UTMS 2001–25 August 21, 2001

Image directe supérieure et unipotence

by

Fabien Trihan

UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

Image directe supérieure et unipotence

Fabien Trihan*

* L'auteur a bénéficié du soutient de la J.S.P.S.

Mathematics Subject Classification (1991) : 14F30

Abstract. Let U/k be a smooth affine curve on an algebraically closed field of characteristic $p > 0$. We show that the higher direct image by proper smooth maps over U are overconvergent and quasi-unipotent in the sense of [5]. We deduce from this fact a p-adic formula for the Hasse-Weil L-function of an abelian variety over a function field in one variable of constants $\mathbf{F}_q$. Finally we prove (without the algebraically closed assumption on k) that any overconvergent isocrystal over U extending to some F-crystal on the compactification X endowed with the log-structure induced by the divisor $X \setminus U$ is unipotent and give then a comparison of both cohomology with compact support.

Introduction. Soient U/k une courbe affine et lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, X/k une compactification lisse de U et $f : V \to U$ un morphisme propre et lisse. En utilisant un critère de surconvergence dont l'idée initiale revient à de Jong (cf [6,5]) et grâce aux résultats (locaux) de Kedlaya ([8], [9]), nous montrons que les images directes supérieures $R^i f_* \mathcal{O}_V$ sont surconvergentes (répondant ainsi dans le cas d'une courbe affine et lisse à une conjecture de [1]) et quasi-unipotentes (au sens de [5]). En particulier, leurs groupes de cohomologie sont de dimension finie et verifient la dualité de Poincaré. On en déduit d'autre part une formule cohomologique p-adique de la fonction de Hasse-Weil d'une variété abélienne sur un corps de fonction algébrique en une variable de corps des constantes $\mathbf{F}_q$. Pour finir, nous montrons (sans supposer le corps k algébriquement clos) que si un F-isocristal $E^\dagger$ sur U provient d'un F-cristal E sur $X^\#$, le log-schéma déduit de X en considérant la log-structure associée au diviseur $X \setminus U$, alors celui-ci est unipotent et on a :

$$H^i_{rig,c}(U, E^\dagger) \simeq H^i_{cris,c}(X^\#, E) \otimes \mathbf{Q}.$$

Je tiens enfin à remercier K. Bannai, S. Matsuda, Ochiai T. et les professeur K. Kato et B. Le Stum avec lesquels j'ai pu profiter de fructueuses conversations.

(a) Notations. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p. On note W l'anneau des vecteurs de Witt de k, $\mathcal{O}$ une extension finie de W

et K(respectivement K') le corps des fractions de W (resp. $\mathcal{O}$). Pour une indéterminée T, on notera :

$\mathcal{H} = \{a = \sum_{i=0}^{-\infty} a_i T^i |\ a_i \in K',\ |a_i| \to 0\ (i \to -\infty)\}$.

$\mathcal{H}^\dagger = \{a \in \mathcal{H}|\ |a_i| r^i \to 0\ (i \to -\infty)$ pour un certain $0 < r < 1\}$.

$\mathcal{E} = \{a = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i T^i |\ a_i \in K',\ \sup_i |a_i| < \infty,\ \sum_{i=0}^{-\infty} a_i T^i \in \mathcal{H}\}$.

$\mathcal{E}^\dagger = \{a \in \mathcal{E}|\ \sum_{i=0}^{-\infty} a_i T^i \in \mathcal{H}^\dagger\}$.

$\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}^\dagger$) est un corps de valuation discrête complet (resp. un corps de valuation discrête hensélien) de corps résiduel $k((T))$. $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{E}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{H}^\dagger$ (resp. $\mathcal{E}^\dagger$) et on a :

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{E} \text{ et } \mathcal{H}^\dagger = \mathcal{E}^\dagger \cap \mathcal{H}.$$

Notons $\mathcal{R}$ l'un des anneaux $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^\dagger$, $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{E}^\dagger$. Alors $\mathcal{R}$ est muni d'un endomorphisme Frobenius σ et d'une $\mathcal{O}$-dérivation (cf [13]):

$$d : \mathcal{R} \to \omega_{\mathcal{R}} := \mathcal{R}.dT/T.$$

Rappelons ([13]) qu'un (ϕ, ∇)-module sur $\mathcal{R}$ consiste en la donnée d'un $\mathcal{R}$-module libre de rang fini $M_{\mathcal{R}}$ muni d'une connexion $\mathcal{O}$-linéaire :

$$\nabla : M_{\mathcal{R}} \to M_{\mathcal{R}} \otimes \omega_{\mathcal{R}}$$

telle que $\nabla(ax) = da \otimes x + a\nabla(x)$ pour tout $a \in \mathcal{R}$ et tout$x \in M_{\mathcal{R}}$. Le module est d'autre part muni d'un endomorphisme σ-linéaire :

$$\phi : M_{\mathcal{R}} \to M_{\mathcal{R}}$$

tel que $\phi(M_{\mathcal{R}})$ engendre $M_{\mathcal{R}}$ et :

$$(*) \quad \nabla\phi = (\sigma \otimes \phi)\nabla.$$

Quitte à choisir une base $(e = 1, ..., e_r)$ de $M_{\mathcal{R}}$, on peut associer à ∇ (resp. à ϕ) une matrice $C \in \mathcal{M}_r(\mathcal{R})$ (resp. $A \in GL_r(\mathcal{R})$) et la relation (*) est alors équivalente à :

$$(**) \quad \delta(A) + CA = \delta(\sigma(T))/\sigma(T) A \sigma(C),$$

où $\delta = T.(dT/T)$.

(b) Il existe également une interprétation géométrique des $(\phi - \nabla)$-modules. Ainsi les $(\phi - \nabla)$-modules sur $\mathcal{H}$ correspondent aux F-isocristaux convergents sur $\mathbf{P}^1_k \setminus \{0\}/K'$ et ceux-ci proviennent d'un F-isocristal surconvergent sur la même base si le $(\phi - \nabla)$-module sur $\mathcal{H}$ descend à un $(\phi - \nabla)$-module sur $\mathcal{H}^\dagger$ (cf [2,2.5]). D'autre part on a un foncteur restriction :

$$j^*_{rig} : F - Iso(\mathbf{P}^1_k \setminus \{0\}/K') \to (\phi, \nabla) - \text{modules sur } \mathcal{E},$$

qui consiste via l'interprétation précédente pour tout $(\phi - \nabla)$-module sur $\mathcal{H}$ $M_{\mathcal{H}}$ à lui associer son extension des scalaires $M_{\mathcal{H}} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{E}$.

Proposition *Soit $M_{\mathcal{H}}$ un $(\phi - \nabla)$-module sur $\mathcal{H}$. On note $M_{\mathcal{E}}$ le $(\phi - \nabla)$-module sur $\mathcal{E}$ obtenu par extension des scalaires. Alors $M_{\mathcal{H}}$ descend à $\mathcal{H}^\dagger$ si et seulement si $M_{\mathcal{E}}$ descend à $\mathcal{E}^\dagger$.*

Démonstration. L'assertion est clairement nécéssaire. Il suffit donc de montrer qu'elle est suffisante. Le $(\phi - \nabla)$-module $M_{\mathcal{H}}$ descend donc par hypothèse à un $(\phi - \nabla)$-module sur $\mathcal{E}^\dagger$ que nous notons $M_{\mathcal{E}^\dagger}$. Nous descendons tout d'abord le module $M_{\mathcal{H}}$ à $\mathcal{H}^\dagger$. Remarquons tout d'abord que la flèche canonique :

$$\mathcal{E}^\dagger \otimes_{\mathcal{H}^\dagger} \mathcal{H} \to \mathcal{E}$$

est un isomorphisme. L'injectivité est claire. D'autre part, on peut écrire tout élément $a := \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i T^i$ de $\mathcal{E}$ sous la forme $a = \sum_{-\infty}^{0} a_i T^i + \sum_{1}^{+\infty} a_i T^i = h + e$, où $h \in \mathcal{H}$ et $e \in \mathcal{E}^\dagger$. L'élément $1 \otimes h + e \otimes 1 \in \mathcal{E}^\dagger \otimes_{\mathcal{H}^\dagger} \mathcal{H}$ est alors un antécédent de a. On note $i : M_{\mathcal{H}} \hookrightarrow M_{\mathcal{E}}$ et $j : M_{\mathcal{E}^\dagger} \hookrightarrow M_{\mathcal{E}}$. Alors $M_{\mathcal{H}^\dagger} := i(M_{\mathcal{H}}) \cap j(M_{\mathcal{E}^\dagger})$ a une structure de $\mathcal{H}^\dagger$ module et la flèche canonique :

$$M_{\mathcal{H}^\dagger} \otimes_{\mathcal{H}^\dagger} \mathcal{E}^\dagger \to M^\dagger_{\mathcal{E}},$$

est un isomorphisme. En effet,

$$M_{\mathcal{H}^\dagger} \otimes_{\mathcal{H}^\dagger} \mathcal{E}^\dagger = M_{\mathcal{H}} \otimes_{\mathcal{H}^\dagger} \mathcal{E}^\dagger \cap M_{\mathcal{E}^\dagger} \otimes_{\mathcal{H}^\dagger} \mathcal{E}^\dagger.$$

Or $M_{\mathcal{H}} \otimes_{\mathcal{H}^\dagger} \mathcal{E}^\dagger = M_{\mathcal{H}} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{E} = M_{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E}^\dagger} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{E} = M_{\mathcal{E}^\dagger} \otimes_{\mathcal{H}^\dagger} \mathcal{H}$. D'où

$$M_{\mathcal{H}^\dagger} \otimes_{\mathcal{H}^\dagger} \mathcal{E}^\dagger = M_{\mathcal{E}^\dagger} \otimes_{\mathcal{H}^\dagger} \mathcal{H} \cap M_{\mathcal{E}^\dagger} \otimes_{\mathcal{H}^\dagger} \mathcal{E}^\dagger = M_{\mathcal{E}^\dagger} \otimes_{\mathcal{H}^\dagger} \mathcal{H}^\dagger = M_{\mathcal{E}^\dagger}.$$

On montre de même que :

$$M_{\mathcal{H}^\dagger} \otimes_{\mathcal{H}^\dagger} \mathcal{H} \simeq M_{\mathcal{H}}.$$

De plus $M_{\mathcal{H}^\dagger}$ est libre de même rang que $M_{\mathcal{H}}$ puisque $\mathcal{H}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{H}^\dagger$.

D'après la description précédente des (ϕ, ∇)-modules, il reste à descendre à $\mathcal{H}^\dagger$ les endomorphismes $\phi_{\mathcal{H}}$ et $\nabla_{\mathcal{H}}$ associés aux matrices C et A tels que ceux-ci vérifient la relation (**). Par hypothèse, il existe un endomorphisme $\phi_{\mathcal{E}^\dagger}$ tel que

$$\phi_{\mathcal{E}^\dagger} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{E} = \phi_{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{E} = \phi_{\mathcal{E}}.$$

Il suffit de prendre $\phi_{\mathcal{H}^\dagger} = \phi_{\mathcal{E}}|_{M_{\mathcal{H}^\dagger}}$. Grâce à la fidèle platitude de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}^\dagger$, $\phi_{\mathcal{H}^\dagger}$ est l'unique flèche telle que $\phi_{\mathcal{H}^\dagger} \otimes_{\mathcal{H}^\dagger} \mathcal{H} = \phi_{\mathcal{H}}$ et $\phi_{\mathcal{H}^\dagger} \otimes_{\mathcal{H}^\dagger} \mathcal{E}^\dagger = \phi_{\mathcal{E}^\dagger}$. Il est alors clair que la flèche ainsi définie est inversible. On descend de manière analogue la connexion et on verifie que $(\phi_{\mathcal{H}^\dagger}, \nabla_{\mathcal{H}^\dagger})$ vérifie la relation (**) puisque c'est le cas pour $(\phi_{\mathcal{E}^\dagger}, \nabla_{\mathcal{E}^\dagger})$ et $(\phi_{\mathcal{H}}, \nabla_{\mathcal{H}})$.

(c) Nous avons montré qu'un F-isocristal convergent $M_{K'}$ sur $\mathbf{P}^1_k \setminus \{0\}/K'$ provient d'un F-isocristal surconvergent $M^\dagger$ sur la même base si le (ϕ, ∇)-module associé sur $\mathcal{E}$ descend à $\mathcal{E}^\dagger$. Nous allons à présent étendre ce critère de surconvergence au cas d'une courbe affine et lisse U/k. La surconvergence étant de nature locale, nous pouvons travailler sur un recouvrement ouvert de U. Plus précisément, soit $(X_i)_i$ un recouvrement ouvert de la compactification X de U tel que chaque X_i ne contienne qu'un point x_i de D et soit $(U_i := X_i \cap U)_i$ le recouvrement associé sur U. On se ramène de cette manière au cas où on a un plongement ouvert $U \hookrightarrow X$ de courbes lisses tel que $X \setminus U$ soit réduit à un point x. On peut de plus supposer que U est affine tel que $U = Spec A_0$.

Sous cette hypothèse, soit A/W une algèbre lisse relevant A_0. Alors il existe d'après [4,3] une section locale T d'un relèvement propre et lisse de X se réduisant à un paramètre local en x et une extension finie plate et intègre $\mathcal{O}/W$ telles qu'on ait une injection $A_K \hookrightarrow A_0(x)$, avec

$$A_0(x) = \{a = \sum_{i > -\infty}^{+\infty} a_i T^i |\ a_i \in K', \text{a convergeant pour } 0 < |T| < 1\}.$$

On en déduit une injection $A_K \hookrightarrow \mathcal{E}_x$ (où l'indice x de $\mathcal{E}$ signifie que l'indéterminée T correspond au point $x \in D$). Et ainsi, puisque que $\mathcal{E}_x$ est complet, cette dernière induit une injection $\hat{A}_K \hookrightarrow \mathcal{E}_x$. Notons $\mathcal{R}_x$ l'anneau de Robba des séries convergeant sur une couronne $r < |T| < 1$ pour un certain r. On a par définition

$$\mathcal{E}_x^\dagger = \mathcal{R}_x \cap \mathcal{E}_x.$$

Alors d'après [5,7.3], on a une injection canonique de

$$A_K^\dagger = \lim_{\substack{\to \\ V}} \Gamma(V, \mathcal{O}_V) \to \lim_{\substack{\to \\ V}} \Gamma(V \cap]x[, \mathcal{O}_V) = \mathcal{R}_x,$$

où la limite inductive est pris sur l'ensemble des voisinages stricts de $]U[$ dans $]X[$. De cette manière on a en fait un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \hat{A}_K & \hookrightarrow & \mathcal{E}_x \\ \uparrow & & \uparrow \\ A_K^\dagger & \hookrightarrow & \mathcal{E}_x^\dagger \end{array}$$

où $A_K^\dagger = \mathcal{E}_x^\dagger \cap \hat{A}_K$ d'après [3,4.7.2]. D'autre part, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{P}_k^1 \setminus \{T=0\} & \hookrightarrow & \mathbf{P}_k^1 \end{array}$$

induisant le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_x & \hookrightarrow & \hat{A}_K \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{H}_x^\dagger & \hookrightarrow & A_K^\dagger \end{array}$$

On en déduit que le morphisme canonique :

$$\mathcal{E}_x^\dagger \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K \to \mathcal{E}_x$$

est surjectif puisque le morphisme composé :

$$\mathcal{E}_x^\dagger \otimes_{\mathcal{H}_x^\dagger} \mathcal{H}_x \to \mathcal{E}_x^\dagger \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K \to \mathcal{E}_x$$

l'est comme nous l'avons vu précédemment. Il est de plus injectif en tant qu'extension des scalaires de l'inclusion canonique $\mathcal{E}_x^\dagger \subset \mathcal{E}_x$ par le morphisme fidelement plat $A_K^\dagger \to \hat{A}_K$. Si on se donne un F-isocristal convergent M sur U, celui-ci correspond à la donnée d'un (ϕ, ∇)-module M_K sur $\hat{A}_K$. On montre alors de manière analogue à la proposition que celui-ci est surconvergent le long de x si et seulement si le (ϕ, ∇)-module $M_{\mathcal{E}_x}$ sur $\mathcal{E}_x$ induit par M_K descend à $\mathcal{E}_x^\dagger$.

Revenons au cas général : soit un F-isocristal convergent E sur U. Si la restriction de E à chacun des U_i vérifie la condition précédente, on obtient alors pour tout i, un F-isocristal $E_i^\dagger$ sur U_i surconvergent le long de $\{x_i\} = X_i \setminus U_i$. Les F-isocristaux surconvergents sur chaque $(U_i \hookrightarrow X_i)$ satisfont la condition de recollement de [2,2.3.2,(iii)] sur U et se recollent ainsi en un F-isocristal surconvergent sur U. En effet, il suffit de vérifier que pour tout i et j, les restrictions de $E_i^\dagger$ et $E_j^\dagger$ à $U_{i,j} := U_i \cap U_j$ coïncident. Mais $E_i^\dagger|_{U_{i,j}}$ et $E_j^\dagger|_{U_{i,j}}$ sont des isocristaux sur $U_{i,j} \hookrightarrow X_i \cap X_j = U_{i,j}$, i.e. des isocristaux convergents sur $U_{i,j}$ qui coïncident puisqu'ils sont tout deux restrictions de E à $U_{i,j}$.

Théorème 1. *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique p, U/k une courbe affine et lisse et $f : V \to U$ un morphisme propre et lisse. Alors les F-isocristaux convergents $R^i f_* \mathcal{O}_{V/K}$ de [11] sont surconvergents et même quasi-unipotents.*

Démonstration. Soit X une compatification lisse de U et pour tout $x \in D = X \setminus U$, soit T la section locale correspondant à x comme en (c). Puisque la formation des isocristaux $R^i f_* \mathcal{O}_{V/K}$ est compatible aux changements de base arbitraires ([11,3.7.1]), on vérifie que le (ϕ, ∇)-module sur $\mathcal{E}_x$ induit par $R^i f_* \mathcal{O}_{V/K}$

correspond d'après (b) au F-isocristal $R^i f_{x,*}\mathcal{O}_{V_x/K'}$ sur $k((T))/K'$, où V_x est le schéma s'insérant dans le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} V_x & \hookrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ Speck((T)) & \hookrightarrow & U \end{array}$$

On doit alors montrer d'après la proposition que ce dernier descend à $\mathcal{E}_x^\dagger$ pour tout $x \in D$, ce qui résulte de [9,théorème 6.1]. On déduit de plus de [9,6.1] que pour tout $x \in D$, le (ϕ, ∇)-module sur $\mathcal{E}_x$ $R^i f_{x,*}\mathcal{O}_{V_x/K'}$ est en fait potentiellement semi-stable, i.e. descend à $\mathcal{O}[[T]]$, après une possible extension de base finie. La seconde assertion résulte alors de [8] où il est démontrer que cette notion coïncide avec celle de quasi-unipotence de [5].

Corollaire 1. *Sous les hypothèses du théorème, on note $E_i^\dagger$ le F-isocristal surconvergent d'isocristal convergent associé $R^i f_*\mathcal{O}_{V/K}$. Alors les K-espaces vectoriels $H^n_{rig}(U, E_i^\dagger)$ et $H^n_{rig,c}(U, E_i^\dagger)$ sont de dimension finie et on a un accouplement parfait :*

$$H^n_{rig,c}(U, E_i^\dagger) \times H^{2-n}_{rig}(U, E_i^{\dagger\vee}) \to K.$$

Démonstration. L'assertion résulte du théorème 1, de [5,10.2] et de [5,9.5].

Corollaire 2. *Soient F un corps de fonction algébrique en une variable, de corps des constantes $\mathbf{F}_q$, $C/\mathbf{F}_q$ la courbe propre et lisse de corps des fonctions F et A_F/F une variété abélienne. Si A_F/F a bonne réduction, on pose $S =$l'ensemble vide, sinon S est un ensemble fini de points fermés de C, contenant les points de mauvaise réduction de A_F/F tel que $C \setminus S := U$ soit affine. Il existe alors un schéma abélien A/U relevant A_F/F. On note $\bar{U} := U \times_{\mathbf{F}_q} \bar{\mathbf{F}}_q$ et $\bar{A}/\bar{U}$ le schéma abélien. Alors le cristal de Dieudonné de $\bar{A}/\bar{U}$ se prolonge en un $F-$isocristal surconvergent sur $\bar{U}$, noté $\mathbf{D}(\bar{A})^\dagger$ et la fonction de Hasse-Weil de A_F/F restreinte au points fermés de $C \setminus S$, notée $L_S(A_F/F, t)$ est rationnelle et on a l'expression suivante :*

$$L_S(A_F/F, t) = \prod_{i=0}^{2} det(1 - t\Phi, H^i_{rig,c}(\bar{U}, \mathbf{D}(\bar{A})^\dagger))^{(-1)^{i+1}}.$$

Démonstration. La surconvergence de $\mathbf{D}(\bar{A})^\dagger$ résulte du théorème 1, l'expression comme fonction méromorphe de [7] et la rationalité du corollaire 1.

(d) Nous finissons par une remarque permettant de réinterpréter la notion de F-isocristaux réguliers de [10], i.e. de F-isocristaux surconvergents sur U provenant de F-log-cristaux sur X (à isogénie près), en terme d'unipotence. Nous reprenons les notations précédentes en supposant cette fois que k est un corps parfait de caractéristique p (non nécéssairement algébriquement clos). Pour tout $x \in D$, on note $\hat{D}_x := Spec\hat{\mathcal{O}_{X,x}}$ et on munit celui-ci de la log-structure image inverse de celle sur X induit par le diviseur D. Le log-schéma associé est noté $\hat{D_x^{\#}}$. L' ouvert de $\hat{D_x^{\#}}$ sur lequel cette log-structure devient triviale est $U_x := U \cap \hat{D}_x = SpecFrac(\hat{\mathcal{O}_{X,x}})$ (si $U = \mathbf{P}^1 \setminus 0$, $U_x = Speck((T))$) et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U_x & \rightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_x & \rightarrow & X \end{array}$$

Si $\mathcal{X}/\mathcal{W}$ est un relèvement propre et lisse de la courbe X/k, on a :

$$\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}[1/p] \simeq \mathcal{O}[[T]][1/p] \subset \mathcal{E}^{\dagger}.$$

On voit ainsi que la notion de F-log-cristaux définie à isogénie près sur $\hat{D_x^{\#}}$ est équivalente à celle de (ϕ, ∇)-modules sur $\mathcal{O}[[T]][1/p]$ où la connexion est à pôle logarithmique.

Pour tout $x \in D$, on peut associer à un $F-$isocristal $E^{\dagger}$ surconvergent sur U un (ϕ, ∇)-module sur $\mathcal{E}_x^{\dagger}$ par l'extension des scalaires $A_K^{\dagger} \subset \mathcal{E}_x^{\dagger}$. On déduit alors de [8] (voir aussi [14,4.2.1,(2)]) que $E^{\dagger}$ est unipotent si et seulement si pour tout $x \in D$, le (ϕ, ∇)-module sur $\mathcal{E}_x^{\dagger}$ associé descend à $\mathcal{O}[[T]][1/p]$. D'autre part, la construction de [10] peut être décrite sous nos hypothèses de la façon suivante : soit $(U_i)_i$ (resp. $(X_i)_i$) le recouvrement de U (resp. de X) construit en (c) et pour tout i, A_i (respectivement B_i) un relèvement lisse de l'anneau structural de U_i (resp. X_i). Soit E un F-cristal sur $X^{\#}$. Si l'on note $X_i^{\#}$ l'ouvert de $X^{\#}$ défini en prenant la log-structure image inverse de celle de $X^{\#}$, alors le F-cristal $E|_{X_i^{\#}}$ correspond à un (ϕ, ∇)-module sur $\hat{B}_i$ où la connexion est à pole logarithmique. On a alors d'après [14,6.1.1] :

$$\Gamma(]X_i[) = (\hat{A}_i \cap \mathcal{O}[[T]])[1/p] \hookrightarrow \hat{A}_i[1/p] \cap \mathcal{E}^{\dagger} = A_i^{\dagger}[1/p]$$

et le F-isocristal $E_i^{\dagger}$ sur U_i surconvergent le long de x_i est obtenu par l'extension des scalaires :

$$\hat{B}_i = \Gamma(\hat{\mathcal{X}_i}) \rightarrow \Gamma(]X_i[) \hookrightarrow A_i^{\dagger}[1/p].$$

On vérifie que les différents $E_i^{\dagger}$ se recollent sur U en utilisant le fait que les $E|_{X_i^{\#}}$ se recollent sur $X^{\#}$. On peut alors montrer qu'on a un diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} F\text{-cristaux sur } X^{\#} & \rightarrow & F - Isoc^{\dagger}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F\text{-cristaux sur } \hat{D_x^{\#}} & \rightarrow & (\phi, \nabla) - \text{modules sur } \mathcal{E}_x^{\dagger} \end{array}$$

En effet par fonctorialité de la construction de [10], il suffit de voir que le carré obtenu en remplaçant $X^{\#}$ par $X_i^{\#}$ et U par U_i est commutatif, ce qui est trivial d'après notre description locale du foncteur de [10]. En particulier, si un F-isocristal $E^{\dagger}$ surconvergent sur U provient d'un F-cristal sur $X^{\#}$, alors $E^{\dagger}$ est unipotent.

Question. Existe-t-il un sous-anneau $\mathcal{F}_x^{\dagger}$ de $\mathcal{E}_x^{\dagger}$ tel que la catégorie des (ϕ, ∇)-modules sur $\mathcal{F}_x^{\dagger}$ corresponde moralement à la catégorie des F-isocristaux surconvergent sur $k(t)$?

Pour résumer, nous avons donc démontré :

Théorème 2. *Soient k un corps parfait de caractéristique p, U/k une courbe affine et lisse, X/k une compactification lisse et $X^{\#}/k$ le log-schéma de schéma sous-jaçent X et dont la log-structure est induite par le diviseur $D := X \setminus U$. Alors l'image essentielle du foncteur de* [10]

$$F\text{-log-cristaux sur } X^{\#} \rightarrow F - Isoc^{\dagger}(U)$$

*est constituée de F-isocristaux unipotents. En particulier, si $E^{\dagger}$ est un élément de cette image essentielle provenant d'un $F-$*log-cristal *E sur $X^{\#}$, on a :*

$$H^i_{rig}(U, E^{\dagger}) \simeq H^i_{cris}(X^{\#}, E) \otimes \mathbf{Q}$$

$$H^i_{rig,c}(U, E^{\dagger}) \simeq H^i_{cris,c}(X^{\#}, E) \otimes \mathbf{Q}.$$

Démonstration. La première assertion résulte de (d). La deuxième a été démontrée dans [10] et enfin la dernière résulte de la précédente assertion ainsi que de la dualité de Poincaré à coefficients dans le cas rigide ([5]) et log-cristallin ([12]).

Références :

[1] Berthelot, P. Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p. Introductions aux cohomologies p-adiques (Luminy, 1984). Mém. Soc. Math. France (N.S.) No. 23 (1986).

[2] Berthelot P., Cohomologie rigide et cohomologie à support propre, prepublication IRMAR 96-03, Université de Rennes (1996).

[3] Crew R., F-isocrystals and p-adic representations, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 46 (1987).

[4] Crew R., The differential Galois theory of regular singular p-adic differential equations, Math. Ann. 305, 45-64 (1996).

[5] Crew R., Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, t. 31, 1998, p. 717-763.

[6] De Jong A.J., Barsotti-Tate groups and crystals, Doc. Math. J. DMV, Extra volume ICM 1998, II, 259-265.

[7] Etesse J.-Y. et Le Stum B., Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents. I. Interprétation cohomologique ", Math. Ann. 296, 557-576 (1993).

[8] Kedlaya K.,Unipotency and semistability of overconvergent F-crystals, preprint 2001.

[9] Kedlaya K., Descent of morphisms of overconvergent F-crystals, preprint 2001.

[10] Le Stum B. et F. Trihan, Log-cristaux et surconvergence, à paraitre aux Annales de l'Institut Fourier.

[11] Ogus A., F-isocrystal and de Rham cohomology II, Duke Math. J., vol. 51, No 4, 1984

[12] Tsuji T., Poincaré duality for logarithmic crystalline cohomology. Compositio Math. 118 (1999), no. 1, 11–41.

[13] Tsuzuki N., The local index and the Swan conductor, Comp. Math. 11, 245-288, 1998.

[14] Tsuzuki N., Slope filtration of quasi-unipotent overconvergent isocrystals, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 48, 2 (1998), 379-412.

University of Tokyo, Graduate school of Mathematical Sciences. Komaba, Tokyo, Japan. e-mail : trihan@ms.u-tokyo.ac.jp

UTMS

2001–14 Xu Bin: *The degree of symmetry of compact smooth manifolds.*

2001–15 K. Habiro, S. Kamada, Y. Matsumoto and K. Yoshikawa: *Algebraic formulae for the q-inverse in a free group.*

2001–16 Maurizio Grasselli, Masaru Ikehata and Masahiro Yamamoto: *Direct and inverse inequalities for the isotropic Lamé system with variable coefficients and applications to an inverse source problem.*

2001–17 Kangsheng Liu, Masahiro Yamamoto and Xu Zhang: *Observability inequalities by internal observation and its applications.*

2001–18 Masahiro Yamamoto and Xu Zhang: *Global uniqueness and stability for a class of multidimesional inverse hyperbolic problems with two unknowns.*

2001–19 S.I. Kabanikhin, K.T. Iskakov and M. Yamamoto: H_1*-conditional stability with explicit Lipshitz constant for a one-dimensional inverse acoustic problem.*

2001–20 J. Cheng and M. Yamamoto: *Unique continuation along an analytic curve for the elliptic partial differential equations.*

2001–21 Keiko Kawamuro: *An induction for bimodules arising from subfactors.*

2001–22 Yasuyuki Kawahigashi: *Generalized Longo-Rehren subfactors and* α*-induction.*

2001–23 Takeshi Katsura: *The ideal structures of crossed products of Cuntz algebras by quasi-free actions of abelian groups.*

2001–24 Noguchi, junjiro: *Some results in view of Nevanlinna theory.*

2001–25 Fabien Trihan: *Image directe supérieure et unipotence.*

The Graduate School of Mathematical Sciences was established in the University of Tokyo in April, 1992. Formerly there were two departments of mathematics in the University of Tokyo: one in the Faculty of Science and the other in the College of Arts and Sciences. All faculty members of these two departments have moved to the new graduate school, as well as several members of the Department of Pure and Applied Sciences in the College of Arts and Sciences. In January, 1993, the preprint series of the former two departments of mathematics were unified as the Preprint Series of the Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo. For the information about the preprint series, please write to the preprint series office.

ADDRESS:
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo
3–8–1 Komaba Meguro-ku, Tokyo 153, JAPAN
TEL +81-3-5465-7001 FAX +81-3-5465-7012