平成２６年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ｂ　（筆記試験）

平成２５年　９月３日（火）
１１：００　～　１５：００

問題は全部で１８題ある．その中から**３題**選んで解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名は記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**３枚の答案**，および**３枚の計算用紙**である．着手した問題数が３題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙答案を補い，３枚とすること．
指示に反したもの，**答案が３枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

B　第１問

$K=\mathbf{F}_3(T)$ とし，K 上の多項式 f を $f(X)=X^3-X$ と定める．L を $f(f(X))-T$ の最小分解体とし，L に含まれる $f(X)-T$ の最小分解体を M とする．

(1) $[M:K]$ を求めよ．

(2) $[L:K]$ を求めよ．

(3) L に含まれる K の 9 次拡大の個数を求めよ．

(4) L に含まれる K の 9 次拡大であって，以下の性質をすべてみたすものを一つあげよ．

  (a) K の Galois 拡大ではない．

  (b) 1 のべき根で K に含まれないものを 1 つ以上含む．

B　第２問

可換環 $A=\mathbf{R}[x,y]/(x^2+y^2)$ の極大イデアルをすべて求めよ．

B　第３問

$A := \mathbf{C}[x]$, $B := \mathbf{C}[x,y,z]/(y(xy-z^2), z(xy-z^2))$ を可換環とする．環準同型 $f\colon A\to B$ を，単射準同型

$$\begin{array}{rcl}\iota\colon \mathbf{C}[x] & \to & \mathbf{C}[x,y,z] \\ f(x) & \mapsto & f(x)\end{array}$$

と，$\mathbf{C}[x,y,z]$ のイデアル $(y(xy-z^2), z(xy-z^2))$ によって引き起こされる商準同型

$$\pi\colon \mathbf{C}[x,y,z]\to \mathbf{C}[x,y,z]/(y(xy-z^2), z(xy-z^2))$$

の合成で，$f=\pi\circ\iota$ と定める．

(1) A の極大イデアルをすべて求めよ．説明も書くこと．

(2) B を f によって A-加群と見なすとき，A の各極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して，$C^{\mathfrak{m}} := B\otimes_A A/\mathfrak{m}$ とおく．$C^{\mathfrak{m}}$ を $\mathbf{C}$ 上の 2 変数多項式環の商環の形で書け．

(3) $C^{\mathfrak{m}}$ の各極大イデアル $\mathfrak{n}$ による局所化を $C^{\mathfrak{m}}_{\mathfrak{n}}$ とおく．$C^{\mathfrak{m}}_{\mathfrak{n}}$ の極大イデアル $\bar{\mathfrak{n}}$ に対して $\dim_{\mathbf{C}}\bar{\mathfrak{n}}^2/\bar{\mathfrak{n}}^3$ を計算せよ．

B　第４問

$\sharp A$ で集合 A の元の個数を表す．群 G とその部分群 H および L に対して，次のように定める．

$$HgL = \{hg\ell \mid h \in H, \ell \in L\} \quad (g \in G),$$
$$H\backslash G/L = \{HgL \mid g \in G\}.$$

2 以上の正整数 n に対して n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ を考える．さらに整数 $1 \leq k \leq n$ に対して，

$$H_k = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) \in \{1, \ldots, k\} \ \ (1 \leq i \leq k)\}$$

と定めると，H_k は $\mathfrak{S}_n$ の部分群になる．以下の問に答えよ．

(1) $\max\{\sharp H_1 g H_1 \mid g \in \mathfrak{S}_n\}$ を求めよ．

(2) $1 \leq p, q \leq n$ なる整数 p, q に対して $\sharp H_p \backslash \mathfrak{S}_n / H_q$ を求めよ．

B　第５問

閉区間 $[10, 20]$ の元 t に対し，$\mathbf{R}^3$ 上の C^∞ 級関数 F_t を

$$F_t(x, y, z) = t(f(x, y))^2 + z^2 - 1,$$
$$f(x, y) = x^2 + y^2(y^2 - 1)$$

で定める．このとき，部分集合 $X_t = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid F_t(x, y, z) = 0\}$ が $\mathbf{R}^3$ の C^∞ 級部分多様体となるような t の範囲を決定せよ．

B　第6問

射影 $\pi : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ を $\pi(x,y,z) = (x,y)$ とする．$\mathbf{R}^3$ 上の微分形式 ω を

$$\omega = -x\,dy + dz$$

で定める．$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ を連続かつ区分的 C^∞ 級曲線とする．連続かつ区分的 C^∞ 級曲線 $\tilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^3$ が γ のリフトであるとは，次の条件 (a), (b) をみたすこととする．

(a) すべての $t \in [0,1]$ に対して，

$$(\pi \circ \tilde{\gamma})(t) = \gamma(t)$$

となる．

(b) $t \in [0,1]$ に対して，速度ベクトル $\tilde{\gamma}'(t)$ が定義されるならば，つねに

$$\omega(\tilde{\gamma}'(t)) = 0$$

をみたす．

(1) $\pi(p) = \gamma(0)$ となるような，$p \in \mathbf{R}^3$ について，$\tilde{\gamma}(0) = p$ をみたす γ のリフト $\tilde{\gamma}$ が一意に存在することを示せ．

(2) γ を単位円周

$$\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

とするとき，γ のリフト $\tilde{\gamma}$ に対して，$\|\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)\|$ を求めよ．

(3) 連続かつ区分的 C^∞ 級である閉曲線 γ で，$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$ をみたし，速度ベクトル $\gamma'(t)$ が定義される $t \in [0,1]$ に対して $\gamma'(t) \neq 0$ であるような例をあげよ．

B　第7問

2次元単位球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ 上のいたるところでゼロでない C^∞ 級 2-形式

$$\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$$

と，S^2 上の C^∞ 級関数

$$H(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

を考える．S^2 の C^∞ 級ベクトル場 X を

$$(dH)(Y) = \omega(X,Y), \qquad Y \in TS^2,$$

で定義し，それが生成する1-径数微分同相群を ϕ_t とする．

(1) 関数 H が ϕ_t で不変であることを示せ．

(2) S^2 の点を ϕ_t によって次の3種類に分類する．

(a) 停留点，すなわち，すべての $t \in \mathbf{R}$ に対し $\phi_t(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$ となる点 P.

(b) 周期点，すなわち，停留点ではないが，ある $T > 0$ に対し $\phi_T(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$ をみたす点 P.

(c) 停留点でも周期点でもない点．

球面 S^2 のおのおのの点が，(a), (b), (c) のいずれであるかを理由とともに答えよ．

(3) 停留点でも周期点でもない点 P に対し，$\lim_{t\to\infty} \phi_t(\mathrm{P})$ および $\lim_{t\to-\infty} \phi_t(\mathrm{P})$ を決定せよ．

B　第8問

正の整数 n について，$\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ とする．$S^3 = \{(z_1,z_2) \in \mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2+|z_2|^2=1\}$ とみなす．(z_1,z_2) と $(z_1',z_2') \in S^3$ について，ある整数 $a \in \mathbf{Z}$ が存在して $(z_1',z_2') = (\zeta^a z_1, \zeta^a z_2)$ となるとき，$(z_1,z_2) \sim (z_1',z_2')$ と定める．この同値関係 $\sim$ による S^3 の商空間 $S^3/\!\sim$ への商写像を $\pi : S^3 \to S^3/\!\sim$ とする．S^3 の部分空間 $A = \{(z_1,z_2) \in S^3 \mid z_2 \in \mathbf{R}\}$ の π による像 $\pi(A)$ を考える．

(1) 位相空間 $\pi(A)$ の整係数ホモロジー群 $H_*(\pi(A);\mathbf{Z})$ を求めよ．

(2) $n=3$ のとき，連続写像 $r : S^3/\!\sim\, \to \pi(A)$ であって，$\pi(A)$ への制限が恒等写像となるものは存在するかどうか，理由をつけて答えよ．

B　第９問

$x > 0$ に対し $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ とおく．

(1) 正則関数 $f(w) = e^{-w} w^{x-1}$ の領域

$$D_\epsilon = \left\{ w \in \mathbf{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}\, w > 0, \mathrm{Im}\, w > 0, \epsilon < |w| < \frac{1}{\epsilon} \right\}, \quad \epsilon > 0,$$

の境界での積分を考えることにより

$$\int_0^\infty \sin t \cdot t^{x-1} dt = \Gamma(x) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad 0 < x < 1,$$

を示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt = \sqrt{2\pi}$ を示せ．必要であれば，$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ を用いてもよい．

B　第１０問

(1) 次の条件をすべてみたす区間 $[0,1]$ 上の実数値ルベーグ可測関数 $f(x)$ の例を構成せよ．

(a) $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\, dx < \infty.$

(b) 任意の正の実数 $a \leq 1$ に対し，$\displaystyle\int_0^a |f(x)|^2\, dx = \infty.$

(2) 次の条件をすべてみたす実数軸上の実数値ルベーグ可測関数 $g(x)$ の例を構成せよ．

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty |g(x)|\, dx < \infty.$

(b) 任意の実数 a, b で $a < b$ となるものに対し $\displaystyle\int_a^b |g(x)|^2\, dx = \infty.$

(c) 集合 $\{x \mid g(x) \neq 0\}$ のルベーグ測度は 1 以下である．

B　第１１問

$i=\sqrt{-1}$ とする．

(1) f を $\mathbf{R}$ 上の周期 2π の関数で，

$$f(x)=x^3e^{-ix/2},\ -\pi\le x<\pi$$

で与えられるとする．このとき，f のフーリエ級数 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ を求め，$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|$ を求めよ．

(2) N を正の整数とし，

$$P_N=\left\{\sum_{n=-N}^{N}\alpha_n e^{inx}\,\middle|\,\alpha_n\in\mathbf{C},\ n=-N,-N+1,\cdots,N\right\}$$

とする．$F\in P_N$ に対して

$$\frac{d^3F}{dx^3}(x)=\frac{N^3}{i\pi^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_kF\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{N}+x\right),\ -\pi\le x<\pi$$

と表せることを示せ．

(3) $\mathbf{R}$ 上の周期 2π の連続関数 g に対して，$\|g\|=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|\,dx$ とする．このとき

$$\sup\left\{\left\|\frac{d^3F}{dx^3}\right\|\,\middle|\,F\in P_N,\ \|F\|\le 1\right\}$$

を求めよ．

B　第１２問

$\mathbf{R}$ 上の実数値関数列 $f_n, n=1,2,\ldots,$ と実数値関数 f が与えられ，次の３条件をみたすとする．

(a) 各 f_n は単調非減少，すなわち $x<y$ ならば $f_n(x)\le f_n(y)$ である．

(b) f は $\mathbf{R}$ 上の連続関数である．

(c) 任意の $\varphi\in C_0(\mathbf{R})$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}}f_n(x)\varphi(x)dx=\int_{\mathbf{R}}f(x)\varphi(x)dx$$

が成立する．ただし $C_0(\mathbf{R})$ はコンパクトな台をもつ $\mathbf{R}$ 上の連続関数全体を表す．

このとき，$n\to\infty$ とすれば，f_n は f に $\mathbf{R}$ 上広義一様収束することを示せ．また，条件 (b), (c) を満たし結論が成立しないような関数列 f_n と関数 f の例をあげよ．

B　第１３問

$\mathbf{R}$ 上で定義された C^2 級の関数 f について，$a = f(a)$ と $0 < |f'(a)| < 1$ を満たす $a \in \mathbf{R}$ の存在を仮定する．a の値を数値的に計算するために，反復法

$$x_{k+1} = f(x_k) \qquad (k \geq 0)$$

を考える．$x_0 \in \mathbf{R}$ は与えられた初期推定値である．この反復列について，$x_k \neq a$ $(k \geq 0)$ と $x_k \to a$ $(k \to \infty)$ を仮定する．平均値の定理により，各 $k \geq 0$ に対して，

$$f(x_k) - f(a) = f'(t_k)(x_k - a)$$

を満たすような $t_k \in \mathbf{R}$ が x_k と a の間に存在する．(もし，このような t_k が複数存在する場合には，その中から任意に一つを選ぶことにする．) そして，

$$r_k = \frac{|f'(t_k)|}{|f'(a)|} \qquad (k \geq 0)$$

と定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) k には依存しない整数 $m \geq 0$ と定数 $C > 0$，$0 < \lambda < 1$ で，不等式

$$|r_k - 1| \leq C\lambda^k \quad (k \geq m)$$

を満たすようなものが存在することを示せ．

(2) $|x| \leq 1/2$ のとき，不等式 $|\log(1+x)| \leq 2|x|$ が成立することを示せ．

(3) 極限

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_k - a|}{|f'(a)|^k}$$

が存在することを示せ．

B　第１４問

$\mathbf{N}=\{1,2,\ldots\}$ とする．X_j $(j\in\mathbf{N})$ を同一の分布に従う独立な確率変数列とし，

$$\mathrm{P}\big[X_1\le x\big] \;=\; 1-e^{-x} \qquad (x>0)$$

であるとする．各 $n\in\mathbf{N}$ に対して，

$$Y_k^{(n)} \;=\; \frac{X_k}{\sum_{j=1}^n X_j} \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) 正数 λ に対して，

$$L(\lambda) \;=\; \mathrm{E}\big[e^{-\lambda X_1}\big]$$

を求めよ．

(2) 任意の正数 ϵ に対して，

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log \mathrm{P}\left[\max_{k=1,\ldots,n} Y_k^{(n)}\ge\epsilon\right] \;<\; 0$$

であることを示せ．

(3) 確率変数列

$$Z_n \;=\; \sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^n Y_k^{(2n)}-\frac{1}{2}\right) \qquad (n\in\mathbf{N})$$

が $n\to\infty$ のとき法則収束することを示し，極限分布を求めよ．

B　第１５問

q を $0<|q|<1$ をみたす複素数とする．$[0]:=1$, $[0]!:=1$, 正の整数 n に対して $[n]:=\dfrac{1-q^n}{1-q}$, $[n]!:=[n][n-1]\cdots[1]$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}:=\dfrac{[n]!}{[n-k]![k]!}$ と定義する．また，複素平面内の領域 $X:=\left\{x\in\mathbf{C}\;\middle|\;|x|<d\right\}$ $(d>0)$ で定義された関数 $f(x)$ に対して，

$$B f(x):=\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$
$$B^0 f(x):=f(x)$$
$$B^{k+1}f(x):=B\left(B^k f(x)\right)\quad (k=0,1,2,\ldots)$$

とする．

次に，a_k, b_k $(k=0,1,2,\ldots)$ を複素定数とし，べき級数

$$\psi(x):=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,\quad \Omega(x):=\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k x^k$$

はともに，X で絶対収束するものとする．

そして，$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ に作用する演算 E および D_r $(r=0,1,2,\ldots)$ を

$$E a_k=a_{k+1}\quad (k=0,1,2,\ldots)$$
$$D_0:=1$$
$$D_r:=(E-1)(E-q)\cdots(E-q^{r-1})\quad (r=1,2,3,\ldots)$$

によって定義する．たとえば

$$D_0 a_0=a_0,\ \ D_1 a_0=a_1-a_0,\ \ D_2 a_0=a_2-(1+q)a_1+q a_0$$

である．以下の問に答えよ．

(1) 任意の正整数 k に対して，$E^k=\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} D_j$ が成り立つことを示せ．

(2) $x\in X$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．ただし，右辺の級数の収束は仮定してよい．

$$\Omega(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(D_k a_0)x^k}{[k]!}B^k\psi(x)$$

(3) $\psi(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-qx)}$ を考えることによって，$|x|<1$ であるとき，

$$\sum_{k=0}^{\infty}[k+1]^2 x^k=\frac{1+qx}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)}$$

であることを示せ．

B　第１６問

以下のような未知関数 $v(t,a)$, $Q(t)$ に関する微分方程式を領域 $t \geq 0$, $a \geq 0$ で考える：

$$\frac{\partial v(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial v(t,a)}{\partial a} = -(\mu(a) + f_1(P(t)) + f_2(Q(t)))v(t,a)$$
$$v(t,0) = \int_0^\infty \beta(a) v(t,a) da$$
$$P(t) = \int_0^\infty v(t,a) da$$
$$\frac{dQ(t)}{dt} = -bQ(t) + g(P(t))Q(t)$$

ここで，b は正の定数，$\beta(a)$, $\mu(a)$ は恒等的にはゼロではない非負の有界連続関数で，β は区間 $[0,\infty)$ で可積分であるとする．$f_1(x)$, $f_2(x)$, $g(x)$ はいずれも $x \in [0,\infty)$ で定義された非負狭義単調増大な連続関数で，$f_1(0) = f_2(0) = g(0) = 0$ である．また関数 $\ell(a)$ を

$$\ell(a) = \exp\left(-\int_0^a \mu(\sigma) d\sigma\right)$$

と定義するとき，

$$\int_0^\infty \beta(a)\ell(a) da > 1$$

であると仮定する．また初期条件は正であると仮定する：

$$v(0,a) > 0, \quad Q(0) > 0$$

以下では上記のシステムが $t > 0$ で非負解をもち，すべての $t \geq 0$ で $v(t,\cdot) \in L^1(0,\infty)$, $\lim_{a\to\infty} v(t,a) = 0$ であり，さらに以下が成り立つことを仮定してよい．

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty v(t,a) da = \int_0^\infty \frac{\partial v(t,a)}{\partial t} da$$

(1) 任意の $t > 0$ に関して，$P(t) > 0$ であることを示せ．

(2) 関数 $w(t,a)$ を，

$$w(t,a) = \frac{v(t,a)}{P(t)}$$

と定義する．このとき $w(t,a)$ が，パラメータとして β, μ のみを含むような偏微分方程式と境界条件をみたすことを示せ．

(3) (2) で求めた偏微分方程式が，ただ一つの正の平衡解を持つことを示し，その平衡解をもとめよ．

(4) (3) で求めた平衡解を $w^*(a)$ とする．$v(t,a) = P(t)w^*(a)$ であるとき，$P(t)$, $Q(t)$ のみたすべき常微分方程式システムを求めよ．

(5) (4) で求めた常微分方程式システムが，正の平衡解をもつための必要十分条件を求めよ．

B　第１７問

ベクトル $|+\rangle, |-\rangle$ を基底とする２次元複素線形空間を $V = \mathbb{C}|+\rangle \oplus \mathbb{C}|-\rangle$ とする．正の整数 n と線形変換 $X : V \to V$ に対し，$W_n = V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n}$ の線形変換 $\Delta(X)$ を

$$\Delta(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad X_i = \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \otimes \underset{i\text{ 番目}}{X} \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}$$

と定義する．ただし，$\mathbf{1}$ は V の恒等変換を表す．また，$1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ に対し，W_n の線形変換 $P_{i,j}$ を，成分の互換

$$P_{i,j}\big(\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \underset{i\text{ 番目}}{\boldsymbol{v}_i} \otimes \cdots \otimes \underset{j\text{ 番目}}{\boldsymbol{v}_j} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_n\big) = \boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \underset{i\text{ 番目}}{\boldsymbol{v}_j} \otimes \cdots \otimes \underset{j\text{ 番目}}{\boldsymbol{v}_i} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_n$$

で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) V の線形変換 X, Y に対し，$[\Delta(X), \Delta(Y)] = \Delta([X, Y])$ が成り立つことを示せ．ただし，$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ は交換子を表す．

(2) $U = P_{1,2} + P_{2,3} + \cdots + P_{n-1,n} + P_{n,1}$ および $T = P_{n-1,n} \circ \cdots \circ P_{2,3} \circ P_{1,2}$ とおく．交換関係

$$[T, U] = 0, \qquad [U, \Delta(X)] = 0, \qquad [T, \Delta(X)] = 0$$

が成り立つことを示せ．ただし，X は V の任意の線形変換とする．

V の線形変換 E, F, H を

$$H\,|+\rangle = |+\rangle, \qquad H\,|-\rangle = -|-\rangle, \qquad E\,|+\rangle = F\,|-\rangle = 0, \qquad F\,|+\rangle = |-\rangle, \qquad E\,|-\rangle = |+\rangle$$

で定義すると，これらは Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2$ の交換関係 $[H, E] = 2E$, $[H, F] = -2F$, $[E, F] = H$ をみたす．また，(1) より $\Delta(E), \Delta(F), \Delta(H)$ を通して，W_n を Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2$ の表現空間と見なすことができる．

以下，$n = 4$ の場合を考える．また，簡単のため $|+\rangle \otimes |-\rangle \otimes |+\rangle \otimes |+\rangle \in W_4$ を $|{+}{-}{+}{+}\rangle$ のように略記する．

(3) W_4 を $\mathfrak{sl}_2$ の既約表現の直和に分解したときに現れる既約表現の次元および各既約表現の重複度を求めよ．

(4) $|{+}{+}{+}{+}\rangle \in W_4$ は T, U の同時固有ベクトルとなることを示し，その固有値をそれぞれ求めよ．また，$|{+}{+}{+}{+}\rangle$ を含む $\mathfrak{sl}_2$ の既約表現の次元と基底を求めよ．

(5) W_4 の元 ξ で，以下の条件 (a), (b), (c) をみたすものをすべて求めよ

(a) $\Delta(H)\xi = 2\xi$

(b) $\Delta(E)\xi = 0$

(c) ξ は T, U の同時固有ベクトルである．

B　第１８問

次で定義される遷移系 $(Q,\to)$ を考える．状態集合 Q は，$x,y,z\in\{-1,0,1\}$ であり，3成分のうちちょうど一つが 0 であるような三つ組 (x,y,z) 全体の集合である．遷移に関しては，$x,y,z\in\{\pm 1\}$ として，$xyz=1$ のときと $xyz=-1$ のときに応じて，それぞれ，

$$\begin{tikzcd}
& (x,y,0) \arrow[dr] & \\
(0,y,z) \arrow[ur] & & (x,0,z) \arrow[ll]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& (x,y,0) \arrow[dl] & \\
(0,y,z) \arrow[rr] & & (x,0,z) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

であるとする．これらで定まる24通り以外には，遷移は存在しないとする．無限遷移列 $\pi(0)\to\pi(1)\to\pi(2)\to\cdots$ のうちで，最初の状態 $\pi(0)$ が $q\in Q$ に等しいもの全体を $\Pi(q)$ と書くことにする．集合 $X\subseteq Q$ に対して，

$$\begin{aligned}
\mathbf{EG}(X) &= \{q\in Q \mid \exists\pi\in\Pi(q)\,\forall n\geq 0\ \pi(n)\in X\}\\
\mathbf{AF}(X) &= \{q\in Q \mid \forall\pi\in\Pi(q)\,\exists n\geq 0\ \pi(n)\in X\}
\end{aligned}$$

と定める．また $|X|$ で X の元の個数を表すとする．

(1) $\max\{|X|\,;\,\mathbf{EG}(X)=\emptyset\}$ を求めよ．

(2) $\max\{|X|\,;\,\mathbf{EG}(\mathbf{AF}(X))=\emptyset\}$ を求めよ．

ここで遷移系 $(Q,\to)$ とは有限集合の組であって，$\to\subseteq Q\times Q$ をみたすものとする．また，$(q,q')\in\to$ のかわりに $q\to q'$ と書く．