -espace vectoriel de dimension finie M muni d'une application σ_C -linéaire injective $\varphi: M \rightarrow M$. Comme M est de dimension finie et σ_C est un isomorphisme, φ est un isomorphisme σ_C -linéaire, qu'on appelle *Frobenius* de M . Un morphisme de φ -modules sur C est une application linéaire commutant aux Frobenius. On désigne par $\Phi M(C)$ la catégorie des φ -modules sur C .

Un (φ, N) -module sur C est un φ -module M sur C , muni d'un endomorphisme N du C -espace vectoriel sous-jacent à M , tel que $N \circ \varphi = p^h \varphi \circ N$. Comme M est de dimension finie, N est nilpotent. On appellera N l'*opérateur de monodromie* de M . Un morphisme de (φ, N) -modules sur C est un morphisme de φ -modules commutant aux opérateurs de monodromie. On désigne par $\Phi M_{\log}(C)$ la catégorie des (φ, N) -modules sur C .

¹Il est usuel de poser $q = p^h$. Nous n'utilisons pas cette notation pour éviter toute confusion avec le cardinal de k dans le cas où ce dernier est fini.

3.1.2 Soit L une extension finie séparable de K . On note C_L l'extension finie non-ramifiée de C de corps résiduel k_L . Elle est unique à isomorphisme unique près. En fait C_L est isomorphe à $C \otimes_{\mathbb{W}(k)} \mathbb{W}(k_L)$, car C et $\text{Fr } \mathbb{W}(k)$ sont linéairement disjoints sur $\text{Fr } \mathbb{W}(k)$. On pose $C^{\text{nr}} = \varinjlim C_L$, où la limite est prise sur toutes les extensions L/K finies et séparables contenues dans K^{sep} . On note \widehat{C}^{nr} le complété p -adique de C^{nr} , il s'identifie à $C \otimes_{\mathbb{W}(k)} \mathbb{W}(k^{\text{sep}})$. On munit \widehat{C}^{nr} de l'action de G_K produit tensoriel de l'action triviale sur C et de l'action naturelle sur $\mathbb{W}(k^{\text{sep}})$ via $G_K \rightarrow \text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$. Le groupe de cohomologie $H_{\text{cont}}^1(\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k), \mathbb{W}(k^{\text{sep}}))$ est trivial, cf. [Ser68b, III-33]. On en déduit que le sous-corps de \widehat{C}^{nr} fixé par G_L est C_L . Le Frobenius σ_C de C s'étend de façon unique à C^{nr} et par continuité à \widehat{C}^{nr} ; on le note encore σ_C .

DÉFINITION 3.1.3 [Fon94b, §1]. (1) Un \widehat{C}^{nr} -module de Deligne de K est la donnée d'un \widehat{C}^{nr} -espace vectoriel V de dimension finie muni des structures suivantes :

- i) une action semi-linéaire continue de G_K triviale sur un sous-groupe ouvert de I_K ;
- ii) un endomorphisme $N: V \rightarrow V$ nilpotent et équivariant;
- iii) une application σ_C -linéaire $\varphi: V \rightarrow V$ injective et équivariante telle que

$$N \circ \varphi = p^h \varphi \circ N.$$

(2) Un C^{nr} -module de Deligne de K est la donnée d'un C^{nr} -espace vectoriel V de dimension finie muni des structures suivantes :

- i) une action semi-linéaire discrète de G_K , i.e. telle que le stabilisateur de tout élément de V soit ouvert dans G_K ;
- ii) un endomorphisme $N: V \rightarrow V$ nilpotent et équivariant;
- iii) une application σ_C -linéaire $\varphi: V \rightarrow V$ injective et équivariante telle que

$$N \circ \varphi = p^h \varphi \circ N.$$

(3) Soit L une extension finie galoisienne de K . Un C_L -module de Deligne de K est la donnée d'un C_L -espace vectoriel V de dimension finie muni des structures suivantes :

- i) une action semi-linéaire de $\text{Gal}(L/K)$;
- ii) un endomorphisme $N: V \rightarrow V$ nilpotent et équivariant;
- iii) une application σ_C -linéaire $\varphi: V \rightarrow V$ injective et équivariante telle que

$$N \circ \varphi = p^h \varphi \circ N.$$

Dans chacun de ces cas, on appelle N (resp. φ) l'*opérateur de monodromie* (resp. le *Frobenius*) de V .

Un morphisme de modules de Deligne de K est une application linéaire équivariante qui commute aux Frobenius et aux opérateurs de monodromie. On note $\text{Del}_{C_L}(\text{Gal}(L/K))$ la catégorie des C_L -modules de Deligne de K , $\text{Del}_{C^{\text{nr}}}(G_K)$ la catégorie des C^{nr} -modules de Deligne de K , et de même pour \widehat{C}^{nr} . On vérifie aisément que ces catégories sont abéliennes et Λ -linéaires.

Remarque 3.1.4. Fontaine a introduit les modules de Deligne pour un corps local K d'inégale caractéristique [Fon94b, §1]. Il appelle (φ, N, G_K) -modules les C^{nr} -modules de Deligne de K et p -modules de Deligne les \widehat{C}^{nr} -modules de Deligne de K . On uniformise ici la nomenclature en raison du rôle similaire que ces objets joueront dans la suite.

Exemple 3.1.5. On note $C^{\text{nr}}(1)$ le C^{nr} -module de Deligne $(C^{\text{nr}}, p^{-h}\sigma_C, 0)$ de K . Pour tout C^{nr} -module de Deligne (V, φ, N) et tout entier n , on note $V(n)$ le C^{nr} -module de Deligne $(V, p^{-nh}\varphi, N)$. De même pour les \widehat{C}^{nr} -modules (resp. C_L -modules) de Deligne de K .

3.1.6 Soient L une extension galoisienne finie de K , \tilde{C}^{nr} l'un des corps C^{nr} ou \widehat{C}^{nr} . L'extension des scalaires $V \mapsto V \otimes_{C_L} \tilde{C}^{\text{nr}}$ induit un foncteur

$$- \otimes_{C_L} \tilde{C}^{\text{nr}} : \text{Del}_{C_L}(\text{Gal}(L/K)) \longrightarrow \text{Del}_{\tilde{C}^{\text{nr}}}(G_K)$$

défini comme suit : soit $(V, \varphi_V, N_V) \in \text{Del}_{C_L}(\text{Gal}(L/K))$, on muni $W = V \otimes_{C_L} \tilde{C}^{\text{nr}}$ de l'opérateur de monodromie $N_W = N_V \otimes \text{Id}$, du Frobenius $\varphi_W = \varphi_V \otimes_{\sigma_C} \sigma_C$ et de l'action semi-linéaire diagonale de G_K . On vérifie facilement que (W, φ_W, N_W) est un \tilde{C}^{nr} -module de Deligne de K . Comme $(\tilde{C}^{\text{nr}})^{G_L} = C_L$, ce foncteur est pleinement fidèle.

De façon analogue, l'extension des scalaires de C^{nr} à \widehat{C}^{nr} induit un foncteur de complétion [Fon94b, 1.2.1]

$$\underline{Co} : \text{Del}_{C^{\text{nr}}}(G_K) \longrightarrow \text{Del}_{\widehat{C}^{\text{nr}}}(G_K).$$

PROPOSITION 3.1.7 [Fon94b, Prop 1.2.2]. (1) Soient \tilde{C}^{nr} l'un des corps C^{nr} ou \widehat{C}^{nr} , V un \tilde{C}^{nr} -module de Deligne de K . Il existe une extension galoisienne finie L/K et un C_L -module de Deligne W de K , tel que $W \otimes_{C_L} \tilde{C}^{\text{nr}} \cong V$. On dit que V est trivialisé par L et que W est une descente de V à L .

(2) Le foncteur \underline{Co} est une équivalence de catégories. Un quasi-inverse est donné par

$$\underline{Déco} : \text{Del}_{\widehat{C}^{\text{nr}}}(G_K) \longrightarrow \text{Del}_{C^{\text{nr}}}(G_K),$$

où, pour tout \widehat{C}^{nr} -module de Deligne V , $\underline{Déco}(V)$ est le sous-ensemble de V formé des éléments de stabilisateur ouvert.

Dém. La démonstration est la même qu'en inégales caractéristiques. Il suffit de calquer la preuve de [Fon94b, Prop 1.2.2]. \square

3.1.8 Soient \tilde{C}^{nr} l'un des corps C^{nr} ou \widehat{C}^{nr} et V un \tilde{C}^{nr} -module de Deligne de K . Par hypothèse, l'action de I_K sur V est linéaire et se factorise par un quotient fini. On peut donc définir son conducteur et ses pentes de Swan, cf. [Kat88, 1.2–1.6] ; ces définitions ne dépendent pas du quotient choisi. On appelle ces invariants le *conducteur* et les *pentes de Swan* de V ; on note le premier $\text{sw}(V)$.

3.2 (φ, ∇) -modules

3.2.1 Pour tout nombre rationnel $0 \leq \rho < 1$, on pose

$$\mathcal{A}([\rho, 1[) = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n \mid \forall n \in \mathbb{Z}, a_n \in C, \forall \rho' \in [\rho, 1[, \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \|a_n\| \rho'^n = 0 \right\}$$

l'anneau des séries convergentes sur la couronne $[\rho, 1[$ à coefficients dans C . C'est une C -algèbre topologique qui est un espace de Fréchet pour la topologie donnée par la famille des normes $\|\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n\|_{\rho'} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|a_n\| \rho'^n$, pour $\rho \leq \rho' < 1$. On l'appelle anneau des *fonctions analytiques* sur la couronne $[\rho, 1[$. On appelle *anneau de Robba*, et on note \mathcal{R} , la réunion des $\mathcal{A}([\rho, 1[)$ pour ρ dans un voisinage (à gauche) de 1. C'est une C -algèbre topologique pour la topologie limite inductive.

On pose

$$\mathcal{E}^\dagger = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n \in \mathcal{R} \mid \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall n \in \mathbb{Z}, \|a_n\| < b \right\}.$$

C'est un corps dit *corps des fonctions surconvergentes bornées*. Il est muni de la valuation discrète donnée par $v_1(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n) = \min_{n \in \mathbb{Z}} v_C(a_n)$. On note $\|\cdot\|_1 = p^{-hv_1(\cdot)}$ la norme associée à v_1 , dite *norme de Gauss*. L'anneau des entiers $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ de \mathcal{E}^\dagger est hensélien. Son corps résiduel est canoniquement isomorphe à $k[[T]]$, donc à \mathcal{O}_K par l'isomorphisme $\mathcal{O}_K \cong k[[T]]$ fixé dans (3.0.1). L'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ est une

$\mathcal{O}_C[[T]][T^{-1}]$ -algèbre et s'identifie à un sous-anneau du complété de $\mathcal{O}_C[[T]][T^{-1}]$ pour la topologie (\mathfrak{m}_C) -adique.

On appelle *Frobenius d'ordre h* de \mathcal{E}^\dagger un relèvement σ_C -linéaire et continu à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ du Frobenius $\sigma^h: x \mapsto x^{p^h}$ de K . Un tel homomorphisme se prolonge évidemment de façon unique à \mathcal{E}^\dagger . Tout Frobenius de \mathcal{E}^\dagger se prolonge de façon unique en un endomorphisme continu de \mathcal{R} , cf. [Mat02, 2.2]; on l'appelle *Frobenius* de \mathcal{R} . Dans la suite, on fixe un Frobenius $\sigma_{\mathcal{E}^\dagger}$ d'ordre h de \mathcal{E}^\dagger ; on notera $\sigma_{\mathcal{R}}$ son prolongement à \mathcal{R} .

Pour A un des anneaux \mathcal{R} ou \mathcal{E}^\dagger , on note $\widehat{\Omega}_{A/C}^1$ le A -module des différentielles continues de A sur C , $d: A \rightarrow \widehat{\Omega}_{A/C}^1$ la dérivation canonique. Par construction C s'identifie au *corps des constantes* $\text{Ker}(d)$ de A . Par universalité, il existe un morphisme σ_A -linéaire $d\sigma_A: \widehat{\Omega}_{A/C}^1 \rightarrow \widehat{\Omega}_{A/C}^1$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d} & \widehat{\Omega}_{A/C}^1 \\ \sigma_A \downarrow & & \downarrow d\sigma_A \\ A & \xrightarrow{d} & \widehat{\Omega}_{A/C}^1 \end{array}$$

Par la définition de Frobenius, la série $\sigma_{\mathcal{R}}(T)/T^{p^h}$ appartient à $1 + \mathfrak{m}_C \mathcal{O}_C[[T]]$. Donc la série $\log(\sigma_{\mathcal{R}}(T)/T^{p^h})$ appartient à $\mathcal{O}_C[[T]]$. Soit $\mathcal{R}[X]$ l'anneau des polynômes en une variable à coefficients dans \mathcal{R} . On prolonge $\sigma_{\mathcal{R}}$ et $d: \mathcal{R} \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathcal{R}/C}^1$ en un homomorphisme d'anneaux $\sigma_{\mathcal{R}}: \mathcal{R}[X] \rightarrow \mathcal{R}[X]$ et une C -dérivation $d: \mathcal{R}[X] \rightarrow \mathcal{R}[X] \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}_{\mathcal{R}/C}^1$, en posant

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{R}}(X) &= p^h X + \log \frac{\sigma_{\mathcal{R}}(T)}{T^{p^h}}, \\ dX &= \frac{dT}{T}. \end{aligned}$$

Dans la suite, on désignera par $\log T$ la variable X . On appelle *monodromie* de $\mathcal{R}[\log T]$, et on note $N: \mathcal{R}[\log T] \rightarrow \mathcal{R}[\log T]$, la \mathcal{R} -dérivation qui envoie $\log T$ en 1. On a $N\sigma_{\mathcal{R}} = p^h \sigma_{\mathcal{R}} N$. On définit, de façon analogue, un anneau $\mathcal{E}^\dagger[\log T]$ muni d'un Frobenius, d'un opérateur de monodromie, et une dérivation $d: \mathcal{E}^\dagger[\log T] \rightarrow \mathcal{E}^\dagger[\log T] \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \widehat{\Omega}_{\mathcal{E}^\dagger/C}^1$.

3.2.2 Soit L une extension finie séparable de K . Comme $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ est hensélien de corps résiduel K , il existe une extension finie, séparable et non-ramifiée $\mathcal{E}^\dagger(L)$ de \mathcal{E}^\dagger de corps résiduel L ; elle est unique à isomorphisme unique près. L'injection canonique $k_L \hookrightarrow L$ détermine un homomorphisme $W(k_L) \hookrightarrow \mathcal{E}^\dagger(L)$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W(k_L) & \hookrightarrow & \mathcal{E}^\dagger(L) \\ \uparrow & & \uparrow \\ W(k) & \hookrightarrow & \mathcal{E}^\dagger \end{array}$$

On obtient donc une injection $C_L \hookrightarrow \mathcal{E}^\dagger(L)$ fonctorielle en L , qui prolonge celle de C dans \mathcal{E}^\dagger .

On pose $\mathcal{R}(L) = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{E}^\dagger(L)$; c'est une extension étale finie de \mathcal{R} , donc $\widehat{\Omega}_{\mathcal{R}(L)/C_L}^1 = \mathcal{R}(L) \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}_{\mathcal{R}/C}^1$. Comme \mathcal{E}^\dagger est hensélien, les Frobenius $\sigma_{\mathcal{E}^\dagger}$ et $\sigma_{\mathcal{R}}$ s'étendent de façon unique à $\mathcal{E}^\dagger(L)$ et $\mathcal{R}(L)$ respectivement, cf. [Mat02, 2.2].

On pose $\mathcal{E}^{\dagger \text{nr}} = \varinjlim \mathcal{E}^\dagger(L)$, où la limite est prise sur les extensions finies séparables de K . Suivant

les notations de [Cr04], on pose

$$\mathcal{B}_0 = \varinjlim_{L/K} \mathcal{R}(L) \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_0[\log T]$$

où la limite est prise sur les extensions finies séparables de K . On appelle \mathcal{B} l'anneau des *hyperfonctions*. Par construction, les anneaux $\mathcal{E}^{\dagger \text{nr}}$, \mathcal{B}_0 et \mathcal{B} sont des C^{nr} -algèbres. On a $\widehat{\Omega}_{\mathcal{B}_0/C^{\text{nr}}}^1 = \varinjlim_{L/K} \widehat{\Omega}_{\mathcal{R}(L)/C_L}^1 = \mathcal{B}_0 dT$, et de même pour $\mathcal{E}^{\dagger \text{nr}}$. On définit une C^{nr} -dérivation $d: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{B}_0} \widehat{\Omega}_{\mathcal{B}_0/C^{\text{nr}}}^1$ en posant $d \log T = \frac{dT}{T}$.

DÉFINITION 3.2.3. Un (φ, ∇) -module sur \mathcal{R} est la donnée d'un triplet (M, ∇, φ) où :

- i) M est un \mathcal{R} -module libre de rang fini ;
- ii) $\nabla: M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}_{\mathcal{R}/C}^1$ est une connexion ;
- iii) $\varphi: M \rightarrow M$ est un *Frobenius horizontal*, c'est-à-dire une application $\sigma_{\mathcal{R}}$ -linéaire telle que $\varphi(M)$ engendre M sur \mathcal{R} et telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\nabla} & M \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}_{\mathcal{R}/C}^1 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \otimes d\sigma_{\mathcal{R}} \\ M & \xrightarrow{\nabla} & M \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}_{\mathcal{R}/C}^1 \end{array}$$

On note $\Phi M(\mathcal{R})$ la catégorie des (φ, ∇) -modules sur \mathcal{R} , les morphismes étant les applications linéaires horizontales commutant aux Frobenius. On notera abusivement M au lieu de (M, ∇, φ) .

3.2.4 On définit de même qu'en (3.2.3), les notions de (φ, ∇) -module sur \mathcal{E}^{\dagger} , ou sur $\mathcal{E}^{\dagger}(L)$, ou sur $\mathcal{R}(L)$ (pour une extension séparable finie L de K), ou sur \mathcal{B}_0 (3.2.2). On notera respectivement $\Phi M(\mathcal{E}^{\dagger})$, $\Phi M(\mathcal{E}^{\dagger}(L))$, $\Phi M(\mathcal{R}(L))$ et $\Phi M(\mathcal{B}_0)$ les catégories des (φ, ∇) -modules sur ces anneaux.

On appelle aussi $\Phi M(\mathcal{E}^{\dagger})$ (resp. $\Phi M(\mathcal{R})$) la catégorie des *F-isocristaux surconvergents* (resp. *analytiques*) sur $\text{Spec}(K)|C$.

DÉFINITION 3.2.5. Un (φ, ∇, N) -module sur $\mathcal{R}[\log T]$ est la donnée du quadruplet $(M, \nabla, \varphi, N_M)$ où :

- i) M est un $\mathcal{R}[\log T]$ -module libre de rang fini ;
- ii) $\nabla: M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}_{\mathcal{R}/C}^1$ est une connexion ;
- iii) $\varphi: M \rightarrow M$ est un *Frobenius horizontal*, c'est-à-dire une application $\sigma_{\mathcal{R}}$ -linéaire telle que $\varphi(M)$ engendre M sur $\mathcal{R}[\log T]$ et telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\nabla} & M \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}_{\mathcal{R}/C}^1 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \otimes d\sigma_{\mathcal{R}} \\ M & \xrightarrow{\nabla} & M \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}_{\mathcal{R}/C}^1 \end{array}$$

iv) $N_M: M \rightarrow M$ est une N -dérivation de M (i.e. une application additive telle que, pour tout $m \in M$, $\alpha \in \mathcal{R}[\log T]$, on a $N_M(\alpha m) = N(\alpha)m + \alpha N_M(m)$), qui soit horizontale et telle que

$$N_M \circ \varphi = p^h \varphi \circ N_M.$$

On appelle N_M l'*opérateur de monodromie* de M . On note $\Phi M(\mathcal{R}[\log T])$ la catégorie des (φ, ∇, N) -modules sur $\mathcal{R}[\log T]$, les morphismes étant les applications linéaires horizontales commutant aux Frobenius et aux opérateurs de monodromie. On notera abusivement M au lieu de $(M, \nabla, \varphi, N_M)$.

3.2.6 On définit de même qu'en (3.2.5), les notions de (φ, ∇, N) -modules sur $\mathcal{E}^\dagger[\log T]$, ou sur $\mathcal{E}^\dagger(L)[\log T]$, ou sur $\mathcal{R}(L)[\log T]$ (pour une extension séparable finie L de K), ou sur \mathcal{B} (3.2.2). On notera respectivement $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger[\log T])$, $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger(L)[\log T])$, $\Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])$ et $\Phi M(\mathcal{B})$ les catégories des (φ, ∇, N) -modules sur ces anneaux.

3.2.7 On donne dans ce numéro une variante équivariante de la définition (3.2.6), qui sera cruciale pour la classification des (φ, ∇) -modules sur \mathcal{R} . Soient L/K une extension galoisienne finie, $(M, \varphi, \nabla, N_M)$ un (φ, ∇, N) -module sur $\mathcal{R}(L)[\log T]$. Une *donnée de descente* sur M est la donnée d'une action semi-linéaire ρ de $\text{Gal}(L/K)$ sur M , commutant à φ et à N_M et qui soit horizontale au sens semi-linéaire, c'est-à-dire que pour tout γ dans $\text{Gal}(L/K)$, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\nabla} & M \otimes_{\mathcal{R}(L)} \widehat{\Omega}_{\mathcal{R}(L)/C_L}^1 \\ \rho(\gamma) \downarrow & & \downarrow \rho(\gamma) \otimes d\gamma \\ M & \xrightarrow{\nabla} & M \otimes_{\mathcal{R}(L)} \widehat{\Omega}_{\mathcal{R}(L)/C_L}^1 \end{array}$$

où $d\gamma: \widehat{\Omega}_{\mathcal{R}(L)/C_L}^1 \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathcal{R}(L)/C_L}^1$ est l'application γ -linéaire induite par universalité de l'action de γ sur $\mathcal{R}(L)$. On note $\Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])_{\text{ds}}$ la catégorie des (φ, ∇, N) -modules sur $\mathcal{R}(L)[\log T]$ muni d'une donnée de descente, les morphismes étant les morphismes de (φ, ∇, N) -modules qui sont équivariants par rapport aux données de descente. De même, on définit, *mutatis mutandis*, les catégories $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger(L)[\log T])_{\text{ds}}$ et $\Phi M(\mathcal{B})_{\text{ds}}$.

3.2.8 On résume dans le tableau suivant les anneaux introduits avec leurs opérateur de monodromie et leurs corps des constantes :

Anneau	N	$\text{Ker } d$
\mathcal{R} ou \mathcal{E}^\dagger	0	C
$\mathcal{R}(L)$ ou $\mathcal{E}^\dagger(L)$	0	C_L
$\mathcal{R}[\log T]$ ou $\mathcal{E}^\dagger[\log T]$	$N \neq 0$	C
$\mathcal{R}(L)[\log T]$ ou $\mathcal{E}^\dagger(L)[\log T]$	$N \neq 0$	C_L
\mathcal{B}_0	0	C^{nr}
\mathcal{B}	$N \neq 0$	C^{nr}

3.2.9 Soit M un (φ, ∇) -module sur \mathcal{R} . On note M^∇ le C -espace vectoriel $\text{Ker } \nabla$ des *sections horizontales* de M . On montre facilement que la dimension sur C de M^∇ est inférieure ou égale au rang de M et cet espace hérite de M d'une structure de φ -module sur C , cf. (3.1.1). Ceci définit un foncteur additif et exact à gauche

$$\begin{aligned} (-)^\nabla: \Phi M(\mathcal{R}) &\longrightarrow \Phi M(C) \\ (M, \nabla, \varphi) &\longmapsto (M^\nabla, \varphi) \end{aligned} \tag{3.2.9.1}$$

De même, on a

$$(-)^\nabla: \Phi M(\mathcal{R}(L)) \longrightarrow \Phi M(C_L) \tag{3.2.9.2}$$

$$(-)^\nabla: \Phi M(\mathcal{B}_0) \longrightarrow \Phi M(C^{\text{nr}}) \tag{3.2.9.3}$$

3.2.10 Soit M un (φ, ∇, N) -module sur $\mathcal{R}[\log T]$. De façon analogue à (3.2.9), le C -espace vectoriel M^∇ des sections horizontales de M hérite d'une structure de (φ, N) -module. On en déduit

un foncteur additif, exact à gauche,

$$(-)^\nabla: \Phi M(\mathcal{R}[\log T]) \longrightarrow \Phi M_{\log}(C) \quad (3.2.10.1)$$

On montre que pour tout (φ, ∇, N) -module M sur $\mathcal{R}[\log T]$, la dimension de M^∇ sur C est inférieure ou égale au rang de M sur $\mathcal{R}[\log T]$.

De même, on a

$$(-)^\nabla: \Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T]) \longrightarrow \Phi M_{\log}(C_L) \quad (3.2.10.2)$$

$$(-)^\nabla: \Phi M(\mathcal{B}) \longrightarrow \Phi M_{\log}(C^{\text{nr}}) \quad (3.2.10.3)$$

3.2.11 Un (φ, ∇) -module sur \mathcal{R} est dit \mathcal{R} -soluble s'il admet une base de sections horizontales. Pour un tel module M , l'inclusion de M^∇ dans M induit par linéarisation un isomorphisme de (φ, ∇) -modules

$$M^\nabla \otimes_C \mathcal{R} \longrightarrow M; \quad (3.2.11.1)$$

en particulier, on a $\dim_C M^\nabla = \text{rg } M$. On note $\Phi M(\mathcal{R})^{\text{sol}}$ la sous-catégorie pleine de $\Phi M(\mathcal{R})$ des modules \mathcal{R} -solubles. La restriction du foncteur (3.2.9.1) des sections horizontales à $\Phi M(\mathcal{R})^{\text{sol}}$ est une équivalence de catégories dont un quasi-inverse est :

$$- \otimes_C \mathcal{R}: \Phi M(C) \longrightarrow \Phi M(\mathcal{R})^{\text{sol}} \quad (3.2.11.2)$$

$$(M, \varphi) \longmapsto (M \otimes_C \mathcal{R}, \text{Id}_M \otimes d, \varphi \otimes_{\sigma_C} \sigma_{\mathcal{R}})$$

Exemple 3.2.12. On note $\mathcal{R}(1)$ le (φ, ∇) -module \mathcal{R} -soluble $(\mathcal{R}, p^{-h}\sigma_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{R}})$. Pour tout (φ, ∇) -module (M, φ, ∇) et tout entier n , on note $M(n)$ le (φ, ∇) -module $(M, p^{-nh}\varphi, \nabla)$.

3.2.13 On dit qu'un (φ, ∇) -module M sur \mathcal{R} est *unipotent* si M est une extension itérée de (φ, ∇) -modules \mathcal{R} -solubles. On dit qu'un (φ, ∇) -module M sur \mathcal{R} est *quasi-unipotent* s'il existe une extension galoisienne finie L/K telle que $M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}(L)$ soit unipotent comme (φ, ∇) -module sur $\mathcal{R}(L)$. On vérifie que :

- (1) M est unipotent si et seulement si $\text{rg}(M) = \dim_C (M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[\log T])^\nabla$.
- (2) M est quasi-unipotent si et seulement si $\text{rg}(M) = \dim_{C^{\text{nr}}} (M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B})^\nabla$.

THÉORÈME 3.2.14 (Monodromie p -adique [And02],[Ked04],[Meb02]). *Tout (φ, ∇) -module sur \mathcal{R} est quasi-unipotent.*

3.2.15 Soit L/K une extension galoisienne finie. Le foncteur des sections horizontales (3.2.10.2) induit un foncteur :

$$(-)^\nabla: \Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])_{\text{ds}} \longrightarrow \text{Del}_{C_L}(\text{Gal}(L/K)) \quad (3.2.15.1)$$

$$(M, \varphi, \nabla, N_M; \rho) \longmapsto (M^\nabla, \varphi, N_{M|M^\nabla}; \rho|_{M^\nabla})$$

De même, (3.2.10.3) induit un foncteur :

$$(-)^\nabla: \Phi M(\mathcal{B})_{\text{ds}} \longrightarrow \text{Del}_{C^{\text{nr}}}(G_K) \quad (3.2.15.2)$$

3.2.16 On a un foncteur d'extension des scalaires :

$$- \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B}: \Phi M(\mathcal{R}) \longrightarrow \Phi M(\mathcal{B})_{\text{ds}} \quad (3.2.16.1)$$

qui envoie (M, ∇, φ) sur le quintuplet

$$(M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B}, \varphi \otimes_{\sigma_{\mathcal{R}}} \sigma_{\mathcal{B}}, \nabla \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes d, \text{Id}_M \otimes N; \text{Id}_M \otimes \rho).$$

Soit $(M, \nabla, \varphi, N_M; \rho) \in \Phi M(\mathcal{B})_{\text{ds}}$. D'après la définition de \mathcal{B} , on a $(\text{Ker } N)^{G_K} = \mathcal{R}$ et donc $(\text{Ker } N_M)^{G_K}$ est un \mathcal{R} -module. Il hérite de M d'une connexion et d'un Frobenius. S'il est projectif

et de type fini sur \mathcal{R} , il est libre et appartient donc à $\Phi M(\mathcal{R})$. Dans ce cas, on pose

$$\text{Des}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}(M) = ((\text{Ker } N_M)^{G_K}, \nabla, \varphi) \quad (3.2.16.2)$$

De la même façon, pour toute extension galoisienne finie L de K , on a

$$- \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}(L): \Phi M(\mathcal{R}) \longrightarrow \Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])_{\text{ds}} \quad (3.2.16.3)$$

qui envoie (M, ∇, φ) sur le quintuplet

$$(M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}(L)[\log T], \varphi \otimes_{\sigma_{\mathcal{R}}} \sigma_{\mathcal{R}}, \nabla \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes d, \text{Id}_M \otimes N; \text{Id}_M \otimes \rho)$$

Soit $(M, \nabla, \varphi, N_M; \rho) \in \Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])_{\text{ds}}$. Si le \mathcal{R} -module $(\text{Ker } N_M)^{G_K}$ est projectif de type fini, on pose

$$\text{Des}_{\mathcal{R}(L)[\log T]/\mathcal{R}}(M) = ((\text{Ker } N_M)^{\text{Gal}(L/K)}, \nabla, \varphi) \in \Phi M(\mathcal{R}) \quad (3.2.16.4)$$

LEMME 3.2.17. (1) Les foncteurs (3.2.16.1) et (3.2.16.3) sont pleinement fidèles.

(2) Pour tout $M \in \Phi M(\mathcal{R})$, le (φ, ∇) -module $\text{Des}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}(M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B})$ est défini et canoniquement isomorphe à M .

(3) Pour toute extension finie et séparable L de K et tout objet M de $\Phi M(\mathcal{R})$, on a $\text{Des}_{\mathcal{R}(L)[\log T]/\mathcal{R}}(M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}(L)[\log T]) \cong M$.

Dém. Il est évident que ces foncteurs sont fidèles. Soient M un (φ, ∇) -module sur \mathcal{R} , et $\widetilde{M} = M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B}$ l'image de M par (3.2.16.1). Il est clair que $\text{Des}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}(M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B})$ est défini et canoniquement isomorphe à M . Comme les morphismes dans $\Phi M(\mathcal{B})_{\text{ds}}$ sont compatibles à la monodromie et aux données de descente, le foncteur (3.2.16.1) est plein. *Idem* pour (3.2.16.3) et $\text{Des}_{\mathcal{R}(L)[\log T]/\mathcal{R}}(M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}(L)[\log T])$. \square

3.2.18 On note S le foncteur composé :

$$S: \Phi M(\mathcal{R}) \xrightarrow{(3.2.16.1)} \Phi M(\mathcal{B})_{\text{ds}} \xrightarrow{(3.2.15.2)} \text{Del}_{C^{\text{nr}}}(G_K) \quad (3.2.18.1)$$

Il résulte du théorème de monodromie p -adique (3.2.14) que pour tout $M \in \Phi M(\mathcal{R})$, la dimension de $S(M)$ est égale au rang de M .

Pour une extension galoisienne finie L de K , on note $\Phi M(\mathcal{R})_L$ la sous-catégorie pleine de $\Phi M(\mathcal{R})$ des modules qui sont unipotents sur $\mathcal{R}(L)$. On note S_L le foncteur composé :

$$S_L: \Phi M(\mathcal{R})_L \xrightarrow{(3.2.16.3)} \Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])_{\text{ds}} \xrightarrow{(3.2.15.1)} \text{Del}_{C_L}(\text{Gal}(L/K)) \quad (3.2.18.2)$$

Par construction, pour tout $M \in \Phi M(\mathcal{R})_L$, la dimension de $S_L(M)$ est égale au rang de M . Soit $M \in \Phi M(\mathcal{R})$. L'inclusion $S_L(M) \subset S(M)$ induit par linéarisation un monomorphisme de C^{nr} -modules de Deligne

$$S_L(M) \otimes_{C_L} C^{\text{nr}} \longrightarrow S(M)$$

qui est un isomorphisme puisque les deux membres ont même dimension. Par suite $S_L(M)$ est une descente de $S(M)$ à L , cf. (3.1.7). On a donc un diagramme de foncteurs commutatif (à isomorphisme près)

$$\begin{array}{ccc} \Phi M(\mathcal{R}) & \xrightarrow{S} & \text{Del}_{C^{\text{nr}}}(G_K) \\ \uparrow & & \uparrow - \otimes_{C_L} C^{\text{nr}} \\ \Phi M(\mathcal{R})_L & \xrightarrow{S_L} & \text{Del}_{C_L}(\text{Gal}(L/K)) \end{array} \quad (3.2.18.3)$$

On appelle usuellement $S(M)$ l'espace des *cycles proches* de M . On se propose dans la suite de montrer que S et S_L sont des équivalences de catégories et de construire des quasi-inverses.

3.2.19 Soit L/K une extension galoisienne finie. On définit d'abord les foncteurs

$$\begin{aligned}\widetilde{M} &: \text{Del}_{C^{\text{nr}}}(G_K) \longrightarrow \Phi M(\mathcal{E}^\dagger), \\ \widetilde{M}_L &: \text{Del}_{C_L}(\text{Gal}(L/K)) \longrightarrow \Phi M(\mathcal{E}^\dagger),\end{aligned}$$

par

$$\begin{aligned}V &\longmapsto \widetilde{M}(V) = \left\{ x \in V \otimes_{C^{\text{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger \text{nr}}[\log T] \mid \begin{array}{l} \forall g \in G_K, g(x) = x \\ (N_V \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes N)(x) = 0 \end{array} \right\}, \\ W &\longmapsto \widetilde{M}_L(W) = \left\{ x \in W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L)[\log T] \mid \begin{array}{l} \forall g \in \text{Gal}(L/K), g(x) = x \\ (N_W \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes N)(x) = 0 \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

On vérifie facilement que pour tout C_L -module de Deligne W de K , on a $\widetilde{M}(W \otimes_{C_L} C^{\text{nr}}) \cong \widetilde{M}_L(W)$.

LEMME 3.2.20. Soient L/K une extension galoisienne finie et (W, N_W, φ_W) un C_L -module de Deligne de K .

- (1) On a $\text{rg } \widetilde{M}_L(W) = \dim_{C_L} W$; donc \widetilde{M}_L est un foncteur exact.
- (2) L'inclusion $\widetilde{M}_L(W) \subset W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L)[\log T]$, induit par linéarisation un morphisme

$$i: \widetilde{M}_L(W) \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{E}^\dagger(L)[\log T] \longrightarrow W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L)[\log T] \quad (3.2.20.1)$$

de $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger(L)[\log T])_{\text{ds}}$, qui est en fait un isomorphisme. En particulier, $\widetilde{M}_L(W)$ est unipotent sur $\mathcal{E}^\dagger(L)$.

Dém. Pour alléger les notations, on pose $G = \text{Gal}(L/K)$ et $U = W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L)$. Montrons (1). D'abord on définit un isomorphisme de \mathcal{E}^\dagger -espaces vectoriels $f: (W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L))^G \rightarrow \widetilde{M}_L(W)$, en posant $f(\sum_l v_l \otimes \alpha_l) = \sum_l \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i N_W^i(v_l) \otimes \alpha_l \frac{(\log T)^i}{i!}$, où r est un entier tel que $N_W^r = 0$. L'application inverse $g: \widetilde{M}_L(W) \rightarrow (W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L))^G$ est induite par la projection $\mathcal{E}^\dagger(L)[\log T] \rightarrow \mathcal{E}^\dagger(L)$ qui envoie $\log T$ sur 0. Par construction, on a $gf = \text{Id}$. Il suffit donc de montrer que g est injective. Soit $x = \sum_l v_l \otimes (\sum_{i=0}^d \alpha_{i,l} (\log T)^i)$. Supposons que $g(x) = \sum_l v_l \otimes \alpha_{0,l} = 0$. La relation $(N_W \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes N)(x) = 0$ équivaut à

$$\sum_l N_W(v_l) \otimes \alpha_{i,l} = - \sum_l v_l \otimes (i+1)\alpha_{i+1,l} \quad \forall i = 0, \dots, d. \quad (3.2.20.2)$$

Comme $\sum_l v_l \otimes \alpha_{0,l} = 0$, en appliquant $N_W \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes N$, on obtient $\sum_l N_W(v_l) \otimes \alpha_{0,l} = 0$. D'où $\sum_l v_l \otimes \alpha_{1,l} = 0$, par (3.2.20.2). On en déduit par récurrence que $x = 0$.

Pour terminer la preuve de (1), il suffit de montrer que $\dim_{\mathcal{E}^\dagger}(W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L))^G = \dim_{C_L} W$. On pose $n = \dim_{C_L} W$. Comme $\text{Gal}(\mathcal{E}^\dagger(L)/\mathcal{E}^\dagger) = G$, l'ensemble pointé de cohomologie non-commutative $H^1(G, \text{GL}_n(\mathcal{E}^\dagger(L)))$ est trivial [Ser68a, Ch.X Prop.3]; donc $\dim_{\mathcal{E}^\dagger}(W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L))^G = \dim_{\mathcal{E}^\dagger(L)}(W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L)) = n$.

Montrons (2). Posons $B = \mathcal{E}^\dagger(L)[\log T]$. Comme B est un anneau de polynômes à coefficients dans un corps, en tensorisant (3.2.20.1) par $\text{Fr } B$ au dessus de B , on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M}_L(W) \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} B & \xrightarrow{i} & W \otimes_{C_L} B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{M}_L(W) \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \text{Fr } B & \xrightarrow{i \otimes_B \text{Id}} & W \otimes_{C_L} \text{Fr } B \end{array}$$

On va montrer que $i \otimes_B \text{Id}$ est injective; donc par (1) que c'est un isomorphisme. Par conséquent i est injective et son conoyau est un B -module de torsion qu'on note Q . Comme i est horizontal, le

module Q est muni d'une connexion ; on montre facilement que ceci force Q à être nul. Montrons l'injectivité de $i \otimes_B \text{Id}$. Soit $x = \sum_i^m v_i \otimes a_i$ un élément non-nul du noyau de $i \otimes_B \text{Id}$, de longueur minimale m . On peut supposer $a_m = 1$. L'élément $|G|x - \sum_{g \in G} g(x)$ appartient au noyau de $i \otimes_B \text{Id}$ et a pour longueur $m - 1$, ce qui mène à une contradiction. \square

3.2.21 Soit L/K une extension galoisienne finie. On définit des foncteurs :

$$\begin{aligned} M &: \text{Del}_{C^{\text{nr}}}(G_K) \longrightarrow \Phi M(\mathcal{R}), \\ M_L &: \text{Del}_{C_L}(\text{Gal}(L/K)) \longrightarrow \Phi M(\mathcal{R}), \end{aligned}$$

par

$$\begin{aligned} V &\longmapsto M(V) = \left\{ x \in V \otimes_{C^{\text{nr}}} \mathcal{B} \mid \begin{array}{l} \forall g \in G_K, g(x) = x \\ (N_V \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes N)(x) = 0 \end{array} \right\} \\ W &\longmapsto M_L(W) = \left\{ x \in W \otimes_{C_L} \mathcal{R}(L)[\log T] \mid \begin{array}{l} \forall g \in \text{Gal}(L/K), g(x) = x \\ (N_W \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes N)(x) = 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que pour tout C_L -module de Deligne W de K , on a $M(W \otimes_{C_L} C^{\text{nr}}) \cong M_L(W)$.

LEMME 3.2.22. Soit $W \in \text{Del}_{C_L}(\text{Gal}(L/K))$.

(1) L'inclusion $\widetilde{M}_L(W) \subset M_L(W)$ induit par linéarisation un isomorphisme canonique de $\Phi M(\mathcal{R})$

$$\widetilde{M}_L(W) \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R} \xrightarrow{\sim} M_L(W).$$

(2) On a $\text{rg } M_L(W) = \dim_{C_L} W$, donc M_L est un foncteur exact.

(3) L'inclusion $M_L(W) \subset W \otimes_{C_L} \mathcal{R}(L)[\log T]$, induit par linéarisation un morphisme

$$M_L(W) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}(L)[\log T] \longrightarrow W \otimes_{C_L} \mathcal{R}(L)[\log T] \quad (3.2.22.1)$$

de $\Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])_{\text{ds}}$, qui est en fait un isomorphisme. En particulier, $M_L(W)$ est unipotent sur $\mathcal{R}(L)$, ou de façon équivalente, M_L se factorise par $\Phi M(\mathcal{R})_L$.

Dém. Montrons d'abord (1). On pose $G = \text{Gal}(L/K)$. Comme \widetilde{M}_L est exact, on peut supposer W simple, donc $N_W = 0$, $\widetilde{M}_L(W) = (W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L))^G$ et $M_L(W) = (W \otimes_{C_L} \mathcal{R}(L))^G$. On doit montrer que

$$(W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L))^G \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R} = (W \otimes_{C_L} \mathcal{R}(L))^G$$

On pose $U = W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L)$. Comme $\mathcal{R}(L) = \mathcal{E}^\dagger(L) \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}$, il suffit de montrer que $U^G \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R} = (U \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})^G$. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow U^G \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R} \longrightarrow (U \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})^G \longrightarrow (U/U^G \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})^G.$$

Donc on peut supposer $U^G = 0$; il suffit de montrer que $(U \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})^G = 0$. Soient v_1, \dots, v_n une base de U sur \mathcal{E}^\dagger et $v = \sum_{i=1}^n v_i \otimes a_i \in (U \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})^G$. Pour tout $g \in G$, on a $\sum_{i=1}^n (v_i - g(v_i)) \otimes a_i = 0$. En prenant la somme sur $g \in G$, on a

$$0 = \sum_{g \in G} \left(\sum_{i=1}^n (v_i - g(v_i)) \otimes a_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(|G|v_i - \sum_{g \in G} g(v_i) \right) \otimes a_i.$$

Pour tout i , on a $\sum_{g \in G} g(v_i) \in U^G = 0$, d'où $v = 0$.

Les assertions (2) et (3) sont des conséquences immédiates de (1) et (3.2.20). \square

THÉORÈME 3.2.23. *Les foncteurs S et M (resp. S_L et M_L) sont des équivalences des catégories quasi-inverses l'une de l'autre. De plus, on a un diagramme commutatif de foncteurs (à isomorphisme près)*

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi M(\mathcal{R}) & \begin{array}{c} \xleftarrow{M} \\ \xrightarrow{S} \end{array} & \text{Del}_{C^{\text{nr}}}(G_K) \\
 \uparrow & & \uparrow -\otimes_{C_L} C^{\text{nr}} \\
 \Phi M(\mathcal{R})_L & \begin{array}{c} \xleftarrow{M_L} \\ \xrightarrow{S_L} \end{array} & \text{Del}_{C_L}(\text{Gal}(L/K))
 \end{array} \tag{3.2.23.1}$$

Dém. La commutation du diagramme a déjà été montrée. Il suffit de montrer l'assertion pour S_L et M_L , car tout (φ, ∇) -module sur \mathcal{R} est quasi-unipotent (3.2.14), tout C^{nr} -module de Deligne admet une descente (3.1.7)-(1), et le foncteur d'extension des scalaires $-\otimes_{C_L} C^{\text{nr}}$ est pleinement fidèle (3.1.6). Posons $B = \mathcal{R}(L)[\log T]$. Soit M un objet de $\Phi M(\mathcal{R})_L$. L'inclusion $S_L(M) \subset M \otimes_{\mathcal{R}} B$ induit par linéarisation un morphisme de $\Phi M(B)_{\text{ds}}$

$$S_L(M) \otimes_{C_L} B \longrightarrow M \otimes_{\mathcal{R}} B \tag{3.2.23.2}$$

qui est un isomorphisme par (3.2.11.1), car M unipotent sur $\mathcal{R}(L)$ par hypothèse. En composant les isomorphismes (3.2.22.1) et (3.2.23.2) on obtient

$$M_L(S_L(M)) \otimes_{\mathcal{R}} B \xrightarrow{\sim} S_L(M) \otimes_{C_L} B \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\mathcal{R}} B.$$

En appliquant la descente $\text{Des}_{B/\mathcal{R}}$ on obtient un isomorphisme $M_L \circ S_L \xrightarrow{\sim} \text{Id}$, cf. (3.2.17). Soit W un C_L -module de Deligne de K , en composant les isomorphismes (3.2.23.2) et (3.2.22.1) on obtient

$$S_L(M_L(W)) \otimes_{C_L} B \xrightarrow{\sim} M_L(W) \otimes_{\mathcal{R}} B \xrightarrow{\sim} W \otimes_{C_L} B.$$

En prenant les sections horizontales on obtient un isomorphisme $S_L \circ M_L \xrightarrow{\sim} \text{Id}$. \square

Remarque 3.2.24. On note $\Phi M(\mathcal{B})_{\text{eff}}^{\text{sol}}$ la sous-catégorie pleine de $\Phi M(\mathcal{B})_{\text{ds}}$ des objets \mathcal{B} -solubles et effectifs, i.e. les modules M admettant une base de sections horizontales et tels que $\text{Des}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}(M)$ soit défini et de rang égal au rang de M . Il est utile de résumer la classification du théorème précédent par le diagramme de foncteurs commutatif (à isomorphisme près)

$$\begin{array}{ccc}
 & \Phi M(\mathcal{B})_{\text{eff}}^{\text{sol}} & \\
 \text{Des}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}} \swarrow & & \searrow -\otimes_{C^{\text{nr}}} \mathcal{B} \\
 \Phi M(\mathcal{R}) & \begin{array}{c} \xleftarrow{S} \\ \xrightarrow{M} \end{array} & \text{Del}_{C^{\text{nr}}}(G_K) \\
 & & \swarrow (-)\nabla
 \end{array}$$

où les trois couples des foncteurs opposés sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

3.2.25 *Analytification.* On ne dispose pas en général de théorèmes de classification pour les (φ, ∇) -modules sur \mathcal{E}^\dagger analogues à (3.2.14) et (3.2.23). Toutefois, on peut considérer le foncteur d'extension des scalaires $-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R} : \Phi M(\mathcal{E}^\dagger) \rightarrow \Phi M(\mathcal{R})$, et attacher des C^{nr} -modules de Deligne de K aux (φ, ∇) -modules sur \mathcal{E}^\dagger . Suivant [Cr04, 4.1], on appelle le foncteur $-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}$ foncteur d'*analytification*. C'est un foncteur essentiellement surjectif, cf. (3.2.27) et [Tsu98c, 4.2.1]. C'est évident qu'il est fidèle, mais il n'est pas plein en général, comme le montre l'exemple ci-dessus.

Exemple 3.2.26. Les groupes $\text{Ext}_{\Phi M(\mathcal{E}^\dagger)}^1(\mathcal{E}^\dagger(1), \mathcal{E}^\dagger)$ et $\text{Ext}_{\Phi M(\mathcal{R})}^1(\mathcal{R}(1), \mathcal{R})$ ne sont pas isomorphes. Soit R un des deux anneaux \mathcal{E}^\dagger ou \mathcal{R} . Considérons d'abord des modules à connexion sur R , sans donnée de Frobenius. Crew observe [Cr04, pg. 28] que l'ensemble des extensions $\text{Ext}_{\nabla}^1(R, R)$ du module à connexion trivial R de rang 1 par lui-même, est égal à $H_{dR}^1(R) := \text{Coker}(R \xrightarrow{d} \widehat{\Omega}_{R/C}^1)$. Or $\dim_C H_{dR}^1(\mathcal{R}) = 1$ et $\dim_C H_{dR}^1(\mathcal{E}^\dagger) = +\infty$. Ceci montre en particulier que l'extension des scalaires

$-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}$ n'est pas pleinement fidèle entre les catégories des modules à connexion. Pour conclure on construit l'exemple suivant ; supposons pour simplifier que $\sigma(T) = T^p$. Soit M un \mathcal{E}^\dagger -espace vectoriel de base e_1, e_2 . On le muni de la connexion $\nabla(e_1) = 0, \nabla(e_2) = \sum_{n \in \mathbb{N}} T^{p^n} e_1 \otimes \frac{dT}{T}$ et du Frobenius $\varphi(e_1) = p^{-1}e_1, \varphi(e_2) = -Te_1 + e_2$. On vérifie facilement que M est un (φ, ∇) -module sur \mathcal{E}^\dagger , extension de $\mathcal{E}^\dagger(1)$ par \mathcal{E}^\dagger . Comme la différentielle $\sum_{n \in \mathbb{N}} T^{p^n} \otimes \frac{dT}{T}$ n'est pas intégrable dans \mathcal{E}^\dagger , M n'est pas une extension triviale de $\mathcal{E}^\dagger(1)$ par \mathcal{E}^\dagger en tant que module à connexion et a fortiori en tant que (φ, ∇) -module. Par contre, comme $\sum_{n \in \mathbb{N}} T^{p^n} \otimes \frac{dT}{T}$ est intégrable dans \mathcal{R} , l'analytification $M \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}$ de M est \mathcal{R} -soluble. Donc $S(M \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}) = (M \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})^\nabla \otimes_C C^{\text{nr}}$ muni de la monodromie triviale, de l'action semi-linéaire triviale de G_K et du Frobenius induit par le Frobenius de M . Par construction les pentes du Frobenius sont 0 et 1, donc par Dieudonné-Manin on a

$$\underline{\mathcal{C}o}(S(M \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})) = \widehat{C}^{\text{nr}}(1) \oplus \widehat{C}^{\text{nr}}$$

en tant que φ -modules sur \widehat{C}^{nr} , mais aussi comme \widehat{C}^{nr} -modules de Deligne de K , car la monodromie et l'action de G_K sont triviales. Comme $\underline{\mathcal{C}o}$ et S sont des équivalences, on conclut que $M \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}$ est une extension triviale de $\mathcal{R}(1)$ par \mathcal{R} dans $\Phi M(\mathcal{R})$.

COROLLAIRE 3.2.27. *On a un triangle commutatif (à isomorphismes près) de foncteurs*

$$\begin{array}{ccc} \Phi M(\mathcal{R}) & \xleftarrow[\widetilde{M}]{} & \text{Del}_{C^{\text{nr}}}(G_K) \\ \uparrow^{-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}} & \nearrow & \\ \Phi M(\mathcal{E}^\dagger) & & \end{array}$$

Par conséquent, le foncteur d'extension des scalaires $-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}$ est essentiellement surjectif. Le foncteur \widetilde{M} est pleinement fidèle, mais il n'est pas essentiellement surjectif.

Dém. Soient V un C^{nr} -module de Deligne de K , L/K une extension galoisienne finie trivialisant V et W une descente de V à L (cf. 3.1.7). On a $\widetilde{M}(V) = \widetilde{M}_L(W)$ et $M(V) = M_L(W)$, cf. (3.2.19). Donc le diagramme commute par le lemme 3.2.20-(2). Le foncteur \widetilde{M} est pleinement fidèle car M est une équivalence et $-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}$ est fidèle. Il n'est pas essentiellement surjectif car sinon $-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}$ serait une équivalence. \square

3.3 (φ, ∇) -modules unités

3.3.1 On dit que un (φ, ∇) -module M sur \mathcal{E}^\dagger est *unité* si le φ -module sous-jacent est unité, i.e. s'il existe un sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ -module M' libre de M , stable par φ , tel que [Mat02, 5.2] :

- (1) $M \cong \mathcal{E}^\dagger \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}} M'$;
- (2) $\text{Id} \otimes \varphi : \mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger} \otimes_{\sigma_{\mathcal{E}^\dagger}} M' \xrightarrow{\sim} M'$.

Un (φ, ∇) -module M sur \mathcal{R} est dit unité s'il existe un (φ, ∇) -module unité \widetilde{M} sur \mathcal{E}^\dagger tel que $M \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}$.

On dit qu'un module de Deligne est unité si le φ -module sous-jacent est un φ -module unité.

On note $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger)^u$ (resp. $\Phi M(\mathcal{R})^u$) la sous-catégorie pleine de $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger)$ (resp. $\Phi M(\mathcal{R})$) dont les objets sont unités. De même, l'exposant u pour une catégorie de modules de Deligne désignera la sous-catégorie pleine dont les objets sont unités.

3.3.2 On rappelle qu'on a noté Λ le sous-corps de C des éléments fixés par σ_C , cf. (3.0.2). On note $\text{Rep}_\Lambda^{\text{gf}}(G_K)$ la catégorie de Λ -représentations de G_K à *monodromie géométrique finie*, i.e. telle que la restriction de l'action à I_K se factorise par un quotient fini.

THÉORÈME 3.3.3 [Tsu98a]. *Le foncteur $D^\dagger : \text{Rep}_\Lambda^{\text{gf}}(G_K) \rightarrow \Phi M(\mathcal{E}^\dagger)^u$ défini par*

$$D^\dagger(V) = (V \otimes_\Lambda \mathcal{E}^{\dagger \text{nr}} \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}})^{G_K}$$

est une équivalence de catégories.

Les énoncés qui suivent, relient les théorèmes 3.3.3 et 3.2.23.

3.3.4 Soit (D, φ, N) un \widehat{C}^{nr} -module de Deligne unité. La relation $N \circ \varphi = p^h \varphi \circ N$ implique que $N = 0$. On considère le foncteur

$$- \otimes_\Lambda \widehat{C}^{\text{nr}} : \text{Rep}_\Lambda^{\text{gf}}(G_K) \longrightarrow \text{Del}_{\widehat{C}^{\text{nr}}}(G_K)^u, \quad (3.3.4.1)$$

qui associe à une Λ -représentation V de G_K à monodromie géométrique finie le module de Deligne $V \otimes_\Lambda \widehat{C}^{\text{nr}}$ muni du Frobenius induit par le Frobenius σ_C de \widehat{C}^{nr} et de la monodromie triviale. En sens inverse, on considère le foncteur

$$(\cdot)^{\varphi=\text{Id}} : \text{Del}_{\widehat{C}^{\text{nr}}}(G_K)^u \longrightarrow \text{Rep}_\Lambda^{\text{gf}}(G_K) \quad (3.3.4.2)$$

qui associe à un \widehat{C}^{nr} -module de Deligne unité $(D, \varphi, 0)$ de K , la représentation $D^{\varphi=\text{Id}}$ de G_K des points fixes par φ .

LEMME 3.3.5. (1) *Le foncteur (3.3.4.1) est une équivalence de catégories dont un quasi-inverse est (3.3.4.2).*

(2) *Soient V une Λ -représentation de G_K à monodromie géométrique finie et $M = D^\dagger(V)$ le (φ, ∇) -module unité sur \mathcal{E}^\dagger correspondant à V . On a*

$$S(M \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}) = \underline{\text{Déco}}(V \otimes_\Lambda \widehat{C}^{\text{nr}}).$$

(3) *Soit W un C^{nr} -module de Deligne unité de K . Alors*

$$D^\dagger \left((W \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}})^{\varphi=\text{Id}} \right) = (W \otimes_{C^{\text{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger \text{nr}})^{G_K} = \widetilde{M}(W).$$

Dém. (1) Il est évident que pour tout V dans $\text{Rep}_\Lambda^{\text{gf}}(G_K)$, $(V \otimes_\Lambda \widehat{C}^{\text{nr}})^{\varphi=\text{Id}}$ est canoniquement isomorphe à V . Pour vérifier l'autre égalité il suffit de montrer que pour tout \widehat{C}^{nr} -module de Deligne unité W de K , on a $\dim_\Lambda (W)^{\varphi=\text{Id}} = \dim_{\widehat{C}^{\text{nr}}} W$. Ceci se déduit du théorème de classification de Dieudonné-Manin appliqué au φ -module W sur le corps \widehat{C}^{nr} . On remarque ici qu'il est nécessaire de travailler avec \widehat{C}^{nr} plutôt que avec C^{nr} .

(2) Il est équivalent de montrer que $\underline{\text{Co}}(S(M \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})) = V \otimes_\Lambda \widehat{C}^{\text{nr}}$. Par définition, on a

$$\underline{\text{Co}}(S(M \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})) = \left((V \otimes_\Lambda \mathcal{E}^{\dagger \text{nr}} \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}})^{G_K} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{B} \right)^\nabla \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}}$$

Le deuxième membre est contenu dans $\left((V \otimes_\Lambda \mathcal{E}^{\dagger \text{nr}} \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}})^{G_K} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{B} \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}} \right)^\nabla$; il lui est égal car ils sont de même dimension sur \widehat{C}^{nr} . Comme $\mathcal{B} \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}}$ contient $\mathcal{E}^{\dagger \text{nr}} \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}}$, en utilisant le théorème de Tsuzuki (3.3.3), on a

$$\begin{aligned} & (V \otimes_\Lambda \mathcal{E}^{\dagger \text{nr}} \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}})^{G_K} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{B} \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}} = \\ & = \left((V \otimes_\Lambda \mathcal{E}^{\dagger \text{nr}} \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}})^{G_K} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} (\mathcal{E}^{\dagger \text{nr}} \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}}) \right) \otimes_{\mathcal{E}^{\dagger \text{nr}} \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}}} (\mathcal{B} \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}}) \\ & = V \otimes_\Lambda \mathcal{B} \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}}. \end{aligned}$$

On conclut par la relation

$$(V \otimes_\Lambda \mathcal{B} \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}})^\nabla = V \otimes_\Lambda C^{\text{nr}} \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}} = V \otimes_\Lambda \widehat{C}^{\text{nr}}.$$

(3) Par définition, on a

$$D^\dagger \left((W \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}})^{\varphi=\text{Id}} \right) = \left((W \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}})^{\varphi=\text{Id}} \otimes_{\Lambda} \widehat{C}^{\text{nr}} \otimes_{C^{\text{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger \text{nr}} \right)^{G_K}.$$

Par (1), le deuxième membre est égale à $(W \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}} \otimes_{C^{\text{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger \text{nr}})^{G_K}$. Soit T une descente de W à L (3.1.7). Alors $(W \otimes_{C^{\text{nr}}} \widehat{C}^{\text{nr}} \otimes_{C^{\text{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger \text{nr}})^{G_K} = (T \otimes_{C_L} \widehat{C}^{\text{nr}} \otimes_{C^{\text{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger \text{nr}})^{G_K}$. Le \mathcal{E}^{\dagger} -espace vectoriel $(T \otimes_{C_L} \mathcal{E}^{\dagger}(L))^{\text{Gal}(L/K)}$ est contenu dans $(T \otimes_{C_L} \widehat{C}^{\text{nr}} \otimes_{C^{\text{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger \text{nr}})^{G_K}$, et comme il est de dimension maximale les deux sont égaux. On a

$$\begin{aligned} (T \otimes_{C_L} \mathcal{E}^{\dagger}(L))^{\text{Gal}(L/K)} &= (T \otimes_{C_L} \mathcal{E}^{\dagger \text{nr}})^{G_K} = (T \otimes_{C_L} C^{\text{nr}} \otimes_{C^{\text{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger \text{nr}})^{G_K} \\ &= (W \otimes_{C^{\text{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger \text{nr}})^{G_K} \subseteq \widetilde{M}(W). \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de noter que $\dim_{\mathcal{E}^{\dagger}}(W \otimes_{C^{\text{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger \text{nr}})^{G_K} = \dim_{\mathcal{E}^{\dagger}} \widetilde{M}(W)$. \square

PROPOSITION 3.3.6. *Le diagramme de foncteurs*

$$\begin{array}{ccc} \Phi M(\mathcal{R})^u & \xleftarrow{M} & \text{Del}_{C^{\text{nr}}}(G_K)^u \\ & \searrow^{\widetilde{M}} & \downarrow \text{Co} \\ -\otimes_{\mathcal{E}^{\dagger}} \mathcal{R} & & \text{Del}_{\widehat{C}^{\text{nr}}}(G_K)^u \\ & & \downarrow (\cdot)^{\varphi=\text{Id}} \\ \Phi M(\mathcal{E}^{\dagger})^u & \xleftarrow{D^\dagger} & \text{Rep}_{\Lambda}^{\text{gf}}(G_K) \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \text{Déco} \\ \downarrow -\otimes_{\Lambda} \widehat{C}^{\text{nr}} \end{array} \quad (3.3.6.1)$$

est commutatif (à isomorphisme près), et toutes les flèches sont des équivalences des catégories.

Dém. Montrons d'abord que M et S induisent des foncteurs sur les sous-catégories des objets unités. Si un foncteur conserve la propriété d'être unité alors tout quasi-inverse la conserve aussi. Les foncteurs $-\otimes_{\mathcal{E}^{\dagger}} \mathcal{R}$ et Co conservent la propriété d'être unité par définition ; par conséquent Déco aussi. On déduit de (3.3.5-3) que le foncteur \widetilde{M} conserve la propriété d'être unité ; par conséquent les foncteurs M et S aussi. Le triangle supérieur de (3.3.6.1) est commutatif par (3.2.27), le triangle inférieur est commutatif par le lemme (3.3.5-3) et le périmètre du carré par (3.3.5-2). Les équivalences verticales sur la droite sont données par (3.3.5-1) et (3.1.7-2), et D^\dagger est une équivalence par (3.3.3). On en déduit que les restrictions de $-\otimes_{\mathcal{E}^{\dagger}} \mathcal{R}$ et \widetilde{M} aux objets unités sont aussi des équivalences de catégories. \square

COROLLAIRE 3.3.7. *La restriction du foncteur d'analytification aux (φ, ∇) -modules de rang 1 est une équivalence de catégories.*

Dém. Par torsion du Frobenius on se ramène au cas unité qui est une conséquence de (3.3.6). \square

3.4 Constantes locales

3.4.1 On suppose désormais que le corps résiduel k de K est fini, de cardinal $q = p^f$ et que l'entier h fixé dans (3.0.2) divise f . Pour le reste, on conserve les notations de (3.0.1) et (3.0.2). On pose $a = fh^{-1}$.

3.4.2 Soient M un (φ, ∇) -module sur \mathcal{R} , $S(M)$ le C^{nr} -module de Deligne de K associé. On muni $S(M)$ d'une action C^{nr} -linéaire $\rho: W_K \rightarrow \text{Aut}_{C^{\text{nr}}}(S(M))$ en posant pour tout $g \in W_K$ et $m \in S(M)$,

$$\rho(g)(m) = g(\varphi^{av(g)}(m)),$$

où $\nu(g)$ est l'entier défini dans (2.1).

PROPOSITION 3.4.3. *Le triplet $(S(M), \rho, N)$ est une C^{nr} -représentation de Weil-Deligne de K .*

Dém. En effet ρ est linéaire et triviale sur un sous-groupe ouvert de l'inertie. La relation $\rho(w)N = q^{\nu(w)}N\rho(w)$ résulte facilement de l'égalité $N\varphi = p^h\varphi N$ sur $S(M)$. \square

DÉFINITION 3.4.4. Soit M un (φ, ∇) -module sur \mathcal{R} . On appelle C^{nr} -représentation de Weil-Deligne associée à M , et on note $\text{WD}(M)$, le triplet $(S(M), \rho, N)$ de (3.4.3). On appelle *constantes locales de M* les constantes locales de $\text{WD}(M)$; plus précisément on pose, d'après (2.16) :

i) $L(M, t) = L(\text{WD}(M), t)$;

ii) $\text{ar}(M) = \text{ar}(\text{WD}(M))$;

iii) pour un caractère additif non-trivial $\psi: K \rightarrow C^*$ et une mesure de Haar μ sur K à valeur dans C ,

$$\begin{aligned} \varepsilon(M, \psi, \mu) &= \varepsilon(\text{WD}(M), \psi, \mu), \\ \varepsilon_0(M, \psi, \mu) &= \varepsilon_0(\text{WD}(M), \psi, \mu). \end{aligned}$$

PROPOSITION 3.4.5. Soient (M, φ, ∇) un (φ, ∇) -module sur \mathcal{R} , $S(M) = (S(M), \varphi, N)$ le C^{nr} -module de Deligne associé et $\text{WD}(M) = (S(M), \rho, N)$ la C^{nr} -représentation de Weil-Deligne associée. On désigne par $\text{Ker } N$ le noyau de N sur $S(M)$: il est stable sous l'action semi-linéaire de G_K , sous l'action C^{nr} -linéaire ρ de W_K et par le Frobenius.

(1) On a un isomorphisme canonique $M^\nabla \cong (\text{Ker } N)^{G_K}$ de φ -modules sur C .

(2) On a un isomorphisme canonique, G_k -équivariant, $M^\nabla \otimes_C C^{\text{nr}} \cong (\text{Ker } N)^{I_K}$, de φ -modules sur C^{nr} .

(3) On a :

$$\text{ar}(M) = \text{irr}(M) + \text{rg}(M) - \dim_C(M^\nabla); \tag{3.4.5.1}$$

$$L(M, t) = \det_C(1 - t\varphi^a | M^\nabla)^{-1} \in 1 + tC[[t]]; \tag{3.4.5.2}$$

$$\det_{C^{\text{nr}}}(\rho(F^*) | (\text{Ker } N)^{I_K}) = \det_C(\varphi^a | M^\nabla), \text{ où } F^* = \sigma^{-f} \in G_k; \tag{3.4.5.3}$$

$$\varepsilon(M, \psi, \mu) = \varepsilon_0(M, \psi, \mu) \det_C(-\varphi^a | M^\nabla)^{-1}; \tag{3.4.5.4}$$

$$\varepsilon_0(M, \psi, \mu) = \varepsilon_0(\text{WD}(M)^\circ, \psi, \mu). \tag{3.4.5.5}$$

où $\text{irr}(M)$ désigne l'irrégularité de M [ChMe02, 14.11].

Dém. Montrons (1). D'après (3.2.23), on a

$$M \cong M(S(M)) = \left\{ x \in S(M) \otimes_{C^{\text{nr}}} \mathcal{B} \mid \begin{array}{l} \forall g \in G_K, g(x) = x \\ N \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes N(x) = 0 \end{array} \right\}.$$

D'où

$$\begin{aligned} M^\nabla &\cong \left\{ x \in S(M) \otimes_{C^{\text{nr}}} \mathcal{B} \mid \begin{array}{l} \forall g \in G_K, g(x) = x \\ N \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes N(x) = 0 \\ \text{Id} \otimes d(x) = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ x \in S(M) \mid \begin{array}{l} \forall g \in G_K, g(x) = x \\ N(x) = 0 \end{array} \right\} \\ &= (\text{Ker } N)^{G_K}. \end{aligned}$$

Montrons (2). Fixons une extension galoisienne finie L/K qui rend M unipotent et on pose $D = S_L(M)$. D'après (3.2.23), on a $M \cong M_L(D)$ et $M^\nabla \cong (\text{Ker } N)^{G_K} = (\text{Ker } N_D)^{\text{Gal}(L/K)}$. Comme $H^1(\text{Gal}(k_L/k), \text{GL}_r(C_L))$ est trivial, on en déduit que

$$(\text{Ker } N_D)^{\text{Gal}(L/K)} \otimes_C C_L \cong (\text{Ker } N_D)^{I(L/K)}.$$

D'où $M^\nabla \otimes_C C^{\text{nr}} = (\text{Ker } N_D)^{I(L/K)} \otimes_{C_L} C^{\text{nr}} = (\text{Ker } N)^{I_K}$. Par construction cet isomorphisme est équivariant et commute aux Frobenius respectifs.

(3.4.5.1) Par la définition $\text{ar}(M) = \text{sw}(\rho) + \dim_{C^{\text{nr}}} \text{WD}(M) - \dim_{C^{\text{nr}}} (\text{Ker } N)^{I_K}$. Par un théorème de Matsuda-Tsuzuki, cf. [Mat02, 8.6], [Tsu98b, 7.2.2] on a $\text{irr}(M) = \text{sw}(\rho)$; on conclut par (1) et (2).

(3.4.5.2) Par la définition de ρ , on a $\rho(F^*) = F^* \circ \varphi^a$ sur $(\text{Ker } N)^{I_K}$, où $F^* = \sigma^{-f} \in G_k$. On remarque que l'endomorphisme $\sigma_C^a: C^{\text{nr}} \rightarrow C^{\text{nr}}$ est égale à $\text{Id}_C \otimes \sigma^f$, cf. (3.0.2) et (3.1.2). En utilisant (2), on calcule

$$\begin{aligned} L(M, t) &= \det_{C^{\text{nr}}} (1 - t\rho(F^*) | (\text{Ker } N)^{I_K})^{-1} \\ &= \det_{C^{\text{nr}}} (1 - t(F^* \circ \varphi^a) | (\text{Ker } N)^{I_K})^{-1} \\ &= \det_{C^{\text{nr}}} (1 - t(\text{Id}_M \otimes \sigma^{-f}) \circ (\varphi^a \otimes \sigma_C^a) | M^\nabla \otimes_C C^{\text{nr}})^{-1} \\ &= \det_{C^{\text{nr}}} (1 - t(\varphi^a \otimes \text{Id}_{C^{\text{nr}}}) | M^\nabla \otimes_C C^{\text{nr}})^{-1} \\ &= \det_C (1 - t\varphi^a | M^\nabla)^{-1}. \end{aligned}$$

De même pour (3.4.5.3). Enfin, (3.4.5.4) et (3.4.5.5) sont évidents d'après (2) et (2.16). \square

4. Formule du produit

4.1 Rappels sur les F -isocristaux

4.1.1 Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. On reprend les notations de (3.0.2) concernant le corps de coefficients C . À partir de (4.2), on supposera k fini de cardinal $q = p^f$.

Soient X un k -schéma séparé de type fini, Z un sous-schéma fermé, U l'ouvert complémentaire de Z dans X qu'on suppose non vide. On note $F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$ la catégorie des F -isocristaux sur $U|C$ surconvergens le long de Z , cf. [Bert96, 2.3.2]. Si $U = X$, on note cette catégorie $F\text{-Isoc}(X|C)$, et on l'appelle la catégorie des F -isocristaux convergens sur $X|C$.

Soient $f: Y \rightarrow X$ un morphisme séparé de type fini, $V = f^{-1}(U)$. On a un foncteur image inverse, (cf. *loc. cit.* (2.3.2-iv))

$$f^*: F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C) \longrightarrow F\text{-Isoc}^\dagger(V, Y|C)$$

Si f est une immersion ouverte on notera $M|_Y \in F\text{-Isoc}^\dagger(V, Y|C)$ l'image d'un objet M de $F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$ par f^* .

4.1.2 La catégorie $F\text{-Isoc}(\text{Spec } k|C)$ est équivalente à la catégorie $\Phi M(C)$ définie dans (3.1.1), cf. [Bert96, 2.5.8]. Tout nombre rationnel λ s'écrit de manière unique sous la forme $\lambda = \frac{r}{s}$, avec r et s deux entiers premiers entre eux et $s > 0$ (pour $\lambda = 0$ on prend par convention $r = 0$ et $s = 1$). On définit le F -isocristal $C(\lambda) \in F\text{-Isoc}(\text{Spec } k|C)$ comme étant le C -espace vectoriel $C \otimes_{\mathbb{W}(\mathbb{F})} \mathbb{W}(\mathbb{F})[T]/(T^s - p^{-hr})$, muni du Frobenius $\sigma_C \otimes m_T$, où m_T désigne la multiplication par la classe de T dans $\mathbb{W}(\mathbb{F})[T]/(T^s - p^{-hr})$. Pour tout k -schéma $f: X \rightarrow \text{Spec } k$ et tout $\lambda \in \mathbb{Q}$, on note $\mathcal{O}_X^\dagger(\lambda) \in F\text{-Isoc}(X|C)$ l'image inverse $f^*C(\lambda)$; pour tout ouvert non-vide U de X , on a $\mathcal{O}_U^\dagger(\lambda) = \mathcal{O}_X^\dagger(\lambda)|_U \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$. Pour tout $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$ et tout $\lambda \in \mathbb{Q}$, on définit le décalé $M(\lambda)$ de M par la pente λ , comme étant le produit tensoriel de M avec $\mathcal{O}_U^\dagger(\lambda)$.

4.1.3 Dans la suite de cette section, on supposera désormais que X soit une courbe projective, lisse et géométriquement connexe sur k . On note g son genre, η son point générique, et $\bar{\eta}$ un point géométrique au dessus de η . On désigne par $|X|$ l'ensemble des points fermés de X . Pour U un

ouvert non vide de X et Z un fermé de X tel que $X = V \cup Z$, on appelle *F-isocristal surconvergent sur $U|C$* , tout *F-isocristal* sur $U|C$ surconvergent le long de Z . Pour un tel *F-isocristal* M , on note $H_{\text{rig}}^i(U, M)$ (resp. $H_{\text{rig},c}^i(U, M)$) la cohomologie rigide (resp. rigide à support propre) de M .

THÉORÈME 4.1.4 [Cr98, 9.5]. Soient U un ouvert non vide de X , $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$ et M^\vee son dual. Alors les C -espaces vectoriels $H_{\text{rig}}^i(U, M)$, $H_{\text{rig},c}^i(U, M)$ sont de dimension finie, nuls pour $i \neq 0, 1, 2$, et on a un accouplement parfait canonique

$$H_{\text{rig},c}^i(U, M) \times H_{\text{rig}}^{2-i}(U, M^\vee) \longrightarrow C(-1)$$

de φ -modules sur C .

4.1.5 Soit x un point fermé de X . On pose $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau local de X en x , \mathfrak{m}_x son idéal maximal, $k(x)$ son corps résiduel, $i_x: \text{Spec } k(x) \rightarrow X$ l'injection canonique. On note $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ le séparé complété de $\mathcal{O}_{X,x}$ pour la topologie \mathfrak{m}_x -adique, K_x le corps des fractions de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$, $\widehat{X}_{(x)} = \text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$, $\eta_x = \text{Spec}(K_x)$ le point générique de $\widehat{X}_{(x)}$, $\bar{\eta}_x$ (resp. \bar{x}) un point géométrique au dessus de η_x (resp. x). On fixe une uniformisante de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$, ce qui détermine un isomorphisme $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \cong k(x)[[t]]$. On note $k(\eta)$ le corps des fonctions méromorphes sur X .

On pose $C(x) = C \otimes_{W(k)} W(k(x))$, $\mathcal{R}(\eta_x)$ (resp. $\mathcal{E}^\dagger(\eta_x)$) l'anneau de Robba (resp. l'anneaux des fonctions surcovergentes bornées) relativement à K_x , cf. (3.2.1). On note $F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_x|C(x))$ la catégorie de (φ, ∇) -modules sur $\mathcal{E}^\dagger(\eta_x)$ et $F\text{-Isoc}_{\text{an}}^\dagger(\eta_x|C(x))$ la catégorie de (φ, ∇) -modules sur $\mathcal{R}(\eta_x)$.

4.1.6 Soient U un ouvert non vide de X , x un point fermé de U . On a un foncteur

$$i_x^*: F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C) \longrightarrow F\text{-Isoc}(\text{Spec } k(x)|C) \cong \Phi M(C(x))$$

On note (M_x, φ_x) l'image par ce foncteur d'un objet M de $F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$.

4.1.7 Soient U un ouvert non vide de X , x un point fermé de X . On pose $U \setminus \{x\} = U \cap (X \setminus \{x\})$, de sorte qu'on ait le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \eta_x & \longrightarrow & U \setminus \{x\} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \widehat{X}_{(x)} & \longrightarrow & X \end{array}$$

On a un foncteur de localisation [Cr98, 7.2]

$$F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C) \longrightarrow F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_x|C) \tag{4.1.7.1}$$

On en déduit, par composition avec le foncteur d'analytification (3.2.25), un foncteur de localisation

$$F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C) \longrightarrow F\text{-Isoc}_{\text{an}}^\dagger(\eta_x|C) \tag{4.1.7.2}$$

On note $(M_{\eta_x}, \varphi_{\eta_x}, \nabla_x)$ (resp. $(M_{\eta_x}^\dagger, \varphi_{\eta_x}, \nabla_x)$) l'image d'un objet M de $F\text{-Isoc}^\dagger(U|C)$ par (4.1.7.2) (resp. (4.1.7.1)).

DÉFINITION 4.1.8 [Cr87, 1.9]. Soient U un ouvert non vide de X , M un *F-isocristal* surconvergent sur $U|C$. On dit que M est *unité* si pour tout morphisme $i: \text{Spec } \Omega \rightarrow U$, où Ω est un corps parfait, le φ -module i^*M est unité. On note $F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$ la catégorie des *F-isocristaux* surconvergents unité sur $U|C$.

4.1.9 Soient U un ouvert non vide de X , V un Λ -espace vectoriel de dimension finie, $\theta: \pi_1(U, \bar{\eta}) \rightarrow \text{Aut}_\Lambda(V)$ une représentation continue de $\pi_1(U, \bar{\eta})$, et x un point de $X \setminus U$. On dit que θ a *monodromie géométrique finie en x* si le composé

$$\pi_1(\eta_x, \bar{\eta}_x) \longrightarrow \pi_1(U, \bar{\eta}_x) \cong \pi_1(U, \bar{\eta}) \xrightarrow{\theta} \text{Aut}_\Lambda(V)$$

a monodromie géométrique finie, c'est-à-dire que sa restriction à l'inertie de $\pi(\eta_x, \bar{\eta}_x)$ a une image finie. On dit que θ a *monodromie géométrique locale finie* si pour tout point x de $X \setminus U$, θ a monodromie géométrique finie en x . On note $\text{Rep}_\Lambda^{\text{gf}}(\pi_1(U, \bar{\eta}))$ la catégorie des Λ -représentations continues de dimension finie de $\pi_1(U, \bar{\eta})$, à monodromie géométrique locale finie.

THÉORÈME 4.1.10 [Tsu98a, 7.2.2-7.2.3]. *Soit U un ouvert non vide de X . Il existe une équivalence de catégories canonique*

$$G: \text{Rep}_\Lambda^{\text{gf}}(\pi_1(U, \bar{\eta})) \longrightarrow F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$$

telle que pour tout $x \in X \setminus U$, on a un diagramme commutatif de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \text{Rep}_\Lambda^{\text{gf}}(\pi_1(U, \bar{\eta})) & \xrightarrow{G} & F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Rep}_\Lambda^{\text{gf}}(\pi_1(\eta_x, \bar{\eta}_x)) & \xrightarrow{D_x^\dagger} & F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_x|C(x))^u \end{array}$$

où les flèches verticales sont la restriction et la localisation respectivement, et D_x^\dagger est l'équivalence de (3.3.3) relativement au corps K_x .

DÉFINITION 4.1.11. Soient U un ouvert non vide de X , $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$. On dit que M est *fini* si la représentation de $\pi_1(U, \bar{\eta})$ associée à M par le théorème 4.1.10 se factorise par un quotient fini.

4.1.12 Soient U un ouvert non-vide de X , $f: V \rightarrow U$ un morphisme étale fini. On note Y la compactification lisse de V , $\bar{f}: Y \rightarrow X$ la compactification de f , de sorte qu'on ait le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} V & \hookrightarrow & Y \\ f \downarrow & \square & \downarrow \bar{f} \\ U & \hookrightarrow & X \end{array}$$

On a un foncteur exact [Cr98, 8.3]

$$f_*: F\text{-Isoc}^\dagger(V, Y|C) \longrightarrow F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C) \quad (4.1.12.1)$$

On note η_Y le point générique de Y , $\bar{\eta}_Y$ un point géométrique générique de Y . Soient $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(V, Y|C)^u$ et $W \in \text{Rep}_\Lambda^{\text{gf}}(\pi_1(V, \bar{\eta}_Y))$, tels que $M = G(W)$. En vertu de [Cr00, 4.2], on a

$$f_*M = G\left(\text{Ind}_{\pi_1(V, \bar{\eta}_Y)}^{\pi_1(U, \bar{\eta}_Y)} W\right) \quad (4.1.12.2)$$

4.2 Rappels sur les fonctions L des F -isocristaux

4.2.1 On suppose désormais k fini de cardinal $q = p^f$ et que l'entier h fixé dans (3.0.2) divise f . On pose $a = h^{-1}f$. Pour tout $x \in |X|$, on note $\deg(x) = [k(x) : k]$ le degré de x . Soient U un ouvert non vide de X et M un F -isocristal surconvergent sur $U|C$. Pour tout $x \in |X|$, $\varphi_x^{a \deg(x)}$ est la plus petite puissance de $\varphi_x: M_x \rightarrow M_x$ qui soit $C(x)$ -linéaire.

LEMME 4.2.2 [Et04, Lemma 3.1]. Soient U un ouvert non vide de X , M un F -isocrystal surconvergent sur $U|C$. On a $\det_{C(x)}(1 - t\varphi_x^{a \deg(x)}|M_x) \in 1 + tC[[t]]$.

DÉFINITION 4.2.3 [Kat72, 6.0], [EtLS93, 2.3]. Soient U un ouvert non vide de X , et M un objet de $F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$. On pose

$$L(M, t) = \prod_{x \in |U|} \det_{C(x)}(1 - t^{\deg(x)} \varphi_x^{a \deg(x)}|M_x)^{-1}.$$

Ce produit converge formellement dans $1 + tC[[t]]$ car il n'y a qu'un nombre fini de points fermés de U de degré donné.

Remarque 4.2.4. On peut considérer M_x comme un C -espace vectoriel de dimension finie. On calcule

$$\det_C(1 - t^{\deg(x)} \varphi_x^{a \deg(x)}|M_x) = N_{C(x)/C}(\det_{C(x)}(1 - t^{\deg(x)} \varphi_x^{a \deg(x)}|M_x))$$

qui est égal à $\det_{C(x)}(1 - t^{\deg(x)} \varphi_x^{a \deg(x)}|M_x)^{\deg(x)}$ par (4.2.2). Donc par abus de langage on trouve dans la littérature l'expression

$$L(M, t) = \prod_{x \in |U|} \det_C(1 - t^{\deg(x)} \varphi_x^{a \deg(x)}|M_x)^{-\frac{1}{\deg(x)}}.$$

THÉORÈME 4.2.5 (Interprétation cohomologique [EtLS93, Th. 6.3 I]). Soient U un ouvert non vide de X , $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$. On a

$$L(M, t) = \prod_i \det_C(1 - tF^* |H_{\text{rig},c}^i(U, M))^{(-1)^{i+1}}$$

COROLLAIRE 4.2.6 (Équation fonctionnelle). Soient U un ouvert non vide de X , M un objet de $F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$, M^\vee son dual. On a

$$L(M, t) = \varepsilon(U, M)t^{-\chi_c(U, M)}L_o(M^\vee, q^{-1}t^{-1}),$$

où

$$\begin{aligned} \varepsilon(U, M) &= \det_C(-F^*, H_{\text{rig},c}^*(U, M))^{-1} = \prod_{i=0}^2 \det_C(-F^* |H_{\text{rig},c}^i(U, M))^{(-1)^{i+1}}, \\ \chi_c(U, M) &= \sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim_C H_{\text{rig},c}^i(U, M), \\ L_o(M, t) &= \prod_{i=0}^2 \det_C(1 - tF^* |H_{\text{rig}}^i(U, M))^{(-1)^{i+1}}. \end{aligned}$$

Dém. Il suffit d'appliquer à l'accouplement (4.1.4) un lemme classique d'algèbre linéaire, cf. [Har77, 4.3 Appendix C]. \square

4.3 Formule du produit : conjecture et résultats

4.3.1 Soient U un ouvert non vide de X , $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$, $x \in |X|$. On note I_{η_x} le groupe d'inertie de $\pi_1(\eta_x, \bar{\eta}_x)$ et F_x^* le Frobenius géométrique de $\pi_1(x, \bar{x})$. Pour alléger les notations, on désignera le triplet $(M_{\eta_x}, \varphi_{\eta_x}, \nabla_x)$ simplement par M_{η_x} , cf. (4.1.7.2). On pose

$$\text{WD}(M_{\eta_x}) = (S(M_{\eta_x}), \rho_{\eta_x}, N_{\eta_x})$$

la C^{nr} -représentation de Weil-Deligne associée à M_{η_x} , cf. (3.4.2). On pose (3.4.5.3)

$$t_M(x) = \text{tr}_{C^{\text{nr}}}(\rho_{\eta_x}(\mathbf{F}_x^*) | (\text{Ker } N_{\eta_x})^{I_{\eta_x}}) = \text{tr}_{C(x)}(\varphi_{\eta_x}^{a \deg(x)} | M_{\eta_x}^{\nabla_x}) \quad (4.3.1.1)$$

$$\det_M(x) = \det_{C^{\text{nr}}}(\rho_{\eta_x}(\mathbf{F}_x^*) | (\text{Ker } N_{\eta_x})^{I_{\eta_x}}) = \det_{C(x)}(\varphi_{\eta_x}^{a \deg(x)} | M_{\eta_x}^{\nabla_x}). \quad (4.3.1.2)$$

Exemple 4.3.2. Soient U un ouvert non vide de X et λ un nombre rationnel. On écrit $\lambda = \frac{r}{s}$ comme dans (4.1.2). Pour tout $x \in |X|$, la C^{nr} -représentation de Weil-Deligne $\text{WD}(\mathcal{O}_U^\dagger(\lambda)_{\eta_x})$ de K_x a *monodromie géométrique triviale*, i.e. $N_{\eta_x} = 0$ et $\rho_{\eta_x}: \pi_1(\eta_x, \bar{\eta}_x) \rightarrow \text{Aut}_{C^{\text{nr}}}(S(\mathcal{O}_U^\dagger(\lambda)_{\eta_x}))$ est non-ramifiée. On a $t_{\mathcal{O}_U^\dagger(\lambda)}(x) = 0$ et $\det_{\mathcal{O}_U^\dagger(\lambda)}(x) = ((-1)^{s-1} p^{-hr})^{a \deg(x)} = ((-1)^{(s-1)a} q^{-r})^{\deg(x)}$. On pose $c(\lambda) = (-1)^{(s-1)a} q^{-r}$.

LEMME 4.3.3. Soient U un ouvert non vide de X , $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U|C)$ et $x \in |U|$. Alors :

- (1) M_{η_x} est $\mathcal{R}(\eta_x)$ -soluble (3.2.11) et $M_{\eta_x}^{\nabla_x} = M_x$.
- (2) La C^{nr} -représentation de Weil-deligne $\text{WD}(M_{\eta_x})$ de K_x a *monodromie géométrique triviale*.
- (3) $t_M(x)$ et $\det_M(x)$ appartiennent à C .

Dém. Comme M est convergent sur U , pour tout $x \in |U|$, le (φ, ∇) -module M_{η_x} est $\mathcal{R}(\eta_x)$ -soluble (par [Kat72, 3.1]), donc $M_{\eta_x}^{\nabla_x} = M_x$. L'assertion (2) résulte de (1) et l'assertion (3) s'en déduit par (4.2.2). \square

4.3.4 Supposons désormais que C^{nr} contienne une racine primitive p -ième de l'unité. Le choix d'une telle racine ξ détermine l'isomorphisme $\psi_{\mathbb{F}_p}: \mathbb{F}_p \rightarrow \mu_p(C^{\text{nr}})$ envoyant 1 sur ξ . On note $\Omega_{k(\eta)/k}^1$ le module des formes différentielles méromorphes sur X . Pour tout $\omega \in \Omega_{k(\eta)/k}^1$ différent de zéro et $x \in |X|$, on note $\omega_x \in \Omega_{\eta_x/k(x)}^1$ le germe de ω en x , et par $\psi(\omega_x): K_x \rightarrow C^{\text{nr}*}$ le caractère additif donné par $\alpha \mapsto \psi_{\mathbb{F}_p}(\text{Tr}_{k(x)/\mathbb{F}_p}(\text{Res}(\alpha\omega_x)))$, cf. (2.8). On note μ_x l'unique mesure de Haar sur K_x telle que $\mu_x(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}) = 1$. Si U est un ouvert non-vidé de X et $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$, on note simplement $\varepsilon(M_{\eta_x}, \omega_x)$ au lieu de $\varepsilon(M_{\eta_x}, \psi(\omega_x), \mu_x)$, et de même pour ε_0 , cf. (3.4.4).

4.3.5 On note $\mathbb{A}_{k(\eta)}$ l'anneau des adèles de $k(\eta)$. Le choix de la différentielle ω détermine un caractère additif non-trivial $\psi(\omega): \mathbb{A}_{k(\eta)}/k(\eta) \rightarrow C^{\text{nr}*}$, tel que pour tout $x \in |X|$, le composé de $\psi(\omega)$ et $K_x \hookrightarrow \mathbb{A}_{k(\eta)}/k(\eta)$ soit égal à $\psi(\omega_x)$.

Soient U un ouvert non vide de X , $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$, $\theta: \pi_1(U, \bar{\eta}) \rightarrow \text{Aut}_\Lambda(V)$ la représentation à monodromie géométrique locale finie associée à M par (4.1.10). On considère l'homomorphisme $\pi_1(\eta, \bar{\eta}) \rightarrow \pi(U, \bar{\eta}) \rightarrow \text{Aut}_\Lambda(V)$. Si $\text{rg}(M) = 1$, alors cet homomorphisme se factorise par $\pi(\eta, \bar{\eta})^{\text{ab}} \rightarrow \Lambda^*$. Par composition avec l'homomorphisme de réciprocité globale $\mathbb{A}_{k(\eta)}^*/k(\eta)^* \rightarrow \pi_1(\eta, \bar{\eta})^{\text{ab}}$, on obtient un homomorphisme $\mathbb{A}_{k(\eta)}^*/k(\eta)^* \rightarrow \Lambda^*$, qu'on note $\chi(M)$ et qu'on appelle *quasi-caractère global associé à M* .

4.3.6 Soient U un ouvert non-vidé de X et $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$. On définit un homomorphisme

$$d(M): k(\eta)^* \longrightarrow C^{\text{nr}*}$$

de la façon suivante. Soient $x \in |X|$, $\alpha \in k(\eta)^*$. On note α_x l'image de α par l'homomorphisme composé $k(\eta)^* \hookrightarrow K_x^* \rightarrow W_{K_x}^{\text{ab}}$, où la seconde flèche est l'isomorphisme de réciprocité locale. Alors le produit

$$d(M)(\alpha) = \prod_{x \in |X|} \det \rho_{\eta_x}(\alpha_x) \in C^{\text{nr}*} \quad (4.3.6.1)$$

est bien défini. Il est clair que $d(M)$ est un homomorphisme.

LEMME 4.3.7. Soient U un ouvert non vide de X , $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$.

(1) Si $\det M$ est unité, alors $d(M) = 1$.

(2) Pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

dans $F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$, on a $d(M) = d(M') d(M'')$.

(3) Pour tout M_1, M_2 dans $F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$, on a $d(M_1 \otimes M_2) = d(M_1)^{\text{rg}(M_2)} d(M_2)^{\text{rg}(M_1)}$.

(4) Si $d(M) = 1$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$, $d(M(\lambda)) = 1$.

Dém. (1) Pour tout $\alpha \in k(\eta)$, on a $d(M)(\alpha) = \chi(\det(M))(\alpha) = 1$, cf. (4.3.5). (2) Pour tout point fermé x de X , on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{WD}(M'_{\eta_x}) \longrightarrow \text{WD}(M_{\eta_x}) \longrightarrow \text{WD}(M''_{\eta_x}) \longrightarrow 0$$

de représentations de Weil-Deligne. Donc $\det \rho_{\eta_x} = \det \rho'_{\eta_x} \det \rho''_{\eta_x}$, et on conclut. (3) Pour tout point fermé x de X , on a $\text{WD}((M_1 \otimes M_2)_{\eta_x}) = \text{WD}((M_1)_{\eta_x}) \otimes \text{WD}((M_2)_{\eta_x})$, et on conclut immédiatement par la formule donnant le déterminant d'un produit tensoriel [Bou70, A III.101 (33)]. (4) Par (3) il suffit de montrer que $d(\mathcal{O}_U^\dagger(\lambda)) = 1$. En vertu de (4.3.2), on calcule, pour tout $\alpha \in k(\eta)^*$, $d(\mathcal{O}_U^\dagger(\lambda))(\alpha) = \prod_{x \in |X|} \det \rho_{\eta_x}(\alpha_x) = \prod_{x \in |X|} \det \rho_{\eta_x}(\mathbb{F}_x^*)^{\text{v}_x(\alpha)} = \prod_{x \in |X|} c(\lambda)^{\deg(x) \text{v}_x(\alpha)}$. Qui est égale à 1, car $\sum_{x \in |X|} \deg(x) \text{v}_x(\alpha) = 0$. \square

4.3.8 Soient U un ouvert non vide de X , $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$. Si $d(M) = 1$, on définit un quasi-caractère global

$$\tilde{\chi}(\det M): \mathbb{A}_{k(\eta)}^*/k(\eta)^* \longrightarrow C^{\text{nr}*}$$

en posant pour tout $z \in \mathbb{A}_{k(\eta)}^*$, $\tilde{\chi}(\det M)(z) = \prod_{x \in |X|} \det \rho_{\eta_x}(z_x)$. On appelle $\tilde{\chi}(\det M)$ le *caractère central* de M . Si $\det M$ est unité, $d(M) = 1$ et $\tilde{\chi}(\det M) = \chi(\det M)$.

L'auteur se demande s'il existe des F -isocristaux M tels que $d(M) \neq 1$.

CONJECTURE 4.3.9. Soient U un ouvert non vide de X , M un objet de $F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$, et ω un élément non-nul de $\Omega_{k(\eta)/k}^1$. Si $d(M) = 1$, alors on a

$$\det_C(-F^* |H_{\text{rig},c}^*(U, M))^{-1} = q^{(1-g) \text{rg}(M)} \prod_{x \in |U|} \left(q^{\deg(x) \text{v}_x(\omega) \text{rg}(M)} \det_M(x)^{\text{v}_x(\omega)} \right) \prod_{x \in X \setminus U} \varepsilon_0(M_{\eta_x}, \omega_x). \quad (4.3.9.1)$$

Remarque 4.3.10. Le deuxième membre de (4.3.9.1) ne dépend pas du choix de ω . En effet, si on remplace ω par $\alpha\omega$, avec $\alpha \in k(\eta)^*$, alors en appliquant 2.19-(1), on voit que le deuxième membre est multiplié par $d(M)(\alpha)$, qui est égal à 1 par hypothèse.

LEMME 4.3.11. Si la conjecture (4.3.9) est vérifiée pour $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$, alors elle l'est aussi pour tout $M(\lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Dém. On pose $\lambda = \frac{r}{s}$ comme dans (4.1.2). Par définition $\text{rg}(M(\lambda)) = \text{rg}(M)s$ et $H_{\text{rig},c}^*(U, M(\lambda)) = H_{\text{rig},c}^*(U, M)(\lambda)$. Par la formule donnant le déterminant d'un produit tensoriel [Bou70, A III.101 (33)], le membre de gauche de (4.3.9.1) calculé en $M(\lambda)$ est égal à

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^2 \det_C(-F^* |H_{\text{rig},c}^i(U, M))^{(-1)^{i+1} \text{rg}(C(\lambda))} \det_C(\varphi_{C(\lambda)}^a |C(\lambda))^{-h_c^i(U, M)} &= \\ &= \det_C(-F^* |H_{\text{rig},c}^*(U, M))^{-s} c(\lambda)^{-\chi_c(U, M)}, \end{aligned}$$

où $h_c^i(U, M) = \dim_C H_{\text{rig},c}^i(U, M)$ et $c(\lambda) = (-1)^{(s-1)a} q^{-r}$, cf. (4.3.2). De même $\det_{M(\lambda)}(x) = \det_M(x)^s c(\lambda)^{\deg(x) \text{rg}(M)}$ et, par 2.19-(2),

$$\varepsilon_0(M_{\eta_x}(\lambda), \omega_x) = \varepsilon_0(M_{\eta_x}, \omega_x)^s c(\lambda)^{\deg(x)(\text{irr}(M_{\eta_x}) + (v_x(\omega) + 1) \text{rg}(M))}.$$

Par conséquent, le membre de droite de (4.3.9.1) calculé en $M(\lambda)$ est égal au produit

$$\begin{aligned} & q^{(1-g) \text{rg}(M)s} \cdot \prod_{x \in |U|} \left(q^{\deg(x)v_x(\omega) \text{rg}(M)s} \det_M(x)^{v_x(\omega)s} c(\lambda)^{\text{rg}(M) \deg(x)v_x(\omega)} \right) \\ & \cdot \prod_{x \in X \setminus U} \varepsilon_0(M_{\eta_x}, \omega_x)^s c(\lambda)^{\deg(x)(\text{irr}(M_{\eta_x}) + (v_x(\omega) + 1) \text{rg}(M))} \end{aligned}$$

qui, par hypothèse, est égal à

$$\det_C(-F^* |H_{\text{rig},c}^*(U, M)|^{-s} c(\lambda)^{\left(\sum_{x \in |X|} \text{rg}(M) \deg(x)v_x(\omega) + \sum_{x \in X \setminus U} \deg(x)(\text{irr}(M_{\eta_x}) + \text{rg}(M))\right)}).$$

On conclut compte tenu de $\sum_{x \in |X|} \deg(x)v_x(\omega) = 2g - 2$ et de la formule de Grothendieck-Ogg-Chafarevitch pour les F -isocristaux surconvergents [ChMe02, 1.2] :

$$\begin{aligned} \chi_c(U, M) &= \chi_c(U) \text{rg}(M) - \sum_{x \in X \setminus U} \deg(x) \text{irr}(M_{\eta_x}) \\ &= \left(2 - 2g - \sum_{x \in X \setminus U} \deg(x) \right) \text{rg}(M) - \sum_{x \in X \setminus U} \deg(x) \text{irr}(M_{\eta_x}). \end{aligned}$$

□

4.3.12 Soient U un ouvert non vide de X , $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$. On pose

$$L_{\text{WD}}(X, M, t) = \prod_{x \in |X|} L(M_{\eta_x}, t^{\deg x}) \quad (4.3.12.1)$$

Ce produit converge formellement dans $1 + tC^{\text{nr}}[[t]]$ car X est de type fini et

$$L(M_{\eta_x}, t^{\deg x}) = L(\text{WD}(M_{\eta_x}), t^{\deg x}) = \det_{C(x)}(1 - t^{\deg(x)} \varphi^a \deg(x), M_{\eta_x}^\nabla)^{-1}$$

appartient à $1 + t^{\deg(x)} C(x)[[t]]$, cf. (3.4.5.2).

THÉORÈME 4.3.13 (Tate). Soient U un ouvert non-vide de X , $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$ de rang 1, et $\omega \in \Omega_{k(\eta)/k}^1 \setminus \{0\}$. Alors

$$L_{\text{WD}}(X, M, t) = q^{(1-g)t^{-\chi_c(X,M)}} \prod_{x \in |X|} \varepsilon(M_{\eta_x}, \omega_x) L_{\text{WD}}(X, M^\vee, q^{-1}t^{-1})$$

Dém. Soient $\chi(M) : \mathbb{A}_{k(\eta)}^*/k(\eta)^* \rightarrow \Lambda^*$ le quasi-caractère globale associée à M , et $\psi(\omega) : \mathbb{A}_{k(\eta)}/k(\eta) \rightarrow C^{\text{nr}*}$ le caractère additif non-trivial associé à ω , cf. (4.3.5). Par la définition de $L_{\text{WD}}(X, M, t)$ et $\varepsilon(M_{\eta_x}, \omega_x)$, l'équation fonctionnelle recherchée est l'équation fonctionnelle globale de Tate relative à $\chi(M)$ et $\psi(\omega)$, cf. [Lau87, (3.1.2.4)-(3.1.3.5)]. □

LEMME 4.3.14. Soient U un ouvert non vide de X , $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$ de rang 1. Supposons que $X \setminus U$ soit non vide et, pour tout x dans $X \setminus U$, M_{η_x} ne soit pas $\mathcal{R}(\eta_x)$ -soluble. Alors $H_{\text{rig}}^0(U, M) = 0 = H_{\text{rig},c}^2(U, M)$ et $H_{\text{rig},c}^1(U, M) \cong H_{\text{rig}}^1(U, M)$. En particulier $L_\circ(U, M, t) = L(U, M, t) = \det_C(1 - tF^* |H_{\text{rig}}^1(U, M)|)$.

Dém. Comme U est une courbe affine, on a par (4.2.5)

$$L(U, M, t) = \det_C(1 - tF^* |H_{\text{rig},c}^1(U, M)|) \det_C(1 - tF^* |H_{\text{rig},c}^2(U, M)|)^{-1}$$

et par définition

$$L_o(U, M, t) = \det_C(1 - tF^* |H_{\text{rig}}^1(U, M)) \det_C(1 - tF^* |H_{\text{rig}}^0(U, M))^{-1}.$$

On considère la suite exacte [Cr00, (3.1.4)],

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{\text{rig}}^0(U, M) \rightarrow H_{\text{rig}}^0(X \setminus U, Rj_*M) \rightarrow H_{\text{rig},c}^1(U, M) \rightarrow \\ \rightarrow H_{\text{rig}}^1(U, M) \rightarrow H_{\text{rig}}^1(X \setminus U, Rj_*M) \rightarrow H_{\text{rig},c}^2(U, M) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

où par définition $H_{\text{rig}}^i(X \setminus U, Rj_*M) = \bigoplus_{x \in X \setminus U} H_{\text{rig}}^i(x, Rj_*M)$, $H_{\text{rig}}^0(x, Rj_*M) = \text{Ker } \nabla_x$ et $H_{\text{rig}}^1(x, Rj_*M) = \text{Coker } \nabla_x$. Comme M est unité, on a [Cr00, (3.2.10)]

$$\dim_C H_{\text{rig}}^0(x, Rj_*M) = \dim_C H_{\text{rig}}^1(x, Rj_*M)$$

Par hypothèse, pour tout $x \in X \setminus U$, M_{η_x} est non-trivial de rang 1. Donc $\text{Ker } \nabla_x = 0$. \square

LEMME 4.3.15. Soient U un ouvert non vide de X , $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$. Si pour un $x \in X \setminus U$, M_{η_x} est $\mathcal{R}(\eta_x)$ -soluble, alors il existe $\widetilde{M} \in F\text{-Isoc}^\dagger(U \cup \{x\}, X|C)^u$ tel que $\widetilde{M}|_U = M$.

Dém. On peut supposer $X \setminus U$ non-vide. Soient $x \in X \setminus U$, $Y = U \cup \{x\}$ et

$$\theta: \pi_1(U, \bar{\eta}) \rightarrow \text{Aut}_\Lambda(V)$$

la représentation associée à M par (4.1.10). On a un homomorphisme surjectif

$$\text{Gal}(k(\bar{\eta})/k(\eta)) \rightarrow \pi_1(U, \bar{\eta})$$

dont le noyau est le sous-groupe de $\text{Gal}(k(\bar{\eta})/k(\eta))$ correspondant à la sous-extension de $k(\bar{\eta})/k(\eta)$ maximale non-ramifiée sur U , cf. [SGA1, 8.2]. Donc on déduit du diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \eta_x & \xrightarrow{j_x} & U \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ Y_{(x)} & \longrightarrow & Y \end{array}$$

le diagramme cocartésien,

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\eta_x, \bar{\eta}_x) & \xrightarrow{\pi_1(j_x)} & \pi_1(U, \bar{\eta}_x) \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \pi_1(x, \bar{x}) & \longrightarrow & \pi_1(Y, \bar{\eta}_x) \end{array}$$

Par hypothèse M_{η_x} est $\mathcal{R}(\eta_x)$ -soluble et unité, donc $M_{\eta_x}^\dagger$ est $\mathcal{E}^\dagger(\eta_x)$ -soluble et la représentation $\theta \circ \pi_1(j_x)$ se factorise par $\pi_1(x, \bar{x})$, cf. (3.3.6). Comme le carré est cocartésien en déduit une représentation continue $\tilde{\theta}: \pi_1(Y, \bar{\eta}_x) \rightarrow \text{Aut}_\Lambda(V)$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\eta_x, \bar{\eta}_x) & \xrightarrow{\pi_1(j_x)} & \pi_1(U, \bar{\eta}_x) & \xrightarrow{\theta} & \text{Aut}_\Lambda(V) \\ \downarrow & \square & \downarrow & \nearrow \tilde{\theta} & \\ \pi_1(x, \bar{x}) & \longrightarrow & \pi_1(Y, \bar{\eta}_x) & & \end{array}$$

Le F -isocrystal $\widetilde{M} \in F\text{-Isoc}^\dagger(Y, X|C)^u$, correspondant à $\tilde{\theta}: \pi_1(Y, \bar{\eta}_x) \rightarrow \text{Aut}_\Lambda(V)$ par (4.1.10), répond à la question. \square

THÉORÈME 4.3.16. Soient U un ouvert non vide de X , $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$ de rang 1. Alors M satisfait la conjecture (4.3.9).

Dém. Comme M est unité, quitte à agrandir U , on peut supposer par (4.3.15) que pour tout $x \in X \setminus U$, M_{η_x} ne soit pas $\mathcal{R}(\eta_x)$ -soluble, et puisque M est de rang 1, $M_{\eta_x}^{\nabla x} = 0$. On en déduit facilement que pour tout $x \in X \setminus U$, on a $(M_{\eta_x}^{\nabla})^{\nabla} = 0$. D'où $L_{\text{WD}}(X, M, t) = L(X, M, t)$ et de même pour M^{∇} . L'équation fonctionnelle 4.2.6 s'écrit

$$L(M, t) = \det_C(-F^* |H_{\text{rig},c}^*(U, M))^{-1} t^{-\chi_c(U, M)} L(M^{\nabla}, q^{-1}t^{-1}).$$

En effet, il n'y a rien à montrer si $U = X$, et si $U \neq X$, c'est une conséquence de (4.3.14). En comparant avec l'équation fonctionnelle de Tate (4.3.13)

$$L_{\text{WD}}(X, M, t) = q^{(1-g)} t^{-\chi_c(X, M)} \prod_{x \in |X|} \varepsilon(M_{\eta_x}, \omega_x) L_{\text{WD}}(X, M^{\nabla}, q^{-1}t^{-1}),$$

on obtient,

$$\det_C(-F^* |H_{\text{rig},c}^*(U, M))^{-1} = q^{(1-g)} \prod_{x \in |X|} \varepsilon(M_{\eta_x}, \omega_x).$$

Pour $x \in X \setminus U$, on a $M_{\eta_x}^{\nabla x} = 0$, d'où $\varepsilon(M_{\eta_x}, \omega_x) = \varepsilon_0(M_{\eta_x}, \omega_x)$, cf. (3.4.5.4). Pour $x \in |U|$, par (4.3.3) et 2.19-(2), on a

$$\begin{aligned} \varepsilon(M_{\eta_x}, \omega_x) &= q^{\deg(x) \nu_x(\omega)} \det \rho_{\eta_x}(F_x^{*\nu_x(\omega)}) \\ &= q^{\deg(x) \nu_x(\omega)} \det_M(x)^{\nu_x(\omega)}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. \square

THÉORÈME 4.3.17. *Soient U un ouvert non vide de X , $M \in F\text{-Isoc}^{\dagger}(U, X|C)^u$. Si M est fini (4.1.11), alors il satisfait la conjecture (4.3.9).*

Dém. D'après (4.1.10), on a un isomorphisme canonique de groupes de Grothendieck

$$\mathbf{Gr} \left(F\text{-Isoc}^{\dagger}(U, X|C)^u \right) \longrightarrow \mathbf{Gr} \left(\text{Rep}_{\Lambda}^{\text{gf}}(\pi_1(U, \bar{\eta})) \right) \quad (4.3.17.1)$$

La relation (4.3.9.1) est une équation sur le groupe de gauche. En vertu de (4.3.16), elle est vérifiée pour les F -isocristaux de rang 1. On en déduit qu'elle est vérifiée pour $M \in F\text{-Isoc}^{\dagger}(U, X|C)^u$ si et seulement si elle est vérifiée pour $[M] - \text{rg}(M)[\mathcal{O}_U^{\dagger}]$, où $[\mathcal{O}_U^{\dagger}]$ est la classe de l'isocristal trivial. Soient $M \in F\text{-Isoc}^{\dagger}(U, X|C)^u$ fini, $\theta: \pi_1(U, \bar{\eta}) \rightarrow \text{Aut}_{\Lambda}(W)$ son image par (4.1.10); donc θ se factorise par un quotient fini G de $\pi_1(U, \bar{\eta})$. On sait d'après le théorème d'induction de Brauer [De73, Prop.1.5], que

$$[W] - (\dim_{\Lambda} W)[\Lambda] = \sum_{H, W_H} n_{W_H} \text{Ind}_H^G([W_H] - [\Lambda])$$

où H varie parmi les sous-groupes de G , W_H est une représentation de rang 1 de H , n_{W_H} est un entier, et $[\Lambda]$ désigne la classe de la représentation triviale. Transposant cette relation par (4.3.17.1) sur le groupe de Grothendieck de $F\text{-Isoc}^{\dagger}(U, X|C)^u$, il suffit de montrer l'assertion suivante. Soient

$$\begin{array}{ccc} V^{\subset} & \longrightarrow & Y \\ f \downarrow & \square & \downarrow \bar{f} \\ U^{\subset} & \longrightarrow & X \end{array}$$

un diagramme cartésien, avec f étale, Y lisse, \bar{f} fini, et $P \in F\text{-Isoc}^{\dagger}(V, Y|C)^u$ de rang 1. Alors la conjecture (4.3.9.1) est vérifiée pour $f_*([P] - [\mathcal{O}_V^{\dagger}]) = [f_*P] - [f_*\mathcal{O}_V^{\dagger}]$.

Soient $y \in Y \setminus V$, $x = \bar{f}(y)$, et $W_{\eta_y} \in \text{Rep}_{\Lambda}^{\text{gf}}(\pi_1(\eta_y, \bar{\eta}_y))$ tel que $D_y^{\dagger}(W_{\eta_y}) = P_{\eta_y}^{\dagger}$. Par (4.1.12) et (4.1.10), on a pour tout $x \in |X|$,

$$(f_*P)_{\eta_x}^{\dagger} = \bigoplus_{y \rightarrow x} D_x^{\dagger} \left(\text{Ind}_{\pi_1(\eta_y, \bar{\eta}_y)}^{\pi_1(\eta_x, \bar{\eta}_y)} W_{\eta_y} \right)$$

On en déduit que :

(i) pour tout $y \in V$,

$$\det_{f_*P}(x)^{v_x(\omega)} = \prod_{y \mapsto x} \det_P(y)^{v_y(f^*\omega)} ; \quad (4.3.17.2)$$

(ii) pour tout $y \in Y \setminus V$, on a

$$\det_{f_*P}(x) = \prod_{y \mapsto x} \det_P(y)^{e_{K_y/K_x}} ;$$

et, par 2.14-(2),

$$\varepsilon([(f_*P)_{\eta_x}] - [(f_*\mathcal{O}_V^\dagger)_{\eta_x}], \omega_x) = \prod_{y \mapsto x} \varepsilon([P_{\eta_y}] - [(\mathcal{O}_V^\dagger)_{\eta_y}], (f^*\omega)_y).$$

Comme P est unité, $N_{\eta_x} = 0$; donc $\varepsilon_0(P_{\eta_x}, \omega) = \varepsilon(P_{\eta_x}, \omega) \det_P(x)$. Par (ii) ci-dessus, on a alors

$$\varepsilon_0([(f_*P)_{\eta_x}] - [(f_*\mathcal{O}_V^\dagger)_{\eta_x}], \omega_x) = \prod_{y \mapsto x} \varepsilon_0([P_{\eta_y}] - [(\mathcal{O}_V^\dagger)_{\eta_y}], (f^*\omega)_y). \quad (4.3.17.3)$$

Pour tout i , on a $H_{\text{rig},c}^i(U, f_*P) = H_{\text{rig},c}^i(V, P)$ [Cr00, 4.2]; donc

$$\det_C(-F^* |H_{\text{rig},c}^*(U, [f_*P] - [f_*\mathcal{O}_V^\dagger])|)^{-1} = \det_C(-F^* |H_{\text{rig},c}^*(V, [P] - [\mathcal{O}_V^\dagger])|)^{-1}$$

qui est égale, par (4.3.16), à

$$\prod_{y \in |V|} \det_P(y)^{v_y(f^*\omega)} \prod_{y \in Y \setminus V} \varepsilon_0([P_{\eta_y}] - [\mathcal{O}_V^\dagger], (f^*\omega)_y).$$

Par (4.3.17.2) et (4.3.17.3), ce dernier est égal à

$$\prod_{x \in |U|} \det_{f_*P}(x)^{v_x(\omega)} \prod_{x \in X \setminus U} \varepsilon_0([f_*P_{\eta_x}] - [f_*\mathcal{O}_V^\dagger], \omega_x)$$

ce qui termine la démonstration. \square

4.3.18 Soient \mathbb{P}_k^1 la droite projective sur k , $\mathbb{G}_m \subset \mathbb{P}_k^1$ le groupe multiplicatif, $\{0, \infty\} = \mathbb{P}_k^1 \setminus \mathbb{G}_m$ le fermé complémentaire, et

$$\begin{aligned} F\text{-Isoc}_{an}^\dagger(\eta_0|C) &\longrightarrow F\text{-Isoc}^\dagger(\mathbb{G}_m, \mathbb{P}_k^1|C) \\ M &\longmapsto M^{\text{can}} \end{aligned} \quad (4.3.18.1)$$

le foncteur d'extension canonique de Matsuda [Mat02, 7.3].

COROLLAIRE 4.3.19. Soit $M \in F\text{-Isoc}_{an}^\dagger(\eta_0|C)$. Alors $d(M^{\text{can}}) = 1$ et M^{can} satisfait la conjecture (4.3.9).

Dém. L'image essentielle de (4.3.18.1) est constitué des F -isocristaux surconvergens sur \mathbb{G}_m *spéciaux* [Mat02, 6.1], i.e. qui sont somme directe de F -isocristaux de la forme $Q \otimes S$, où Q est un F -isocristal surconvergent unipotent [ChLS99, 4.1.1] et S est un F -isocristal surconvergent unité *spécial* [Mat02, 5.1], donc en particulier unité fini. Par [ChLS99, 4.1.3], Q est extension itérée de F -isocristaux de la forme $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}^\dagger(\lambda)$, pour $\lambda \in \mathbb{Q}$; donc M^{can} est extension itérée de F -isocristaux de la forme $S(\lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{Q}$ et S unité fini. On en déduit par (4.3.7) que $d(M^{\text{can}}) = 1$. Montrons que M^{can} satisfait la conjecture (4.3.9). L'équation (4.3.9.1) est une relation dans le groupe de Grothendieck de $F\text{-Isoc}^\dagger(\mathbb{G}_m, \mathbb{P}_k^1|C)$. On se réduit donc à la montrer pour $S(\lambda)$, ce qui résulte de (4.3.11) et (4.3.17). \square

5. Facteurs epsilon et corps des normes

5.1 Rappels et compléments sur le corps des normes et sur la ramification

5.1.1 On désigne par K un corps de valuation discrète complet, à corps résiduel fini, et on reprend les notations de (2.1). A partir de (5.1.5) on supposera K une extension finie de \mathbb{Q}_p . Soit L une extension séparable finie de K . On note $\mathcal{D}_{L/K}$ la différentielle de l'extension L/K , $e_{L/K}$ l'indice de ramification et $\text{tr}_{L/K}$ (resp. $N_{L/K}$) la trace (resp. la norme) de L dans K . Soient m, t deux entiers. Pour que $\text{tr}_{L/K}(\mathfrak{m}_L^m) \subseteq \mathfrak{m}_K^t$, il faut et il suffit que [Ser68a, Ch.III §3, Prop.7]

$$\mathfrak{m}_L^m \subseteq \mathcal{D}_{L/K}^{-1} \mathfrak{m}_K^t = \mathcal{D}_{L/K}^{-1} \mathfrak{m}_L^{e_{L/K} t}.$$

Par conséquent,

$$\text{tr}_{L/K}(\mathfrak{m}_L^m) = \mathfrak{m}_K^{t_{L/K}(m)}, \quad \text{où } t_{L/K}(m) = \left\lfloor \frac{m + v_L(\mathcal{D}_{L/K})}{e_{L/K}} \right\rfloor. \quad (5.1.1.1)$$

(Pour tout nombre rationnel x , on a noté $[x]$ la partie entière de x .)

5.1.2 Supposons L contenue dans K^{sep} et notons $\text{Hom}_K(L, K^{\text{sep}})$ l'ensemble pointé des K -plongements de L dans K^{sep} . Pour $\gamma \in \text{Hom}_K(L, K^{\text{sep}})$, on pose [Win83, 1.1.1]

$$i_{L/K}(\gamma) = \min_{x \in \mathcal{O}_L} (v'_L(\gamma(x) - x)),$$

où v'_L est l'unique valuation de K^{sep} prolongeant v_L .

LEMME 5.1.3 [Win83, Prop. 2.2.1]. Soient L/K une extension séparable, totalement ramifiée, cyclique de degré une puissance de p et $\nu(L/K)$ le plus petit saut de ramification supérieure. Alors pour tous $x, y \in L$, on a

$$v_K(N_{L/K}(x+y) - N_{L/K}(x) - N_{L/K}(y)) \geq \min(v_L(x), v_L(y)) + \frac{p-1}{p} \nu(L/K).$$

Dém. Il suffit de traiter le cas $\min(v_L(x), v_L(y)) = 0$, qui est un cas particulier de [Win83, Prop. 2.2.1-(i)]. \square

5.1.4 Soient L/K une extension séparable, totalement ramifiée, cyclique de degré p et i le nombre de ramification inférieure. La fonction d'Herbrand ψ de L/K , est donnée par [Ser68a, Ch.V §3]

$$\psi(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x \leq i; \\ i + p(x - i) & \text{si } x \geq i. \end{cases}$$

Donc i est aussi le saut (unique) de la ramification supérieure de L/K . Quand il n'y a aucun risque de confusion, on laissera tomber les indices L/K dans la notation $N_{L/K}$. Pour tout entier $c \geq 0$, suivant les notations de (2.17), on a, cf. [loc. cit. Prop. 4],

$$N(U_L(\psi(c))) \subseteq U_K(c) \quad \text{et} \quad N(U_L(\psi(c) + 1)) \subseteq U_K(c + 1).$$

On en déduit un homomorphisme

$$N(c): U_L(\psi(c))/U_L(\psi(c) + 1) \longrightarrow U_K(c)/U_K(c + 1).$$

Pour $c < i$, $N(c)$ est un isomorphisme de $U_L(c)/U_L(c + 1)$ vers $U_K(c)/U_K(c + 1)$, cf. [loc. cit. Cor. 1-2 de Prop. 5]. Par conséquent, pour tout $c \leq i$, la norme induit un isomorphisme [loc. cit. Cor. 6 de Prop. 5]

$$\mathcal{O}_L^*/U_L(c) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_K^*/U_K(c). \quad (5.1.4.1)$$

On a $v_L(\mathcal{D}_{L/K}) = (i+1)(p-1)$, cf. [*loc. cit.* Lemme 3]. Donc, compte tenu de (5.1.1.1), on obtient

$$e_K := v_K(p) = v_K(\mathrm{tr}_{L/K}(1)) \geq \left\lceil \frac{(i+1)(p-1)}{p} \right\rceil \geq \frac{p-1}{p}i. \quad (5.1.4.2)$$

5.1.5 On supposera désormais K une extension finie de \mathbb{Q}_p . On désignera par K_∞/K une \mathbb{Z}_p -extension ramifiée, i.e. une extension galoisienne ramifiée de groupe de Galois Γ isomorphe à \mathbb{Z}_p . Comme tout sous-groupe non-trivial de \mathbb{Z}_p est d'indice fini, l'extension maximale non-ramifiée K_0 de K dans K_∞ est finie. Pour $r \geq 0$, on note K_r l'unique extension de K_0 dans K_∞ de degré p^r , $1_r : K_r^* \rightarrow C^*$ le quasi-caractère trivial et on pose $\mathcal{O}_r = \mathcal{O}_{K_r}$, $\mathfrak{m}_r = \mathfrak{m}_{K_r}$, $U_r = U_{K_r}$.

L'extension K_∞/K est arithmétiquement profinie dans le sens que pour tout nombre réel u , le sous-groupe de ramification supérieur Γ^u de Γ est d'indice fini. On peut alors définir une fonction de Herbrand, $\Psi_{K_\infty/K}$, par la formule [Win83, 1.2.1]

$$\Psi_{K_\infty/K}(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x \leq 0; \\ \int_0^x |\Gamma^0 : \Gamma^\nu| d\nu & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On note $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite strictement croissante des nombres de ramification supérieure de l'extension K_∞/K_0 . Ce sont des entiers par le théorème de Hasse-Arf. On définit la suite $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des nombres de ramification inférieure de l'extension K_∞/K , en posant $i_n = \Psi_{K_\infty/K}(\nu_n)$. C'est une suite strictement croissante d'entiers. Pour tout $r > 0$, i_0, \dots, i_{r-1} sont les nombres de ramification inférieure de l'extension K_r/K_0 ; en particulier, i_r est le nombre de ramification (inférieure) de K_{r+1}/K_r .

5.1.6 Soit E_K le corps des normes associé à l'extension K_∞/K , cf. [Win83, §2]. C'est un corps de caractéristique p , complet pour une valuation discrète. Son corps résiduel est canoniquement isomorphe à celui de K_0 ; on note q_0 son cardinal. On rappelle qu'en tant qu'ensembles, $E_K = \varprojlim_r K_r$, la limite étant prise suivant les applications normes. Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E_K , l'addition et la multiplication sont définies par

$$x + y = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \text{où } z_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} N_{K_m/K_n}(x_m + y_m),$$

$$xy = (x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Pour $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_K^*$, $v_{E_K}(y) = v_{K_n}(y_n)$, pour tout $n \geq 0$.

5.1.7 Dans la suite de cette section, par extension algébrique de K , on sous-entend une extension de K contenue dans K^{sep} . Pour des extensions algébriques L et F de K , on notera $L \cdot F$ la plus petite extension de K contenant L et F . Pour toute extension finie L de K on posera $L_\infty = K_\infty \cdot L$; c'est une \mathbb{Z}_p -extension de L et le corps des normes E_L de L_∞/L est une extension séparable finie de E_K . La formation du corps des normes est fonctorielle et la limite inductive de E_L , pour L variant parmi les extensions finies de K , est une clôture séparable de E_K , qui sera notée E_K^{sep} . Le groupe de Galois G_K agit par fonctorialité sur E_K^{sep} , identifiant $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty)$ au groupe de Galois de E_K^{sep} sur E_K . Pour tout r assez grand (il suffit que K_r contienne $L \cap K_\infty$), la restriction induit une bijection d'ensembles pointés $\mathrm{Hom}_{K_{r+1}}(L \cdot K_{r+1}, K^{\mathrm{sep}}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{K_r}(L \cdot K_r, K^{\mathrm{sep}})$. On en déduit, par fonctorialité, une bijection d'ensembles pointés

$$f_r : \mathrm{Hom}_{E_K}(E_L, E_K^{\mathrm{sep}}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{K_r}(L \cdot K_r, K^{\mathrm{sep}}). \quad (5.1.7.1)$$

Si de plus L/K est galoisienne, alors ces bijections sont des isomorphismes de groupes et pour tout $\gamma \in \text{Gal}(E_L/E_K)$, on a

$$N_{L \cdot K_{r+1}/L \cdot K_r} \circ f_{r+1}(\gamma) = f_r(\gamma) \circ N_{L \cdot K_{r+1}/L \cdot K_r}. \quad (5.1.7.2)$$

LEMME 5.1.8 [Win83, 3.3.2]. *Soient L une extension finie de K et $\gamma: E_L \hookrightarrow E_K^{\text{sep}}$ un E_K -plongement. Alors*

$$i_{E_L/E_K}(\gamma) = \lim_{r \rightarrow +\infty} i_{L \cdot K_r/K_r}(f_r(\gamma)).$$

5.1.9 L'extension finie L/K est dite *admissible* (par rapport à K_∞) si $L \cap K_\infty = K$ et si $L \cdot K_0$ est l'extension maximale non-ramifiée de L dans L_∞ . Dans ce cas, pour tout $r \geq 0$, $L \cdot K_r = L_r$. On remarque que, quitte à remplacer L et K par des extensions finies contenues respectivement dans L_∞ et K_∞ , on peut toujours supposer l'extension L/K admissible.

5.1.10 Pour tout entiers $c, r \geq 0$ tels que $i_r \geq c$, on a un morphisme de suites exactes courtes induit par la norme (5.1.4),

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{1} & \longrightarrow & U_{r+1}(c) & \longrightarrow & K_{r+1}^* & \longrightarrow & K_{r+1}^*/U_{r+1}(c) \longrightarrow \mathbf{1} \\ & & \downarrow N & & \downarrow N & & \downarrow \\ \mathbf{1} & \longrightarrow & U_r(c) & \longrightarrow & K_r^* & \longrightarrow & K_r^*/U_r(c) \longrightarrow \mathbf{1} \end{array}$$

Pour c fixé et r variable, ces diagrammes définissent une suite exacte courte de systèmes projectifs. Par passage à la limite, on obtient la suite exacte

$$\mathbf{1} \longrightarrow \varprojlim_{i_r \geq c} U_r(c) \longrightarrow \varprojlim_{i_r \geq c} K_r^* \longrightarrow \varprojlim_{i_r \geq c} K_r^*/U_r(c). \quad (5.1.10.1)$$

De façon analogue, on dispose de la suite exacte courte de systèmes projectifs :

$$\mathbf{1} \longrightarrow (U_r(c+1))_{i_r > c} \longrightarrow (U_r(c))_{i_r > c} \longrightarrow (U_r(c)/U_r(c+1))_{i_r > c} \longrightarrow \mathbf{1},$$

les morphismes de transition étant induits par la norme. Par passage à la limite, on obtient la suite exacte

$$\mathbf{1} \longrightarrow \varprojlim_{i_r > c} U_r(c+1) \longrightarrow \varprojlim_{i_r > c} U_r(c) \longrightarrow \varprojlim_{i_r > c} U_r(c)/U_r(c+1). \quad (5.1.10.2)$$

LEMME 5.1.11. *Soit $c \geq 0$ un entier.*

(1) *La limite projective $\varprojlim_{i_r \geq c} U_r(c)$ est canoniquement isomorphe à $U_{E_K}(c)$.*

(2) *Le système projectif $(K_r^*/U_r(c))_{i_r \geq c}$ est constant, i.e. les applications de transition sont des isomorphismes. La suite (5.1.10.1) est exacte à droite et s'identifie à*

$$\mathbf{1} \longrightarrow U_{E_K}(c) \longrightarrow E_K^* \longrightarrow E_K^*/U_{E_K}(c) \longrightarrow \mathbf{1}.$$

(3) *Le système projectif $(U_r(c)/U_r(c+1))_{i_r > c}$ est constant. La suite (5.1.10.2) est exacte à droite et s'identifie à*

$$\mathbf{1} \longrightarrow U_{E_K}(c+1) \longrightarrow U_{E_K}(c) \longrightarrow U_{E_K}(c)/U_{E_K}(c+1) \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Dém. En tant que groupes, $E_K^* = \varprojlim_{r \in \mathbb{N}} K_r^*$, cf. (5.1.6). Montrons (1). Par fonctorialité, on a un monomorphisme canonique $\varprojlim_{i_r \geq c} U_r(c) \hookrightarrow U_{E_K}(c)$. Montrons qu'il est surjectif. C'est évident si $c = 0$.

Supposons $c > 0$. Soient $x = (x_r)_{r \in \mathbb{N}} \in U_{E_K}(c)$, et $y = (y_r)_{r \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{m}_{E_K}^c$, tels que $x = 1 + y$. Pour tout entier $r \geq 0$,

$$v_{K_r}(x_r - 1) = v_{K_r} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} N_{K_n/K_r}(1 + y_n) - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{K_r}(N_{K_n/K_r}(1 + y_n) - 1).$$

Appliquant le lemme 5.1.3, compte tenu que $\nu(K_n/K_r) = \nu(K_{r+1}/K_r) = \nu_r$ tend vers l'infini avec r , on voit qu'il existe un entier s , tel que pour tout $n \geq r \geq s$, on a $v_{K_r}(N_{K_n/K_r}(1 + y_n) - 1) = v_{K_r}(y_r) = v_{E_K}(y) \geq c$. Donc pour tout $r \geq s$, $x_r \in U_r(c)$, et par (5.1.4), cela vaut aussi pour tout r tel que $i_r \geq c$. D'où $x \in \varprojlim_{i_r \geq c} U_r(c)$ et l'assertion est démontrée. Montrons (2). On remarque d'abord que le système

$(U_r(c))_{i_r \geq c}$ ne vérifie pas la condition de Mittag-Leffler; donc l'exactitude à droite de (5.1.10.1) n'est pas une conséquence du critère usuel [EGA, III 0.13.2]. Comme la suite (5.1.10.1) est exacte, on obtient par (1), un monomorphisme $E_K^*/U_{E_K}(c) \hookrightarrow \varprojlim_{i_r \geq c} K_r^*/U_r(c)$. Supposons d'abord $c = 0$. Pour

tout r , la valuation v_{K_r} induit un isomorphisme de $K_r^*/U_r(0)$ sur \mathbb{Z} et les applications de transitions induisent l'identité de \mathbb{Z} . D'où un monomorphisme $E_K^*/U(0) \hookrightarrow \mathbb{Z}$, qui est un isomorphisme car la classe d'une uniformisante est envoyée sur 1. Ceci montre (2) dans le cas $c = 0$. Supposons $c \geq 1$. Les applications normes induisent, pour tout entier r tel que $i_r \geq c$, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{1} & \longrightarrow & U_{r+1}(0)/U_{r+1}(c) & \longrightarrow & K_{r+1}^*/U_{r+1}(c) & \longrightarrow & K_{r+1}^*/U_{r+1}(0) \longrightarrow \mathbf{1} \\ & & \downarrow N' & & \downarrow N & & \downarrow N'' \\ \mathbf{1} & \longrightarrow & U_r(0)/U_r(c) & \longrightarrow & K_r^*/U_r(c) & \longrightarrow & K_r^*/U_r(0) \longrightarrow \mathbf{1} \end{array}$$

On vient de voir que N'' est un isomorphisme. Comme $i_r \geq c$, N' est un isomorphisme, cf. (5.1.4). Il est alors de même pour N et le système projectif $(K_r^*/U_r(c))_{i_r \geq c}$ est constant. Pour r tel que $i_r \geq c$, on note pr_r le monomorphisme composée

$$\text{pr}_r : E_K^*/U_{E_K}(c) \hookrightarrow \varprojlim_{i_r \geq c} K_r^*/U_r(c) \xrightarrow{\sim} K_r^*/U_r(c).$$

La restriction de pr_r à $U_{E_K}(0)/U_{E_K}(c)$ se factorise par $U_r(0)/U_r(c) \subset K_r^*/U_r(c)$; on en déduit le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & U_{E_K}(0)/U_{E_K}(c) & \longrightarrow & E_K^*/U_{E_K}(c) & \longrightarrow & E_K^*/U_{E_K}(0) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \text{pr}_r & & \downarrow \wr \\ 0 & \longrightarrow & U_r(0)/U_r(c) & \longrightarrow & K_r^*/U_r(c) & \longrightarrow & K_r^*/U_r(0) \longrightarrow 0 \end{array}$$

On a démontré que la flèche de droite est un isomorphisme (cas $c = 0$). Celle de gauche l'est aussi, car elle est injective et les deux groupes sont finis de même cardinal égal à $(q_0 - 1)q_0^{c-1}$. Donc l'application du milieu est un isomorphisme et on a démontré l'assertion (2). La démonstration de (3) est analogue à celle de (2). \square

5.2 Tours admissibles de caractères additifs

5.2.1 Conservons les hypothèses de (5.1.5) et considérons un corps C algébriquement clos de caractéristique 0. Il sera commode de noter j_r le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{p-1}{p}i_r$; on appelle $(j_r)_{r \in \mathbb{N}}$ la suite des nombres de ramification inférieure *modifiée* de K_∞/K .

Soient $n \leq -d$ et $r \geq 0$ des entiers. Le groupe $\mathfrak{m}_r^n/\mathfrak{m}_r^{-d}$ est fini d'ordre q_0^{-n-d} . Si $j_r \geq -n - d$, alors il est annulé par p . En effet, par (5.1.4.2), $e_{K_r} \geq -n - d$; d'où pour tout $x \in \mathfrak{m}_r^n$, $px \in \mathfrak{m}_r^{-d}$. De plus, sous les mêmes hypothèses, il résulte de (5.1.3) que la norme $N_{K_{r+1}/K_r} : K_{r+1} \rightarrow K_r$ induit un homomorphisme de groupes

$$N : \mathfrak{m}_{r+1}^n/\mathfrak{m}_{r+1}^{-d} \longrightarrow \mathfrak{m}_r^n/\mathfrak{m}_r^{-d}. \quad (5.2.1.1)$$

En effet N est un isomorphisme car il est injectif, compte tenu que $v_{K_{r+1}} = v_{K_r} \circ N_{K_{r+1}/K_r}$, et les groupes sont finis de même cardinal.

Soit $\psi: K \rightarrow C^*$ un caractère additif d'ordre d . On note $\bar{\psi}: K/\mathfrak{m}_K^{-d} \rightarrow C^*$ sa réduction (si $d = +\infty$, on pose $\mathfrak{m}_K^{-d} = K$). Par abus, on notera encore $\bar{\psi}$ la restriction de $\bar{\psi}$ à $\mathfrak{m}_K^n/\mathfrak{m}_K^{-d}$ pour tout $n \leq -d$. Si $j_r \geq -n - d$, on a $\bar{\psi}_r(\mathfrak{m}_r^n/\mathfrak{m}_r^{-d}) \subseteq \mu_p(C)$.

DÉFINITION 5.2.2. On dit qu'une suite $(\psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$ de caractères additifs $\psi_r: K_r \rightarrow C^*$ est une *tour admissible* si elle vérifie les conditions suivantes :

- i) il existe un entier $s \geq 0$, tel que pour tout $r \geq s$, $d(\psi_r) = d(\psi_s) = d$;
- ii) pour tout $n \leq -d$ et $r \geq s$ tels que $j_r \geq -n - d$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{m}_{r+1}^n/\mathfrak{m}_{r+1}^{-d} & \xrightarrow{\bar{\psi}_{r+1}} & \mu_p(C) \\ N \downarrow \wr & & \parallel \\ \mathfrak{m}_r^n/\mathfrak{m}_r^{-d} & \xrightarrow{\bar{\psi}_r} & \mu_p(C) \end{array}$$

est commutatif. On appelle d l'ordre de la tour.

Remarque 5.2.3. Il est clairement suffisant de vérifier la condition 5.2.2-ii) pour tout $r \geq s$ et $n = -j_r - d$.

DÉFINITION 5.2.4. Soit $(\psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$ une tour admissible d'ordre d . On lui associe un caractère additif $\psi_\infty: \mathbf{E}_K \rightarrow \mu_p(C)$ d'ordre d comme suit. Soit $x = (x_r)_{r \in \mathbb{N}} \in \mathbf{E}_K$, où $x_r \in K_r$. On pose

$$\psi_\infty(x) = \psi_r(x_r), \quad \text{pour } r \geq s \text{ tel que } j_r \geq -v_{\mathbf{E}_K}(x) - d.$$

Par la définition d'une tour admissible, $\psi_r(x_r)$ appartient à $\mu_p(C)$ et ne dépend pas de r . On vérifie immédiatement que ψ_∞ est un caractère additif d'ordre d . On l'appelle la *limite de la tour* $(\psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$.

PROPOSITION 5.2.5. Soient s un entier positif, $\psi: K_s \rightarrow C^*$ et $\theta: \mathbf{E}_K \rightarrow \mu_p(C)$ des caractères additifs de même ordre d . Alors il existe une tour admissible $(\psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$ telle que $\psi_\infty = \theta$, $\psi_s = \psi$, et pour tout $r \geq s$, $d(\psi_r) = d$.

Dém. Comme ψ et θ ont même ordre, si l'un de deux est trivial l'autre aussi et dans ce cas l'énoncé est évident. Supposons ψ et θ non-triviaux. On prouve d'abord qu'il suffit de construire une tour admissible $(\psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$ telle que $\psi_s = \psi$, et pour tout $r \geq s$, $d(\psi_r) = d$. En effet, si $(\psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$ est une telle tour, par (2.6) il existe $a = (a_r)_{r \in \mathbb{N}} \in \mathbf{E}_K$ tel que $\theta(x) = \psi_\infty(ax)$. Comme ψ_∞ et θ ont le même ordre, a appartient à $\mathcal{O}_{\mathbf{E}_K}^*$ et par conséquent, $a_r \in \mathcal{O}_r^*$, pour tout $r \in \mathbb{N}$. On considère la tour $(\psi'_r)_{r \in \mathbb{N}}$, définie par

$$\psi'_r(x) = \begin{cases} \psi_r(x) & \text{si } 0 \leq r \leq s; \\ \psi_r(a_r x) & \text{si } r > s. \end{cases}$$

Par construction $(\psi'_r)_{r \in \mathbb{N}}$ est la tour admissible recherchée.

Il reste à construire la tour admissible $(\psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$. On procède par récurrence sur r . On choisit d'abord, pour tout entier $r \geq 0$, une base $\phi_r \in \text{Hom}_c(K_r, C^*)$, telle que $\phi_s = \psi$ et que pour tout $r \geq s$, ϕ_r ait ordre d ; c'est toujours possible par (2.9). Pour tout $0 \leq r \leq s$, on peut prendre $\psi_r = \phi_r$, la condition 5.2.2-ii) étant vide. On suppose donnée, pour $h \geq s$, une tour finie $(\psi_i)_{0 \leq i \leq h}$, avec $\psi_s = \psi$, $d(\psi_i) = d$ pour $s \leq i \leq h$, et satisfaisant à la condition 5.2.2-ii); on doit définir un caractère additif ψ_{h+1} d'ordre d tel que la condition 5.2.2-ii) soit vérifiée pour $r = h$ et $n = -j_h - d$, cf. (5.2.3). Avec les notations de (5.2.1), il faut que la restriction de $\bar{\psi}_{h+1}$ à $\mathfrak{m}_{h+1}^{-j_h-d}/\mathfrak{m}_{h+1}^{-d}$, se factorise

comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{m}_{h+1}^{-j_h-d}/\mathfrak{m}_{h+1}^{-d} & \xrightarrow{\bar{\psi}_{h+1}} & \mu_p(C) \\ N \downarrow \wr & & \parallel \\ \mathfrak{m}_h^{-j_h-d}/\mathfrak{m}_h^{-d} & \xrightarrow{\bar{\psi}_h} & \mu_p(C) \end{array}$$

Soit $\bar{\eta}_{h+1} = \Phi_{-j_h-d}(\phi_{h+1})^{-1}(\bar{\psi}_h \circ N) \in \mathcal{O}_{h+1}/\mathfrak{m}_{h+1}^{j_h}$, cf. (2.9). La restriction de $\bar{\psi}_h \circ N$ à $\mathfrak{m}_{h+1}^{-d-1}/\mathfrak{m}_{h+1}^{-d}$ est non triviale car $d(\psi_h) = d$ et N induit un isomorphisme de $\mathfrak{m}_{h+1}^{-d-1}/\mathfrak{m}_{h+1}^{-d}$ vers $\mathfrak{m}_h^{-d-1}/\mathfrak{m}_h^{-d}$, cf. (5.2.1.1). On en déduit par (2.9) que $\bar{\eta}_{h+1} \in (\mathcal{O}_{h+1}/\mathfrak{m}_{h+1}^{j_h})^*$. On choisit $\eta_{h+1} \in \mathcal{O}_{h+1}^*$ relevant $\bar{\eta}_{h+1}$ et on prend $\psi_{h+1} = \Phi(\phi_{h+1})(\eta_{h+1})$. \square

PROPOSITION 5.2.6. *Soient $(\psi_r: K_r \rightarrow C^*)_{r \in \mathbb{N}}$ une tour admissible de caractères additifs et L/K une extension finie admissible (5.1.9). Alors la suite de caractères additifs $(\phi_r = \psi_r \circ \text{tr}_{L_r/K_r})_{r \in \mathbb{N}}$ est une tour admissible et $\phi_\infty = \psi_\infty \circ \text{tr}_{E_L/E_K}$.*

Dém. On note \mathfrak{n} (resp. \mathfrak{n}_r) l'idéal maximal de \mathcal{O}_L (resp. \mathcal{O}_{L_r}) et $(j_r(L_\infty/L))_{r \in \mathbb{N}}$ la suite des nombres de ramification inférieure modifiée de L_∞/L . Il résulte de (5.1.8), qu'il existe $s \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $r \geq s$, $v_{L_r}(\mathcal{D}_{L_r/K_r}) = v_{E_L}(\mathcal{D}_{E_L/E_K})$ et $e_{L_r/K_r} = e_{E_L/E_K}$. Pour tous entiers $m \leq -d$ et r assez grand, considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{n}_{r+1}^m/\mathfrak{n}_{r+1}^{-d} & \xrightarrow{\bar{\text{tr}}_{r+1}} & \mathfrak{m}_{r+1}^{t(m)}/\mathfrak{m}_{r+1}^{t(-d)} \\ N_{L_{r+1}/L_r} \downarrow & & \downarrow N_{K_{r+1}/K_r} \\ \mathfrak{n}_r^m/\mathfrak{n}_r^{-d} & \xrightarrow{\bar{\text{tr}}_r} & \mathfrak{m}_r^{t(m)}/\mathfrak{m}_r^{t(-d)} \end{array} \quad (5.2.6.1)$$

où les homomorphismes horizontaux sont induits par la trace $\text{tr}_{L/K}$, les homomorphismes verticaux sont induits par les normes et $t(m) = t_{E_L/E_K}(m)$, cf. (5.1.1.1). Montrons d'abord que (5.2.6.1) est commutatif. On note L'/K la clôture galoisienne de L/K dans K^{sep} . Quitte à remplacer L', L par des extensions finies contenues respectivement dans L'_∞, L_∞ , on peut supposer L'/L admissible, puis, quitte à remplacer K par une extensions finie contenues dans K_∞ , on peut supposer à nouveau L/K admissible ; donc $L_r = L \cdot K_r$ et $L'_r = L' \cdot L_r = L' \cdot K_r$. Le groupe $\text{Gal}(L'_{r+1}/L'_r)$ s'identifie par restriction à $\text{Gal}(L_{r+1}/L_r)$ et à $\text{Gal}(K_{r+1}/K_r)$; par conséquent la restriction de $N_{L'_{r+1}/L'_r}$ à L_{r+1} (resp. K_{r+1}) est égale à N_{L_{r+1}/L_r} (resp. N_{K_{r+1}/K_r}). On pose, pour $r \geq 0$, $\mathcal{F}_r = \text{Hom}_{K_r}(L_r, K^{\text{sep}})$ (resp. $\mathcal{F} = \text{Hom}_{E_K}(E_L, E_K^{\text{sep}})$). On rappelle qu'on dispose d'une bijection $f_r: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_r$, cf. (5.1.7.1). Soient $x \in \mathfrak{n}_{r+1}^m$ et \bar{x} sa classe dans $\mathfrak{n}_{r+1}^m/\mathfrak{n}_{r+1}^{-d}$. Si r est un entier assez grand, on a

$$\begin{aligned} N_{K_{r+1}/K_r}(\bar{\text{tr}}_{r+1}(\bar{x})) &= N_{K_{r+1}/K_r} \left(\overline{\sum_{\gamma \in \mathcal{F}} f_{r+1}(\gamma)(x)} \right) \\ &= N_{L'_{r+1}/L'_r} \left(\overline{\sum_{\gamma \in \mathcal{F}} f_{r+1}(\gamma)(x)} \right) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathcal{F}} N_{L'_{r+1}/L'_r} \left(\overline{f_{r+1}(\gamma)(x)} \right) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathcal{F}} \overline{f_r(\gamma)(N_{L'_{r+1}/L'_r}(x))} \quad (\text{par 5.1.7.2}) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathcal{F}} \overline{f_r(\gamma)(N_{L_{r+1}/L_r}(x))} = \bar{\text{tr}}_r(N_{L_{r+1}/L_r}(\bar{x})). \end{aligned}$$

Ceci montre la commutativité de (5.2.6.1).

On note \mathfrak{m}_∞ (resp. \mathfrak{n}_∞) l'idéal maximal de \mathcal{O}_{E_K} (resp. \mathcal{O}_{E_L}). Pour tout $n \leq -d$, le groupe $\mathfrak{m}_\infty^n / \mathfrak{m}_\infty^{-d}$ est la limite du système projectif $(\mathfrak{m}_r^n / \mathfrak{m}_r^{-d})_{j_r \geq -n-d}$, suivant les applications normes. Le diagramme commutatif (5.2.6.1) définit par passage à la limite un homomorphisme $\mathfrak{n}_\infty^m / \mathfrak{n}_\infty^{-d} \rightarrow \mathfrak{m}_\infty^{t(m)} / \mathfrak{m}_\infty^{t(-d)}$ qui est l'homomorphisme induit par la trace tr_{E_L/E_K} . Soit d l'ordre de la tour admissible $(\psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$. Avec les notations de (5.2.1), pour tout $n \leq -d$, l'application $\bar{\psi}_\infty : \mathfrak{m}_{E_K}^n / \mathfrak{m}_{E_K}^{-d} \rightarrow \mu_p(C)$ est la limite projective des $\bar{\psi}_r : \mathfrak{m}_r^n / \mathfrak{m}_r^{-d} \rightarrow \mu_p(C)$. Par la définition de ordre et par (5.1.1),

$$d(\phi_r) = \max \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{tr}(\mathfrak{n}_r^{-n}) \subseteq \mathfrak{m}_r^{-d(\psi_r)} \right\} = -v_{L_r} \left(\mathcal{D}_{L_r/K_r}^{-1} \mathfrak{m}_r^{-d(\psi_r)} \right).$$

Quitte à agrandir s , on a $d(\psi_r) = d$ et $d(\phi_r)$ est égal à $d_L = v_{E_L}(\mathcal{D}_{E_L/E_K}) + e_{E_L/E_K}d$. Pour conclure, il suffit de vérifier que pour $m \leq -d_L$ et $r \geq s$ tel que $j_r(L_\infty/L) \geq -m - d_L$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{n}_{r+1}^m / \mathfrak{n}_{r+1}^{-d_L} & \xrightarrow{\bar{\phi}_{r+1}} & \mu_p(C) \\ \downarrow N_{L_{r+1}/L_r} & & \parallel \\ \mathfrak{n}_r^m / \mathfrak{n}_r^{-d_L} & \xrightarrow{\bar{\phi}_r} & \mu_p(C) \end{array}$$

commute. Quitte à agrandir encore s le diagramme précédent s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \bar{\phi}_{r+1} : \mathfrak{n}_{r+1}^m / \mathfrak{n}_{r+1}^{-d_L} & \xrightarrow{\bar{\mathrm{tr}}_{r+1}} & \mathfrak{m}_{r+1}^{t(m)} / \mathfrak{m}_{r+1}^{-d} & \xrightarrow{\bar{\psi}_{r+1}} & \mu_p(C) \\ \downarrow N_{L_{r+1}/L_r} & & \downarrow N_{K_{r+1}/K_r} & & \parallel \\ \bar{\phi}_r : \mathfrak{n}_r^m / \mathfrak{n}_r^{-d_L} & \xrightarrow{\bar{\mathrm{tr}}_r} & \mathfrak{m}_r^{t(m)} / \mathfrak{m}_r^{-d} & \xrightarrow{\bar{\psi}_r} & \mu_p(C) \end{array}$$

On a déjà démontré que le carré de gauche commute et celui de droite commute par l'admissibilité de $(\psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$, ce qui achève la preuve. \square

5.3 Déformation au corps des normes

5.3.1 Conservons les hypothèses et les notations de (5.1.5) et de (5.2.1). L'image de W_{E_K} par l'isomorphisme canonique $G_{E_K} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty)$ (5.1.7) est contenue dans W_K (2.1); on la note $W(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty)$. La suite $(W_{K_r})_{r \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de sous-groupes de W_K ; leurs intersection coïncide avec $W(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty)$.

Soit $V = (V, \rho)$ une C -représentation de Weil de K . On pose, pour tout $r \geq 0$, $\rho_r = \rho|_{W_{K_r}}$, $V_r = (V, \rho_r)$. On définit une C -représentation de Weil de E_K , notée $V_\infty = (V, \rho_\infty)$, par

$$\rho_\infty : W_{E_K} \xrightarrow{\sim} W(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty) \xrightarrow{\rho|_{W(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty)}} \mathrm{GL}_C(V).$$

On appelle V_∞ la *déformation de V au corps des normes*. C'est évidemment un foncteur exact de $\mathrm{Rep}_C(W_K)$ dans $\mathrm{Rep}_C(W_{E_K})$; on note encore $\lambda \mapsto \lambda_\infty$ l'homomorphisme $\mathbf{Gr}(\mathrm{Rep}_C(W_K)) \rightarrow \mathbf{Gr}(\mathrm{Rep}_C(W_{E_K}))$ induit sur les groupes de Grothendieck. Il résulte de (5.1.8) que la suite $(\mathrm{ar}(\rho_r))_{r \in \mathbb{N}}$ est stationnaire de limite égale à $\mathrm{ar}(\rho_\infty)$; voir aussi [Mar04, 5.4 et 5.5].

Soient L/K une extension finie et V une C -représentation de Weil de L . On vérifie que

$$(\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_K} V)_\infty = \mathrm{Ind}_{W_{E_L}}^{W_{E_K}} (V_\infty)^{\oplus |L \cap K_\infty : K|}$$

En particulier, si L/K est admissible, on a $(\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_K} V)_\infty = \mathrm{Ind}_{W_{E_L}}^{W_{E_K}} (V_\infty)$.

Soient (V, ρ, N) une représentation de Weil-Deligne de K . Pour tout $r \geq 0$, on note V_r la C -représentation de Weil-Deligne (V, ρ_r, N) de K_r . On définit la déformation de (V, ρ, N) au corps des normes, notée abusivement V_∞ , comme la C -représentation de Weil-Deligne (V, ρ_∞, N) de E_K .

5.3.2 Soit $\chi: K^* \rightarrow C^*$ un quasi-caractère. Pour tout entier $r \geq 0$, on note $\chi_r = \chi \circ N_{K_r/K}$ et $\chi_\infty: E_K^* \rightarrow C^*$ le quasi-caractère défini par $\chi_\infty((x_r)_{r \in \mathbb{N}}) = \chi_r(x_r) = \chi_0(x_0)$. Soit $V(\chi)$ (resp. $V(\chi_r)$, resp. $V(\chi_\infty)$) la C -représentation de Weil de K (resp. K_r , resp. E_K) de rang 1 associée à χ (resp. χ_r , resp. χ_∞). On a alors $V(\chi)_\infty = V(\chi_\infty)$ et $V(\chi)_r = V(\chi_r)$, pour tout $r \geq 0$. On en déduit que la suite $(\text{ar}(\chi_r))_{r \in \mathbb{N}}$ est stationnaire de limite égale à $\text{ar}(\chi_\infty)$. On note c la partie entière de $\frac{\text{ar}(\chi_\infty)}{2}$ et $c^+ = \text{ar}(\chi_\infty) - c$, de sorte que $c^+ = c$ si $\text{ar}(\chi_\infty)$ est pair et $c^+ = c + 1$ sinon.

LEMME 5.3.3. Soient $\chi: K^* \rightarrow C^*$ un quasi-caractère, $(\psi_r: K_r \rightarrow C^*)_{r \in \mathbb{N}}$ une tour admissible d'ordre d de caractères additifs non-triviaux et, pour $r \geq 0$, $a_r \in K_r$ une ψ_r -jauge de χ_r (2.17). Il existe alors un entier $s \geq 0$ tel que pour $r \geq s$,

$$\begin{aligned} \frac{N(a_{r+1})}{a_r} &\in U_r(c) \\ N(a_{r+1}) - a_r &\in \mathfrak{m}_r^{-d-c^+} \end{aligned}$$

où on a noté N la norme $N_{K_{r+1}/K_r}: K_{r+1} \rightarrow K_r$.

Dém. Pour tout entier $r \geq 0$, on choisit une uniformisante π_r de \mathcal{O}_r telle que $N(\pi_{r+1}) = \pi_r$. Soit s tel que pour $r \geq s$, $\text{ar}(\chi_r)$ et $d(\psi_r)$ soient constants. Si $\text{ar}(\chi_s) = 0$, alors, pour $r \geq s$, π_r^{-d} est une ψ_r -jauge de χ_r et le lemme est évident. On suppose $\text{ar}(\chi_s) > 0$. On déduit la première équation de la deuxième en divisant par a_r . Si $y \in \mathcal{O}_{r+1}$, alors $v_{K_r}(N(1+y) - 1 - N(y)) \geq j_r$, cf. (5.1.3). Donc pour $r \geq s$, tel que $j_r \geq \text{ar}(\chi_r) = c + c^+$, et pour $y \in \mathcal{O}_{r+1}$ de valuation $v_{K_{r+1}}(y) \geq c^+ > 0$, on a

$$\begin{aligned} \psi_{r+1}(a_{r+1}y) &= \chi_{r+1}(1+y) = \chi_r(N(1+y)) \\ &= \chi_r \left(1 + \frac{N(1+y) - 1 - N(y)}{1 + N(y)} \right) \chi_r(1 + N(y)) \\ &= \chi_r(1 + N(y)) \\ &= \psi_r(a_r N(y)). \end{aligned}$$

Par définition de tour admissible, pour r et y comme ci-dessus, on a

$$\psi_{r+1}(a_{r+1}y) = \psi_r(N(a_{r+1})N(y)).$$

Donc, quitte à agrandir s , pour tout $r \geq s$ et tout $y \in \mathcal{O}_{r+1}$ de valuation $v_{K_{r+1}}(y) \geq c^+$, on a $\psi_r((a_r - N(a_{r+1}))N(y)) = 1$. Pour conclure il suffit de prouver que

$$\psi_r((a_r - N(a_{r+1}))\mathfrak{m}_r^{c^+}) = \{1\}.$$

Soit $z \in \mathfrak{m}_r^{c^+}$. On pose $m = v_{K_r}(z)$ et $z = \alpha \pi_r^m$, où $\alpha \in \mathcal{O}_r^*$. Par (5.1.4.1), il existe $\beta \in \mathcal{O}_{r+1}^*$ tel que $N(\beta) = \alpha(1+u)$, avec $u \in \mathfrak{m}_r^{i_r}$. Si on prend $y = \beta \pi_{r+1}^m$, alors $N(y) = N(\beta \pi_{r+1}^m) = z + zu$. Comme $i_r \geq j_r \geq c + c^+ > c$, alors

$$\psi_r((a_r - N(a_{r+1}))z) = \psi_r((a_r - N(a_{r+1}))N(y))\psi_r((a_r - N(a_{r+1}))zu)^{-1} = 1.$$

□

PROPOSITION 5.3.4. Soient $\chi: K \rightarrow C^*$ un quasi-caractère et $(\psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$ une tour admissible de caractères additifs non-triviaux. Alors il existe un entier positif s tel que pour tout $r \geq s$, on a

$$\varepsilon([\chi_r] - [1_r], \psi_r) = \varepsilon([\chi_\infty] - [1_{E_K}], \psi_\infty).$$

Dém. Soit s tel que pour $r \geq s$, $\text{ar}(\chi_r)$ et $d(\psi_r)$ soient constants. L'énoncé est évident si χ_s est non ramifié. Pour tout $r \geq s$, soit $a_r \in K_r$ une ψ_r -jauge de χ_r ; la classe \bar{a}_r de a_r dans $K_r^*/U_r(c)$ est uniquement déterminée (2.17). Par le lemme 5.3.3, quitte à agrandir s , on a, pour $r \geq s$, $N(\bar{a}_{r+1}) = \bar{a}_r$. On en déduit par (5.1.11-2), un élément $\bar{a}_\infty = (\bar{a}_r)_{r \geq s} \in E_K^*/U_{E_K}(c)$. Soit $a_\infty \in E_K^*$ un relèvement de \bar{a}_∞ . Montrons que a_∞ est une ψ_∞ -jauge de χ_∞ . D'après (2.17), on peut supposer

que $a_r = (a_\infty)_r$; pour tout $r \geq s$, a_r est une ψ_r -jauge de χ_r et $N(a_{r+1}) = a_r$. Soit $y = (y_r)_{r \in \mathbb{N}} \in \mathbb{E}_K$, de valuation $v_{\mathbb{E}_K}(y) \geq c^+$. On a,

$$\chi_\infty(1+y) = \chi_0((1+y)_0) = \chi_0\left(\lim_{r \rightarrow +\infty} N_{K_r/K_0}(1+y_r)\right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \chi_r(1+y_r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \psi_r(a_r y_r).$$

Comme $N(a_{r+1}y_{r+1}) = a_r y_r$, $\psi_r(a_r y_r)$ est constant égal à $\psi_\infty(a_\infty y)$, cf. (5.2.4). Par (2.18), on a

$$\varepsilon([\chi_\infty] - [1_{\mathbb{E}_K}], \psi_\infty) = q_0^c \sum_{\bar{\beta} \in U(c)/U(c^+)} \frac{\psi_\infty(a_\infty \bar{\beta})}{\chi_\infty(a_\infty \bar{\beta})},$$

où $U(c)/U(c^+)$ désigne $U_{\mathbb{E}_K}(c)/U_{\mathbb{E}_K}(c^+)$ et β est un relèvement de $\bar{\beta}$. En vertu de (5.1.11-3), pour tout r assez grand, l'application $U_{\mathbb{E}_K}(c)/U_{\mathbb{E}_K}(c^+) \rightarrow U_r(c)/U_r(c^+)$, $\bar{\beta} \mapsto \bar{\beta}_r$ est un isomorphisme et comme $\psi_\infty(a_\infty \beta) \chi_\infty(a_\infty \beta)^{-1} = \psi_r(a_r \beta_r) \chi_r(a_r \beta_r)^{-1}$, la proposition s'en suit. \square

On note C la C -représentation de Weil triviale de rang 1.

THÉORÈME 5.3.5. *Soient $V = (V, \rho) \in \text{Rep}_C(W_K)$ et $(\psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$ une tour admissible de caractères additifs non-triviaux. Alors il existe s tel que pour tout $r \geq s$, on a*

$$\varepsilon([V_r] - \dim V[C], \psi_r) = \varepsilon([V_\infty] - \dim V[C], \psi_\infty).$$

Dém. On peut supposer V irréductible. Par (2.3), C étant algébriquement clos, on a $\rho = \rho' \otimes \gamma$, où $\rho' : W_K \rightarrow \text{GL}_C(V)$ est une représentation qui se factorise par un quotient fini et $\gamma : W_K \rightarrow C^*$ est un caractère non-ramifié. On pose $V' = (V, \rho')$. On se donne, pour tout $r \geq 0$, un Frobenius géométrique F_r^* de W_{K_r} et un Frobenius géométrique de $W_{\mathbb{E}_K}$, qu'on note F_∞^* . En appliquant (2.19-2), on obtient

$$\varepsilon([V_r] - \dim V[C], \psi_r) = \gamma_r(F_r^{*(\text{ar}(\rho'_r) + d(\psi_r) \dim V)}) \varepsilon([V'_r] - \dim V[C], \psi_r),$$

Par (5.3.1) la suite $(\text{ar}(\rho'_r))_{r \in \mathbb{N}}$ est stationnaire de limite égale à $\text{ar}(\rho'_\infty)$. Par définition la suite $(d(\psi_r))_{r \in \mathbb{N}}$ (resp. $(\gamma(F_r^*))_{r \in \mathbb{N}}$) est stationnaire (resp. constante) de limite égale à $d(\psi_\infty)$ (resp. $\gamma_\infty(F_\infty^*)$). Donc, quitte à changer les notations, on peut supposer que $\rho : W_K \rightarrow \text{GL}_C(V)$ se factorise par un quotient fini G . Par le théorème d'induction de Brauer [De73, Prop.1.5], on écrit

$$[V] - \dim V[C] = \sum_{H \leq G, V_H} n(V_H) \text{Ind}_H^G([V_H] - [C]),$$

où H (resp. V_H) varie parmi les sous-groupes de G (resp. les C -représentations de H de rang 1) et les $n(V_H)$ sont des entiers. Par linéarité du facteur epsilon, on est ramené à démontrer le théorème pour les représentations virtuelles de la forme $\text{Ind}_{W_L}^{W_K}([V] - [C])$, où L est une extension finie de K et V est une C -représentation de Weil de L , de rang 1, qui se factorise par un quotient fini H de W_L . Comme on s'intéresse à la restriction de $\text{Ind}_{W_L}^{W_K}([V] - [C])$ à W_{K_r} pour r assez grand, quitte à remplacer K par une extension finie dans K_∞ , on peut supposer $L \cap K_\infty = K$. On vérifie que

$$\text{Res}_{W_K}^{W_{K_r}} \text{Ind}_{W_L}^{W_K}([V] - [C]) = \text{Ind}_{W_{L \cdot K_r}}^{W_{K_r}} \text{Res}_{W_L}^{W_{L \cdot K_r}}([V] - [C]),$$

en utilisant le cas particulier suivant du théorème de Mackey :

LEMME 5.3.6 [Isa94, Ch.5, Pr.(5.2)]. *Soient G un groupe fini, $H \leq G$ et V une C -représentation de H . Si $S \leq G$ tel que $HS = G$, alors $\text{Res}_G^S \text{Ind}_H^G V = \text{Ind}_{S \cap H}^S \text{Res}_H^{S \cap H} V$.*

D'où, par 2.14-(2),

$$\begin{aligned} \varepsilon(\text{Res}_{W_K}^{W_{K_r}} \text{Ind}_{W_L}^{W_K}([V] - [C]), \psi_r) &= \varepsilon(\text{Ind}_{W_{L \cdot K_r}}^{W_{K_r}} \text{Res}_{W_L}^{W_{L \cdot K_r}}([V] - [C]), \psi_r) \\ &= \varepsilon(\text{Res}_{W_L}^{W_{L \cdot K_r}}([V] - [C]), \psi_r \circ \text{tr}_{L \cdot K_r/K_r}). \end{aligned}$$

On note $\chi : L^* \rightarrow C^*$ le quasi-caractère associé à V . Quitte à remplacer L et K par une extension finie contenue respectivement dans L_∞ et K_∞ , on peut supposer L/K admissible (5.1.9), donc

$L \cdot K_r = L_r$. Avec les notations de (5.3.2), on a

$$\varepsilon(\text{Res}_{W_L}^{W_{L_r}}([V] - [C]), \psi_r \circ \text{tr}_{L_r/K_r}) = \varepsilon([\chi_r] - [1_r], \psi_r \circ \text{tr}_{L_r/K_r}).$$

Par 5.2.6 et 5.3.4, il existe un $s \in \mathbb{N}$, tel que pour $r \geq s$, on a

$$\varepsilon([\chi_r] - [1_r], \psi_r \circ \text{tr}_{L_r/K_r}) = \varepsilon([\chi_\infty] - [1_{E_L}], \psi_\infty \circ \text{tr}_{E_L/E_K}).$$

On note $V(\chi_\infty)$ la C -représentation de Weil de E_L de rang 1, associée à χ_∞ . Par (2.14), on a

$$\varepsilon([\chi_\infty] - [1_{E_L}], \psi_\infty \circ \text{tr}_{E_L/E_K}) = \varepsilon(\text{Ind}_{W_{E_L}}^{W_{E_K}}([V(\chi_\infty)] - [C]), \psi_\infty),$$

et par (5.3.1), $\text{Ind}_{W_{E_L}}^{W_{E_K}}([V(\chi_\infty)] - [C]) = \left(\text{Ind}_{W_L}^{W_K}([V] - [C])\right)_\infty$, ce qui achève la preuve. \square

5.3.7 Pour toute mesure de Haar ν_∞ sur E_K , on note ν_r l'unique mesure de Haar sur K_r telle que $\nu_r(\mathcal{O}_{K_r}) = \nu_\infty(\mathcal{O}_{E_K})$.

COROLLAIRE 5.3.8. Soient (V, ρ, N) une C -représentation de Weil-Deligne de K , ν_∞ une mesure de Haar sur E_K et $\theta: E_K \rightarrow \mu_p(C)$ un caractère additif non-trivial. On se donne une tour admissible de caractères additifs $(\psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$ telle que $\psi_\infty = \theta$ (5.2.5). Alors il existe un entier $s \geq 0$ tel que pour tout $r \geq s$, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon(V_r, \psi_r, \nu_r) &= \varepsilon(V_\infty, \theta, \nu_\infty) \\ \varepsilon_0(V_r, \psi_r, \nu_r) &= \varepsilon_0(V_\infty, \theta, \nu_\infty). \end{aligned}$$

Dém. Supposons d'abord $N = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \varepsilon(V_r, \psi_r, \nu_r) &= \varepsilon([V_r] - \dim V[C], \psi_r) \varepsilon(C, \psi_r, \nu_r)^{\dim V} \\ &= \varepsilon([V_r] - \dim V[C], \psi_r) \nu_r(\mathcal{O}_{K_r})^{\dim V} q_0^{d(\psi_r) \dim V}. \end{aligned}$$

Par construction, $d(\psi_r)$ se stabilise à $d(\theta)$ et $\nu_r(\mathcal{O}_{K_r})$ est constant égal à $\nu_\infty(\mathcal{O}_{E_K})$. On conclut en appliquant (5.3.5). Pour le cas général, il suffit de remarquer que $\det(-\rho(F_n^*)|V^{I_{K_n}}/\text{Ker } N^{I_{K_n}})$ se stabilise en $\det(-\rho(F_\infty^*)|V^{I_{E_K}}/\text{Ker } N^{I_{E_K}})$, où F_n^* (resp. F_∞^*) désigne un Frobenius géométriques quelconque de W_{K_n} (resp. W_{E_K}). L'assertion pour ε_0 s'ensuit. \square

5.4 Applications aux représentations de de Rham

5.4.1 Dans cette sous-section, on suppose que C contienne K^{sep} . On pose $K_a = \text{Fr } W(k)$ et on note K_a^{nr} son extension maximale non-ramifiée dans K^{sep} et B_{st} l'anneau des périodes des représentations semi-stables de G_K .

Soit V une représentation galoisienne p -adique, i.e. un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G_K . On pose [Fon94a, 5.6.4]

$$D_{\text{pst}}(V) = \varinjlim_{G' \leq G_K} (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{st}})^{G'},$$

où la limite est prise sur les sous-groupes ouverts de G_K . C'est un K_a^{nr} -espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à la dimension de V sur \mathbb{Q}_p . Il est muni d'une action $\tilde{\rho}: G_K \rightarrow \text{Aut}_{K_a}(D_{\text{pst}}(V))$, semi-linéaire par rapport à l'action naturelle de G_K sur K_a^{nr} , d'une application σ -linéaire équivariante $\varphi: D_{\text{pst}}(V) \rightarrow D_{\text{pst}}(V)$ et d'un endomorphisme nilpotent équivariant N tels que $N \circ \varphi = p\varphi \circ N$.

Suivant Fontaine et Perrin-Riou [PR95, App. C.1.4], on muni $D_{\text{pst}}(V)$ d'une action linéaire ρ de W_K en posant

$$\forall w \in W_K, \quad \rho(w) = \tilde{\rho}(w)\varphi^{f\nu(w)}.$$

Le triplet $(D_{\text{pst}}(V), \rho, N)$ est une K_a^{nr} -représentation de Weil-Deligne de K qu'on note abusivement $D_{\text{pst}}(V)$.

Soient $\psi: K \rightarrow C^*$ un caractère additif non trivial et μ une mesure de Haar sur K à valeur dans C . On pose

$$\varepsilon(V, \psi, \mu) = \varepsilon(D_{\text{pst}}(V) \otimes_{K_a^{\text{nr}}} C, \psi, \mu).$$

Ces définitions prennent tout leur intérêt dans le cas d'une représentation de de Rham V où on a $\dim_{K_a^{\text{nr}}} D_{\text{pst}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

Pour tout entier $r \geq 0$, on note V_r la restriction de V à G_{K_r} . Comme, $D_{\text{pst}}(V_r) = D_{\text{pst}}(V)|_{W_{K_r}}$, on obtient par (5.3.8), le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5.4.2. *Soient V une représentation de de Rham de G_K , $D_{\text{pst}}(V)_\infty$ la déformation au corps des normes (5.3.1) de $D_{\text{pst}}(V)$, $\theta: E_K \rightarrow \mu_p(C)$ un caractère additif non-trivial et ν_∞ une mesure de Haar sur E_K à valeurs dans $K_a^{\text{nr}}(\mu_p(C))$. On se donne une tour admissible de caractères additifs $(\psi_r)_{r \in \mathbb{N}}$ telle que $\psi_\infty = \theta$, cf. (5.2.5). Alors il existe un entier positif s , tel que pour tout $r \geq s$,*

$$\begin{aligned} \varepsilon(V_r, \psi_r, \nu_r) &= \varepsilon(D_{\text{pst}}(V)_\infty \otimes_{K_a^{\text{nr}}} K_a^{\text{nr}}(\mu_p(C)), \theta, \nu_\infty), \\ \varepsilon_0(V_r, \psi_r, \nu_r) &= \varepsilon_0(D_{\text{pst}}(V)_\infty \otimes_{K_a^{\text{nr}}} K_a^{\text{nr}}(\mu_p(C)), \theta, \nu_\infty). \end{aligned}$$

COROLLAIRE 5.4.3. *Soient K_∞ la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique de K , V une représentation de de Rham de G_K , $N_{\text{dR}}(V)$ le (φ, ∇) -module de Berger associé à V [Berg02, 5.20], $\theta: E_K \rightarrow \mu_p(C)$ un caractère additif non-trivial et ν_∞ une mesure de Haar sur E_K à valeurs dans $K_a^{\text{nr}}(\mu_p(C))$. Alors, on a (3.4.4)*

$$\text{WD}(N_{\text{dR}}(V)) = D_{\text{pst}}(V)_\infty \tag{5.4.3.1}$$

$$\varepsilon(N_{\text{dR}}(V), \theta, \nu_\infty) = \varepsilon(D_{\text{pst}}(V)_\infty \otimes_{K_a^{\text{nr}}} K_a^{\text{nr}}(\mu_p(C)), \theta, \nu_\infty) \tag{5.4.3.2}$$

et de même pour ε_0 .

Dém. Dans [Mar04, pg. 430], on a noté $D_{\text{pst}}^\infty(V)$ la représentation semi-linéaire de G_{E_K} obtenue à partir de $D_{\text{pst}}(V)|_{\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K_\infty)}$ via l'isomorphisme canonique $\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K_\infty) \cong G_{E_K}$. Par [Mar04, 5.9-i)], on a $S(N_{\text{dR}}(V)) \cong D_{\text{pst}}^\infty(V)$ en tant que K_a^{nr} -modules de Deligne de E_K . En recopiant (5.4.1), on peut considérer $D_{\text{pst}}^\infty(V)$ (resp. $S(N_{\text{dR}}(V))$) comme une K_a^{nr} -représentation de Weil-Deligne de E_K ; elle est alors égale à la déformation au corps des normes $D_{\text{pst}}(V)_\infty$ de $D_{\text{pst}}(V)$ (resp. à $\text{WD}(N_{\text{dR}}(V))$), d'où (5.4.3.1). On en déduit immédiatement (5.4.3.2). \square

Remerciements

Cet article est issu d'une partie de ma thèse [Mar06, partie 2] effectuée au laboratoire LAGA de l'Université Paris 13. Je tiens ici à remercier mon directeur Ahmed Abbes, pour son encouragement, son soutien constant tout le long de ce travail et ses relectures critiques. Cet article a été mis au point au début d'un séjour à l'Université de Tokyo dans le cadre d'une bourse JSPS. Je remercie ces institutions ainsi que le professeur Takeshi Saito pour leur hospitalité.

RÉFÉRENCES

- And02 André, Y. : Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p -adique, *Invent. Math.* **148** (2002), 285–317.
- Berg02 Berger, L. : Représentations p -adiques et équations différentielles, *Invent. Math.* **148** (2002), 219–284.
- Bert96 Berthelot, P. : Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres. Première partie (version provisoire 1991). Prépublication IRMR 96-03 (1996).
- Bou70 Bourbaki, N. : *Éléments de mathématique, Algèbre*, Hermann, Paris (1970).
- ChLS99 Chiarellotto, B. et Le Stum, B. : F -isocristaux unipotents, *Comp. Math.* **116** (1999), 81–110.

- ChMe02 Christol, G. et Mebkhout, Z. : Équations différentielles p -adiques et coefficients p -adiques sur les courbes, *Astérisque* **279** (2002), 125–183.
- Cr87 Crew, R. : F -isocrystals and p -adic Representations, *Proc. Symp. Pure Math.* **46** (1987), 111–138.
- Cr98 Crew, R. : Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve, *Ann. Sci. École Norm. Sup. 4ème série*, **31** n°6 (1998), 717–763.
- Cr00 Crew, R. : Canonical extensions, irregularities, and the Swan conductor, *Math. Ann.* **316** (2000), 19–37.
- Cr04 Crew, R. : Arithmetic \mathcal{D} -modules on the unit disk, <http://www.math.ufl.edu/~crew/papers.html>, incomplete version, 7 Decembre 2004, 1–29.
- De73 Deligne, P. : Les constantes locales des équations fonctionnelles des fonctions L. Dans : *Modular functions of one variable II*, Lect. Notes in Math. **349** (1973), 501–597.
- DeHe81 Deligne, P. et Henniart, G. : Sur la variation, par torsion, des constantes locales d'équations fonctionnelles de fonctions L, *Invent. Math.* **64** (1981), 89–118.
- Et04 Etesse, J.-Y. : Introduction to L -functions of F -isocrystals. Dans : Geometric aspects of Dwork theory. Volume I, II, Walter de Gruyter GmbH & CO. KG, Berlin (2004), 701–710.
- EtLS93 Etesse, J.-Y. et Le Stum, B. : Fonctions L associées aux F -isocristaux surconvergent I. Interprétation cohomologique, *Math. Ann.* **296** (1993), 557–576.
- Fon94a Fontaine, J.-M. : Représentations p -adiques semi-stables, Dans : *Périodes p -adiques*, Astérisque **223** (1994), 113–184.
- Fon94b Fontaine, J.-M. : Représentations ℓ -adiques potentiellement semi-stables. Dans : *Périodes p -adiques*, Astérisque **223** (1994), 321–347.
- Har77 Hartshorne, R. : *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag (1977).
- Ked04 Kedlaya, S.K. : A p -adic local monodromy theorem, *Ann. of Math.* **160** (2004), 93–184.
- Kat72 Katz, N. : Travaux de Dwork, *Sem. Bourb.* **409**, (1972).
- Kat88 Katz, N. : Gauss sums, Kloosterman sums and monodromy groups, *Annals of mathematics studies* **116**, Princeton University press, Princeton, New Jersey (1988).
- Isa94 Isaacs, I.M. : *Character Theory of Finite Groups*, Dover, New York (1994).
- Lau87 Laumon, G. : Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil, *Publ. Math. de I.H.E.S.* **65** (1987), 131–210.
- Mar04 Marmora, A. : Irrégularité et conducteur de Swan p -adiques, *Documenta Math.* **9** (2004), 413–433.
- Mar06 Marmora, A. : Constantes locales p -adiques, Thèse de doctorat (26 Juin 2006), Univ. Paris 13.
- Mat95 Matsuda, S. : Local indices of p -adic differential operators corresponding to Artin-Schreier-Witt coverings, *Duke Mathematical Journal* **77**(3) (1995), 607–625.
- Mat02 Matsuda, S. : Katz Correspondence for quasi-Unipotent Overconvergent Isocrystals, *Comp. Math.* **134** (2002), 1–34.
- Meb02 Mebkhout, Z. : Analogie p -adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p -adique, *Invent. Math.* **148** (2002), 319–351.
- PR95 Perrin-Riou, B. : Fonctions L p -adiques des représentations p -adiques, *Astérisque* **229**, Soc. Math. de France, Paris (1995).
- Sen69 Sen, S. : On automorphisms of local fields, *Ann. of Math.* **90** (1969), 33–46.
- Ser67 Serre, J.-P. : *Représentations linéaires de groupes finis*, Hermann, Paris (1967).
- Ser68a Serre, J.-P. : *Corps Locaux*, deuxième édition, Hermann, Paris (1968).
- Ser68b Serre, J.-P. : *Abelian ℓ -adic representations and elliptic curves*, W.A.Benjamin, New York (1968).
- Ta67 Tate, J. : Fourier Analysis in Number Fields and Hecke's Zeta-Functions, (Thesis, 1950). Dans : *Algebraic Number Theory, Edité par Cassels, J. et Fröhlich, A.*, Academic Press (1967), 305–347.
- Ta79 Tate, J. : Number Theoretic Background, dans : *Proc. Symp. Pure Math.* **33**, partie 2 (1979), 3–26.
- Tsu98a Tsuzuki, N. : Finite local monodromy of overconvergent unit-root F -isocrystals on a curve, *Amer. J. Math.* **120** (1998), 1165–1190.

FACTEURS EPSILON p -ADIQUES

- Tsu98b Tsuzuki, N. : The local index and Swan conductor, *Comp. Math.* **111** (1998), 245–288.
- Tsu98c Tsuzuki, N. : Slope filtration of quasi-unipotent overconvergent F -isocrystals, *Ann. Inst. Four.* **48**(2) (1998), 379–412.
- Win83 Wintenberger, J.-P. : Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications, *Ann. Sci. École Norm. Sup. 4ème série*, **16** (1983), 59–89.
- EGA Dieudonné, J. et Grothendieck, A. : EGA, *Publ. Math. IHES*.
- SGA1 Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie. *Revêtements Étales et Groupe Fondamental*, dirigé par A. Grothendieck, avec la collaboration de M. Raynaud. *Soc. Math. France, Doc. Math.* **3**. Édition recomposée de *Lect. Notes in Math.* **224** (1971).

Adriano Marmora marmora@math.univ-paris13.fr
Laboratoire Analyse Géométrie et Applications (LAGA), Institut Galilée, Université Paris 13, 93430
Villetaneuse (France)

UTMS

- 2006–8 Takeshi Ohtsuka: *Motion of interfaces by the Allen-Cahn type equation with multiple-well potentials.*
- 2006–9 Yoshihiro Sawano and Tsuyoshi Yoneda: *On the Young theorem for amalgams and Besov spaces.*
- 2006–10 Takahiko Yoshida: *Twisted toric structures.*
- 2006–11 Yoshihiro Sawano, Takuya Sobukawa and Hitoshi Tanaka: *Limiting case of the boundedness of fractional integral operators on non-homogeneous space.*
- 2006–12 Yoshihiro Sawano and Hitoshi Tanaka: *Equivalent norms for the (vector-valued) Morrey spaces with non-doubling measures.*
- 2006–13 Shigeo Kusuoka and Song Liang: *A mechanical model of diffusion process for multi-particles.*
- 2006–14 Yuji Umezawa: *A Limit Theorem on Maximum Value of Hedging with a Homogeneous Filtered Value Measure.*
- 2006–15 Toshio Oshima: *Commuting differential operators with regular singularities.*
- 2006–16 Miki hirano, Taku Ishii, and Takayuki Oda: *Whittaker functions for P_J -principal series representations of $Sp(3, R)$.*
- 2006–17 Fumio Kikuchi and Xuefeng Liu: *Estimation of interpolation error constants for the P_0 and P_1 triangular finite elements.*
- 2006–18 Arif Amirov and Masahiro Yamamoto: *The timelike Cauchy problem and an inverse problem for general hyperbolic equations.*
- 2006–19 Adriano Marmora: *Facteurs epsilon p -adiques.*

The Graduate School of Mathematical Sciences was established in the University of Tokyo in April, 1992. Formerly there were two departments of mathematics in the University of Tokyo: one in the Faculty of Science and the other in the College of Arts and Sciences. All faculty members of these two departments have moved to the new graduate school, as well as several members of the Department of Pure and Applied Sciences in the College of Arts and Sciences. In January, 1993, the preprint series of the former two departments of mathematics were unified as the Preprint Series of the Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo. For the information about the preprint series, please write to the preprint series office.

ADDRESS:

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo
3–8–1 Komaba Meguro-ku, Tokyo 153-8914, JAPAN
TEL +81-3-5465-7001 FAX +81-3-5465-7012