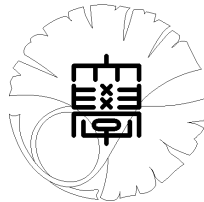


数理科学実践研究レター 2018-5 July 19, 2018

有限要素法を用いた角膜数値シミュレーションの改良

by

青山雄彦、高木悠、児玉大樹



**UNIVERSITY OF TOKYO**  
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES  
KOMABA, TOKYO, JAPAN

# 有限要素法を用いた角膜数値シミュレーションの改良

青山雄彦<sup>1</sup>, 高木悠<sup>2</sup>, 児玉大樹<sup>3</sup>,  
Yuhiko Aoyama, Yu Takagi, and Hiroki Kodama

## 概要

眼球の角膜形状が変化し高度不正乱視に陥る症例が報告されている。このような症例の原因究明や有効な対処法の探求には数値シミュレーションによる角膜形状とその変化のモデル化が有用である。本研究では先行研究に基づき有限要素法を用いた数値モデルを作成し、物理的に不適切であったポアソン比の異方性の取り扱いについて修正を行った。その結果ポアソン比の異方性の扱いを誤ると角膜形状に数%程度のズレが生じることがわかった。

## 1 導入

角膜という部位は、眼球においてレンズのような役割を担っている。我々は、この角膜の形状と角膜に働いている力とを関連づける数値モデル化に興味を持った。その動機の一つとして、角膜が変形し高度不正乱視に陥る症例の存在がある (e.g. 円錐角膜)。一般的な視力低下は眼球のピント調節機能の低下であるため、視力矯正器具でピントをずらすことで視力改善が可能である。しかし円錐角膜患者はレンズ自体がゆがんでいるため、同じ方法では視力を改善することが難しい。このような患者に対しては、適切な形状のハードコンタクトレンズを装着することで角膜が変形し、視力が改善できる可能性がある。しかし装着するレンズの形状に対する角膜の変形や、そこから得られる視力の改善度合いなどに関しては、未だ研究の途上にある。高度不正乱視眼へのハードコンタクトレンズの処方においては、事前に角膜の形状変化を予測することが望ましい。

角膜形状の数値モデル化は、有限要素法を用いてすでに行われている (e.g. Gefen, Elad, and Mandel, 2009)。角膜の変形によって生じる応力を数値的に計算し、力の釣りあう角膜の形状を決定するという手法である。彼らは角膜の一部を人工的に薄くする数値実験を行い、薄くした領域が円錐状の変形を示すことを確かめた。このような数値モデルは病理の解明や治療法の模索の一助となりうる。

数値モデルを作る際には、物理的な係数として典型的な範囲で任意の値を採用する。有限要素法による角膜形状の再現モデルにおいては、角膜の弾性係数などがそれに当たる。しかし Gefen, Elad, and Mandel (2009) においてはモデルパラメータとして、物理的に矛盾した値を採用している。すなわち従属関係にある二変数の双方の値を、要請される関係式を満たさずに決定している。このような矛盾の影響を定量することは、実用的な数値モデルの開発に向けて解決すべき課題である。

本研究では、先行研究と同様に有限要素法を用いた角膜形状の数値モデルを作成する。モデル化に必要な係数を決定する際には、要請される関係式を満たすように改良し、より現実に則したモデル化を試みる。このモデルを用いて、角膜数値モデルの境界条件変化への応答を数値実験し、改良前のモデルとの違いを定量的に検討する。

<sup>1</sup> 東京大学理学系研究科

<sup>2</sup> 東京大学地震研究所

<sup>3</sup> 東京大学数理科学研究科

## 2 モデルの改良点

角膜の形状を数値モデル化するために、弾性体として扱う。力の釣り合いを微分型の方程式で表すことにより、次の基礎方程式を得る：

$$0 = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ijkl} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \right]. \quad (1)$$

ただし  $u$  は空間位置ベクトル、 $D_{ijkl}$  は弾性率テンソルである。与えた境界条件においてこの式を満たす形状を出力する数値計算プログラムを、Gefen, Elad, and Mandel (2009) に基づいて開発した。与える境界条件は角膜辺縁部で変位 0, 角膜外側境界で外力 0 とした。角膜内側の境界条件は接平面方向に一定の圧力  $P$  がかかっているとし、これに垂直な方向の外力は 0 とした。

弾性率テンソルの各成分は縦弾性係数  $E_{jj}$ , せん断弾性係数  $G_{k,l}$ , ポアソン比  $\gamma_{k,l}$  を用いて表される。縦弾性係数とポアソン比の間には、対称性より以下の関係性が成り立つ。

$$\frac{\gamma_{lk}}{E_{ll}} = \frac{\gamma_{kl}}{E_{kk}} \quad (2)$$

簡単化のため、縦弾性係数  $E_{jj}$  を  $E_{11} = E_{22} = E_{33}$  とする等方近似がよく採用される。しかし実際の角膜の観測結果に基づき、先行研究では Gefen, Elad, and Mandel (2009) の Table 1 に示されたような  $j = 1, 2, 3$  方向それぞれで異なる値を採用している。その一方で、ポアソン比を決定する際には等方近似を採用し、 $\gamma_{kl}$  の全ての成分を同一の値としている。これは明らかに式 (2) に反している。 $E_{jj}$  が決定されている状況において、 $\gamma_{kl}$  の成分のうち任意に決定できるのは 3 つだけである。そこで本研究では式 (2) を満たすように  $\gamma_{kl} = 0.45\sqrt{E_k/E_l}$  として係数を決定し、数値計算を行なった。

## 3 結果

ポアソン比はある方向へ歪みが生じた際に伴う、歪みの方向と直行する方向への歪みの比率である。したがって対称性の良い角膜を数値モデル化するにはあまり大きな影響は出ない。しかし円錐角膜患者のように角膜が一部薄くなっている角膜を模擬際には、その影響は無視できないことがわかった。これは実際に、数値計算の結果に見ることができる。図 1 は一部が薄くなった角膜の形状を数値モデル化した際の、角膜表面の球形状からの変位をカラーコンターで表したものである。基準となる球は半径 7.8mm として、(0,-2.75mm) を中心に半径 2.2mm の円内の角膜の厚さを 4 割まで減少させている。変化を見やすくするために、眼圧は  $P = 25\text{mmHg}$  と大きめの値を採用した。

図 2 は先行研究と本研究のモデルの違いがどこにどの程度現れているかを示した図である。図に示されたように、ポアソン比の取り扱いによって角膜形状の変位は数%程度変化している。またその変化は角膜を人工的に薄くし凸形状を取っている場所ではなく、辺縁部において大きいことがわかる。この原因を以下のように考察する。以下角膜の接平面に垂直な方向を  $r$  方向、角膜中心 (図 1 の原点) から外縁部へ向かう方向を  $\phi$  方向と呼ぶ。弾性力は体積力なので、角膜を薄くすると力は体積に比例して弱くなる。そこで境界条件である外力と釣り合う応力を得るために、より大きな変位をとる必要がある。角膜外縁部の位置を固定する境界条件をとっているため、 $\phi$  方向には自由に伸長することができない。したがって  $r$  方向に突出することで、曲率を介して  $\phi$  方向の変位を大きくしていると考えられる。また、眼圧  $P$  を大きくするとこの突出度合いが大きくなる。眼圧  $P$  に由来する外力は  $r$  方向にかかっているが、角膜形状に曲率があることによって  $\phi$  方向の応力が  $r$  方向の力の釣り合いにも寄

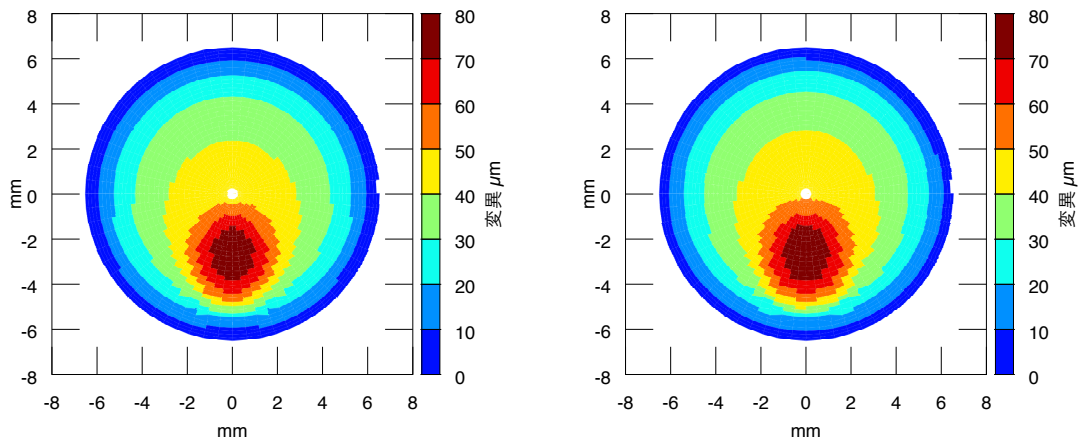


図 1: 角膜表面の変位. カラーコンター (色で表した等高線) は半径 7.8mm で原点中心の球からの変位を表す. 左が先行研究と同様ポアソン比を一定値とした場合の結果であり, 右側が対称性に基づいて (式 (2)) 値を設定した結果である. 左に比べて右図では変位が大きくなっている.

与している. 当然  $r$  方向の変位による応力も  $r$  方向の力の釣り合いに寄与している. このように, 力の釣り合いに基づいた角膜形状を決定する際には異なる方向の応力・変位の比率が重要になっている. この比率を表す物理係数がポアソン比  $\gamma$  であるので, この係数の扱いの違いは角膜形状の数値モデルに無視できない影響を与えている.

## 4 議論

今後の発展として将来的に数値モデルを実際の医療現場で活かせるようにすることは, 意義深いことである. その方向性の一つとして実際の角膜形状データを高精度に測定し, 数値モデル形状と比較することで角膜の部位毎の強度・弾性率などを推定する, という方法が考えられる. 例えば円錐角膜患者の角膜形状変化がどのような物性変化に由来するか定量的に知ることは, 病気の原因解明や治療法の模索につながる可能性がある. この方向性では, 具体的に二つの手法が考えられる. 一つは, 入出力を逆にした数値モデルを作成することである. すなわち今回のモデルの出力である角膜の形状を入力とし, 角膜の物性を出力とするモデルを開発する必要がある. もう一つは入力としての物性の値を変化させながら出力である角膜形状と実測データを比較し, 二つの差異が比較的小さくなるような入力を探す方法である. いずれにせよ新たな数値モデルの開発が望まれる.

### A 参考図

図 3 は角膜の単位体積あたりのひずみエネルギーの図である.

## 謝辞

東京医科大学の森秀樹先生を始めとする株式会社レインボーオプティカル研究所, および日本精機株式会社のみなさまには本研究につながる課題を提供していただきました. また東京大

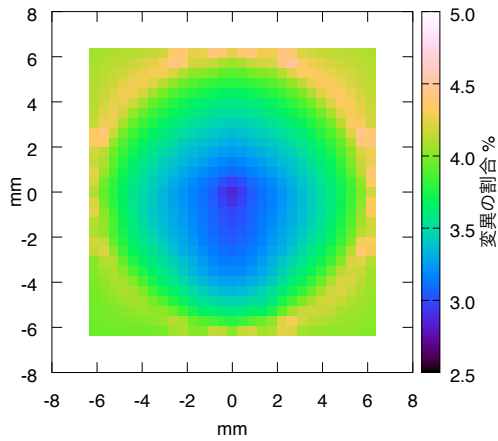


図 2: 先行研究モデルにおける角膜形状の変位 ( $u_1$ , 図 1 左) と本研究のモデルにおける変位 ( $u_2$ , 図 1 右) の差. カラーコンターは  $(1 - u_1/u_2) \times 100$ . 差異は特に辺縁部で大きい.

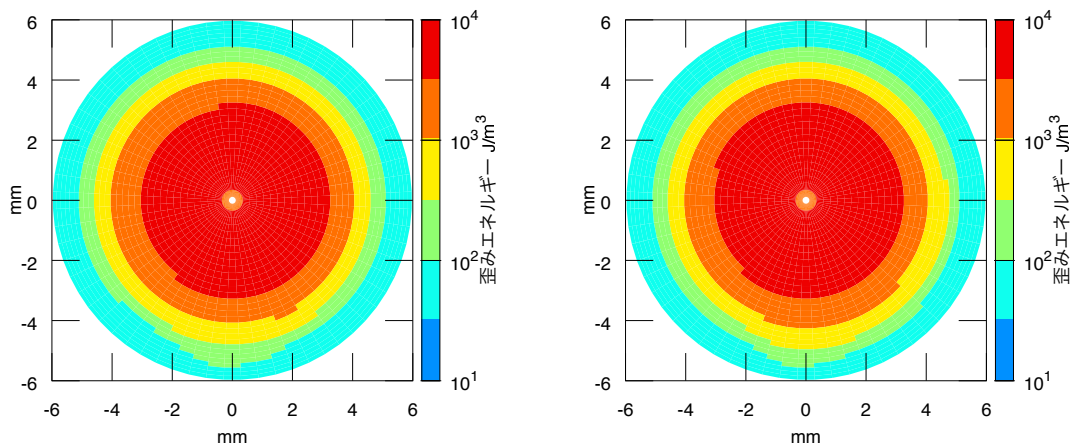


図 3: 角膜の, 単位体積あたりのひずみエネルギー. 左が先行研究と同様にポアソン比を扱った場合. 右が対称性に基づいて扱った場合.

学数理科学研究科の坪井俊先生, 土岡俊介先生には本研究を遂行するにあたり様々な協力をいただきました. ここに感謝の意を表します.

### 参考文献

Gefen, A., R. Shalom, D. Elad, and Y. Mandel, (2009). Biomechanical analysis of the keratoconic cornea, *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.*, **2**, 224–236.