平成２０年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ａ　（筆記試験）

平成１９年　８月２７日（月）
１３：００　～　１６：００

問題は全部で７題ある．Ａ１，Ａ２は必答問題である．Ａ３～Ａ７の中から２題選び，必答問題と合わせて**合計４題**解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**４枚の答案**，および**４枚の計算用紙**である．着手した問題数が４題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，４枚とすること．
指示に反したもの，**答案が４枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

A 第 1 問（必答）

3 次の実正方行列全体を $M_3(\mathbf{R})$ と表し，これを自然に $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とみなす．

実数 a, b, c に対して $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) A と可換な行列全体からなる $M_3(\mathbf{R})$ の部分集合 W は, $M_3(\mathbf{R})$ の部分ベクトル空間をなすことを示せ．

(2) W の $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間としての次元を求めよ．

A 第 2 問（必答）

$g(x, y) = (y^4 - y^6) - 3(x^2 + x^4)$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 |\ g(x, y) = g_x(x, y) = g_y(x, y) = 0\}$ を求めよ．

(2) 曲線 $C = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus S \;\middle|\; g(x, y) = 0, y > 0\right\}$ 上で $f(x, y) = x^2 + y^2$ が極値をとる点をすべて求め，その値が極大であるか極小であるかを判定せよ．

A 第 3 問

実数 μ に対して，写像 $\varphi_\mu : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ を

$$\varphi_\mu(\mathbf{x}) = \mu\mathbf{x} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3)$$

で定義する． また φ_μ を n 回合成したものを φ_μ^n とする．

(1) $\mu = 1$ のとき，点列 $\{\varphi_1^n(\mathbf{a})\}_{n \geq 1}$ が収束するための $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ の条件を求めよ．

(2) 点列 $\{\varphi_\mu^n(\mathbf{a})\}_{n \geq 1}$ が任意の $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ に対して収束するための μ の条件を求めよ．

A 第 4 問

正の定数 α に対して，次の積分の値を求めよ．

$$I = \int_0^\infty \frac{x^4 - \alpha^4}{x^4 + \alpha^4} \frac{\sin x}{x} dx$$

A　第 5 問

X および Y はともに実数全体の集合 $\mathbf{R}$ であるとする．X の部分集合 F が閉集合であるとは，それが $\mathbf{R}$ に等しいか，あるいは有限集合であるとして，X に位相を与える．一方，Y にはユークリッド位相を与える．このとき，位相空間 X から位相空間 Y への連続写像をすべて求めよ．

A　第 6 問

$f(t)$ は $\mathbf{R}$ 上の実数値連続関数であって，ある実数 A, B に対して

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = A, \qquad \lim_{t\to-\infty} f(t) = B$$

が成り立つものとする．a, b を正の実数とする．微分方程式系

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = ab\, x(t) - (a-b)\, y(t) + f(t) \end{cases}$$

の $\mathbf{R}$ 上の解であって，$\lim_{t\to+\infty} x(t)$ と $\lim_{t\to-\infty} x(t)$ が有限確定値となるようなものが唯一つ存在することを示せ．また，その解に対して $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ と $\lim_{t\to-\infty} x(t)$ を A, B, a, b の式で表せ．

A　第 7 問

A を正則な複素 n 次対称行列とし，A が表す複素線形写像を $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ とおく．また，$g : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ を，全ての成分をその複素共役で置き換える写像 $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \mapsto (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \overline{z_n})$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 写像の合成 $g \circ f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ を実線形写像とみなす．このとき $g \circ f$ の固有値は純虚数でないことを示せ．

(2) 実線形写像 $g \circ f$ の固有多項式は，実部が正である根をいくつもつか．ただし，重複度を込めて数えることとする．