平成２６年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ａ　（筆記試験）

平成２５年　９月２日（月）
１３：００　～　１６：００

問題は全部で７題ある．Ａ１，Ａ２は必答問題である．Ａ３～Ａ７の中から２題選び，必答問題と合わせて**合計４題**解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**４枚の答案**，および**４枚の計算用紙**である．着手した問題数が４題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，４枚とすること．
指示に反したもの，**答案が４枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

A　第 1 問（必答）

実数 a, b が $1 < a < b$ をみたすとする．行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a & b & b \\ 1 & a & b & b \end{pmatrix}$$

が定義する線形写像 $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ を考える．

(1) $\mathrm{Ker} f = \left\{ v \in \mathbf{R}^4 \mid f(v) = 0 \right\}$ を求めよ．

(2) V を $\mathrm{Ker} f$ の $\mathbf{R}^4$ のユークリッド内積に関する直交補空間とする．V 上の二次形式 ${}^t v A v$ $(v \in V)$ は正定値であることを示せ．

A　第 2 問（必答）

関数 f は区間 $(0, \infty)$ で定義された実数値連続関数で，任意の $x > 0$, $y > 0$ に対して，

$$f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

が成り立つとする．

(1) α を有理数とするとき，

$$f(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha - 1} f(x)$$

となることを示せ．

(2) $f(x)$ は微分可能であることを示せ．

A　第3問

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の閉集合 A に対して

$$d(x) = \inf\{\|x-y\| \mid y \in A\}$$

とおく．ただし，次元 n は正の整数，$\|x\|$ は $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ のユークリッド・ノルム，すなわち

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{1/2}$$

を表す．

(1) d は $\mathbf{R}^n$ でリプシッツ連続であることを示せ．すなわち，ある定数 $L>0$ が存在して，任意の $x,y\in\mathbf{R}^n$ に対して

$$|d(x)-d(y)| \le L\|x-y\|$$

が成立することを示せ．

(2) d が A の外の点 x_0 で全微分可能とする．このとき d の x_0 での勾配 $(\mathrm{grad}\,d)(x_0)$ は

$$\|(\mathrm{grad}\,d)(x_0)\| = 1$$

をみたすことを示せ．ただし

$$(\mathrm{grad}\,d)(x) = \left(\frac{\partial d}{\partial x_1}(x),\ldots,\frac{\partial d}{\partial x_n}(x)\right), \quad (x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n)$$

である．

A　第4問

a を $|a|\neq 1$ なる実定数とする．n を正の整数とする．このとき，定積分

$$I_n = \int_0^{2\pi}\frac{\cos(n\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta$$

の値を求めよ．

A　第5問

区間 $[0,1]$ 上で定義された単調増加かつ正値な連続微分可能関数 $f(x)$ を考える．xy 平面上の曲線 $y=f(x)$ を空間 $\mathbf{R}^3$ 内で x 軸のまわりに回転してえられる曲面を W とする．$0 \leq p < q \leq 1$ となる p, q に対して，曲面 $\{(x,y,z) \in W \mid p \leq x \leq q\}$ の面積を $S(p,q)$ とする．また，$y=f(x)+1$ のグラフと x 軸および $x=p, x=q$ で囲まれた部分の面積を $T(p,q)$ とする．

関数 $f(x)$ が以下の条件 (a)，(b) をみたすとき，曲線 $(x,y)=(x,f(x))$ について，x を y の関数として表せ．

(a) $0 \leq p < q \leq 1$ となる任意の p, q に対して $S(p,q) = 2\pi T(p,q)$.

(b) $f(0)=1$.

A　第6問

複素数を成分とする3次正方行列全体がつくる9次元複素ベクトル空間を M_3 とする．M_3 の部分ベクトル空間 V が次の二つの性質 (a)，(b) をみたすとき，V の次元を求めよ．

(a) $A, B \in V$ ならば $AB = BA$.

(b) W が M_3 の部分ベクトル空間で $W \supset V, W \neq V$ ならば，ある $A, B \in W$ が存在して $AB \neq BA$.

A　第7問

空間 $\mathbf{R}^3$ 上のベクトル場

$$V(X) = (3y-3x,\ 2x-y-xz,\ xy-z) \quad (X=(x,y,z) \in \mathbf{R}^3)$$

に対し，微分方程式

$$X'(t) = V(X(t)) \quad (t \in \mathbf{R})$$

を考える．ここで $X(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $X'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$ である．この微分方程式の，$X_0 = X(0)$ を初期値とする解を $X(t, X_0)$ と書く．

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x^2+3y^2+3z^2-24z-2 \leq 0\}$$

とおく．

(1) ベクトル場 $V(X)$ の発散 $\operatorname{div} V$ を求めよ．

(2) $\{X(1,X_0) \in \mathbf{R}^3 \mid X_0 \in \Omega\} \subset \Omega$ が成り立つことを証明せよ．

(3) 集合 $\Omega \setminus \{X(1,X_0) \in \mathbf{R}^3 \mid X_0 \in \Omega\}$ の体積を求めよ．