

平成 24 年度冬学期 集中講義

数理科学特別講義 XI (大学院)

楕円超幾何函数と楕円 Painlevé 方程式

野海 正俊 (神戸大・理)

開講期間：10 月 29 日 (月) ~ 11 月 2 日 (金)

講義時間：14:50 ~ 16:50

講義場所：数理科学研究棟 123 講義室

講義内容

楕円超幾何函数 (級数) は 2000 年前後から系統的に研究されるようになった比較的新しい研究対象である。超幾何函数の三角化・楕円化を考察することにより、超幾何函数の変換公式や和公式に対する系統的な理解が可能となる。一方、Painlevé 方程式の差分化の研究の中で、坂井秀隆氏によって、有理曲面に由来する離散 Painlevé 方程式の幾何学的枠組みが導入されたのも、ほぼ同じ時期である。その坂井のリストの中で最も大きな対称性を持つものが、表題の楕円 Painlevé 方程式である ($E_8^{(1)}$ 型アフィン Weyl 群対称性)。間もなく、この楕円 Painlevé 方程式が楕円超幾何函数で表される特殊解のクラスを持つことが明らかとなり、楕円超幾何函数に対して、非線型特殊函数としての新しい視点をもたらされることになった。(この事実は、Painlevé 方程式 P_{VI} が Gauss の超幾何函数で表される特殊解を持つことに対応する。)

本集中講義の前半では、超幾何級数の楕円化に関する話題を取り上げ、多重楕円超幾何級数の変換公式・和公式や、楕円超幾何級数に関連した Padé 補間の問題などを紹介する。後半では、楕円 Painlevé 方程式を含む高次元的な枠組みとして、射影空間の点配置空間への Cremona 変換群の双有理作用と、それに由来する「楕円 Cremona 系」を考察する。このような系は、適切に τ 函数を導入することにより、ある種の非自励的広田・三輪方程式で記述される。その応用として、楕円 Painlevé 方程式の場合に、楕円超幾何函数で表される特殊解のクラスを明示的に構成する方法を紹介する。