平成２９年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ｂ　（筆記試験）

平成２８年　８月３０日（火）
１１：００　～　１５：００

問題は全部で１８題ある．その中から**３題**選んで解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名は記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**３枚の答案**，および**３枚の計算用紙**である．着手した問題数が３題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，３枚とすること．
指示に反したもの，**答案が３枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

B 第1問

pを素数とする．$L = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$とし，$M = \mathbf{Z} \oplus p\mathbf{Z} \oplus p^2\mathbf{Z}$をその部分群とする．$M$の部分群$N$で

$$M/N \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$$

をみたすものを全て考える．このとき次の問に答えよ．

(1) L/Nとして現れうる群の同型類を全て求めよ．

(2) (1)で求めた各同型類に対し，L/Nがその同型類に属するようなNの個数を求めよ．

B 第2問

pを素数，Sをp個の元からなる集合，Gを有限群，

$$\rho\colon G \times S \to S;\ (g, x) \mapsto g \cdot x$$

をGのSへの作用とする．ρが2重可移である，すなわち，任意の$x_1 \neq x_2 \in S$と任意の$y_1 \neq y_2 \in S$に対し，ある$g \in G$があって，$g \cdot x_1 = y_1$かつ$g \cdot x_2 = y_2$となるとき，以下の問に答えよ．

(1) Gの位数$|G|$は$p(p-1)$の倍数であることを示せ．

(2) $|G| = p(p-1)$となるようなGとSを一組挙げよ．

(3) $|G| = p(p-1)$となるようなGは(2)で挙げた群と同型になることを示せ．

B 第3問

多項式環の間の $\mathbf{C}$ 代数の準同型 φ を

$$\varphi\colon \mathbf{C}[X, Y, Z] \to \mathbf{C}[S, T]; \quad X \mapsto S,\ Y \mapsto ST,\ Z \mapsto T^2$$

で定め，φ の像を R とおく．

(1) $\mathbf{C}[X, Y, Z]$ のイデアル $\mathrm{Ker}\,\varphi$ の生成系のうち個数が最小のものを一つ求めよ．

(2) $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$ とし，$\mathfrak{m} = (S - a, ST - b, T^2 - c)$ が R の極大イデアルになると仮定する．R の $\mathfrak{m}$ における局所化 $R_{\mathfrak{m}}$ の極大イデアル $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$ が 2 元生成されないような (a, b, c) を全て求めよ．

B 第4問

m を 2 以上の整数とする．$L = \mathbf{C}(X, Y)$ とし，$K = \mathbf{C}(X^m + Y^m, X^mY^m)$ をその部分体とする．以下の問に答えよ．

(1) L は K の有限次 Galois 拡大であることを示し，その拡大次数を求めよ．

(2) L の K 上の Galois 群を $\mathrm{Gal}(L/K)$ で表す．$a \in \mathbf{C}$ を用いて $K(X + aY)$ と書ける $K \subset L$ の中間体の個数を求め，それぞれに対応する $\mathrm{Gal}(L/K)$ の部分群を決定せよ．

(3) $f(X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$ を m 次斉次対称式とし，$K' = K(f(X, Y))$ とおく．K' が K の Galois 拡大になるような $f(X, Y)$ を全て求めよ．

B 第5問

$\mathbf{R}^2$ にリーマン計量を

$$ds^2 = \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

で定める．実数 ρ は $0<\rho<\pi$ を満たすとして，

$$a = \cot\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

とおく．また，

$$D_\rho = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \le a^2\},$$
$$C_\rho = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 = a^2\}$$

とおく．$\mathbf{R}^2$ には順序づけられた座標 (x,y) から定まる向きを入れる．

(1) 上の計量 ds^2 についての曲線 C_ρ の長さを ρ で表わせ．

(2) 計量 ds^2 についての体積要素 ω を $\mathbf{R}^2$ 上の2次微分形式として求めよ．

(3) 微分形式の積分

$$A(D_\rho) = \int_{D_\rho}\omega$$

の値を ρ で表わし，極限値

$$\lim_{\rho\to\pi-0}\frac{A(D_\rho)}{(\pi-\rho)^2}$$

を求めよ．

B 第6問

$SL(2,\mathbf{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d \in \mathbf{C},\ ad - bc = 1 \right\}$ とする．

(1) $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbf{C})$ に対し，$M = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ の一次分数変換

$$\varphi_g \colon M \to M, \quad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

が C^∞ 写像となるように，M に C^∞ 級多様体の構造を与えよ．

(2) M 上の 1 次微分形式全体のなす空間を $\mathcal{E}^1(M)$ と表記する．線型写像 $T \colon C^\infty(M) \to \mathcal{E}^1(M)$ であって，次の 2 つの性質をみたすものをすべて求めよ．

- T は微分作用素である．
- $\varphi_g^* \circ T = T \circ \varphi_g^*$ がすべての $g \in SL(2,\mathbf{C})$ に対して成り立つ．

ここで，$T \colon C^\infty(M) \to \mathcal{E}^1(M)$ が微分作用素であるとは，M の各局所座標 $(V,(x,y))$ に対して，自然数 N と，V 上の C^∞ 関数 $a_{k,l}(x,y)$，$b_{k,l}(x,y)$ $(0 \le k,l \le N)$ が存在して，V 上で

$$Tf = \left(\sum_{0 \le k,l \le N} a_{k,l} \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l} \right) dx + \left(\sum_{0 \le k,l \le N} b_{k,l} \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l} \right) dy$$

と表されることをいう．

B 第7問

n は正の整数とする．直積空間 $\mathbf{C}\times\mathbf{R}$ の部分空間 $\widetilde{L}_n, \partial_+\widetilde{L}_n, \partial_-\widetilde{L}_n$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}\widetilde{L}_n = &\left\{(z,t)\in\mathbf{C}\times\mathbf{R}\,\middle|\,|z|\le 1\right\}\\ &\setminus\bigcup_{k=0}^{n-1}\left\{(z,t)\in\mathbf{C}\times\mathbf{R}\,\middle|\, t\in\mathbf{R}, \left|z-(1/2)e^{2\pi\sqrt{-1}(t+k)/n}\right|<1/(10n)\right\},\\ \partial_+\widetilde{L}_n =& \left\{(z,t)\in\widetilde{L}_n \mid |z|=1\right\},\\ \partial_-\widetilde{L}_n =& \bigcup_{k=0}^{n-1}\left\{(z,t)\in\widetilde{L}_n\,\middle|\, t\in\mathbf{R}, \left|z-(1/2)e^{2\pi\sqrt{-1}(t+k)/n}\right|=1/(10n)\right\}\end{aligned}$$

により定める．$\widetilde{L}_n$ の自己同相写像 $f\colon \widetilde{L}_n\to\widetilde{L}_n$ を

$$f(z,t)=(z,t+1)$$

により定め，f の生成する無限巡回群 $\langle f\rangle$ による $\widetilde{L}_n, \partial_+\widetilde{L}_n, \partial_-\widetilde{L}_n$ の商空間をそれぞれ

$$\begin{aligned}L_n &= \widetilde{L}_n/\langle f\rangle,\\ \partial_+L_n &= (\partial_+\widetilde{L}_n)/\langle f\rangle,\\ \partial_-L_n &= (\partial_-\widetilde{L}_n)/\langle f\rangle\end{aligned}$$

とする．また，連続写像 $\widetilde{g}\colon \partial_+\widetilde{L}_n\to\partial_-\widetilde{L}_n$ を

$$\widetilde{g}(z,t)=\left((1/2)e^{2\pi\sqrt{-1}t}+z/(10n), nt\right)$$

により定め，$\widetilde{g}$ が誘導する ∂_+L_n から ∂_-L_n への同相写像を g とする．ここで，$p\in\partial_+L_n$, $q\in\partial_-L_n$ について，$q=g(p)$ であるとき $q\sim' p$ とし，$\sim'$ が生成する同値関係を $\sim$ とする．そして，この同値関係による L_n の商空間を $M_n=L_n/\sim$ とする．

(1) 整数係数ホモロジー群 $H_*(L_n;\mathbf{Z})$ を求めよ．

(2) 整数係数1次ホモロジー群 $H_1(\partial_+L_n;\mathbf{Z})$ 及び $H_1(\partial_-L_n;\mathbf{Z})$ の生成系を適切に定め，g の誘導する写像 $g_*\colon H_1(\partial_+L_n;\mathbf{Z})\to H_1(\partial_-L_n;\mathbf{Z})$ を記述せよ．

(3) 整数係数ホモロジー群 $H_*(M_n;\mathbf{Z})$ を求めよ．

B 第8問

有理数全体のなす集合 $\mathbf{Q}$ を 1 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}$ からの相対位相によって位相空間とみなし，$\mathbf{Q}^*$ を $\mathbf{Q}$ の一点コンパクト化とする．すなわち，$\mathbf{Q}$ に含まれない点 $p \in \mathbf{Q}^*$ が存在して $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \cup \{p\}$ であり，$\mathbf{Q}^*$ の部分集合 U が開集合であるための条件は，U は $\mathbf{Q}$ の開集合である，または，U は p を含み，$\mathbf{Q} \setminus U$ は $\mathbf{Q}$ のコンパクト部分集合であることとする．

(1) $\mathbf{Q}$ の任意のコンパクト部分集合は内点を含まないことを示せ．

(2) $\mathbf{Q}^*$ の任意の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ に対して，次の条件 $(*)$ を満たす点 $x \in \mathbf{Q}^*$ は，存在するならば唯一であることを示せ．
$(*)$ x の任意の近傍 V に対して，ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して，$n \geq N$ ならば $x_n \in V$ である．

(3) $\mathbf{Q}^*$ は第二可算公理を満たさないことを示せ．ここで，位相空間 X が第二可算公理を満たすとは，X が高々可算な開基（開集合系の基底）を持つことである．

B 第9問

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，$1 < p < \infty$ とする．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X 上の実数値 $\mathcal{B}$-可測関数の列で，以下の二つの条件 (i), (ii) を満たすとする：

(i) 任意の $x \in X$ に対して，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

(ii) $\sup_{n\geq 1} \int_X |f_n(x)|^p \, d\mu(x) < \infty$.

g は X 上の実数値 $\mathcal{B}$-可測関数で，$\int_X |g(x)|^{\frac{p}{p-1}} \, d\mu(x) < \infty$ を満たすとする．以下の問に答えよ．

(1) M を正の実数とする．正の整数 n に対して，$A_{M,n} \in \mathcal{B}$ を

$$A_{M,n} = \{\, x \in X \mid |f_n(x)|^{p-1} \leq M|g(x)| \,\}$$

と定める．このとき，以下が成り立つことを証明せよ：

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_{M,n}} |f_n(x)g(x)| \, d\mu(x) = 0.$$

(2) 以下が成り立つことを証明せよ：

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x)g(x)| \, d\mu(x) = 0.$$

B 第10問

$f(z)$ を $\mathbf{C}$ 上の有理型関数とする．f の極でない任意の $z \in \mathbf{C}$ に対し，$z+1$ と $z-1$ は f の極でなく，$f(z) = f(z+1) = f(z-1)$ が成り立つとする．領域 $D = \{\, w \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \mid -\pi < \arg w < \pi \,\}$ における $\log w$ の主値 (または任意の分枝) を $z = \ell(w)$ で表わし，D において

$$g(w) = f\left(\frac{1}{2\pi i}\,\ell(w)\right)$$

とおく．このとき，$g(w)$ は領域 $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ において一価有理型な関数に解析接続されることを示せ．

B 第11問

以下で考える Banach 空間は実数体上で定義されるものとする．$\mathbf{R}$ の開区間からなる集合 $\{(a,a+1) \mid a \in \mathbf{Q}\}$ の全ての元を番号付け，それらを $I_1, I_2, I_3, \ldots$ と記す．各 $n \in \mathbf{N}$ に対し $\chi_n \colon \mathbf{R} \to \{0,1\}$ で I_n の定義関数を表す．有界線型作用素 $T \colon \ell^1(\mathbf{N}) \to L^1(\mathbf{R})$ を次で定義する：

$$T\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \chi_n, \quad \xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1(\mathbf{N}).$$

(1) T の共役作用素 $T^* \colon L^1(\mathbf{R})^* \to \ell^1(\mathbf{N})^*$ は全射でないことを示せ．

(2) 線型作用素 $\sigma \colon L^1(\mathbf{R}) \to L^1(\mathbf{R})$ を $(\sigma f)(x) = f(x-1)$, $f \in L^1(\mathbf{R})$, $x \in \mathbf{R}$ で定める．任意の $\varphi \in \operatorname{Ker} T^*$ と任意の $f \in L^1(\mathbf{R})$ に対し $\varphi(\sigma f) = \varphi(f)$ を示せ．

B 第12問

O を $\mathbf{R}^2$ の原点，領域 D を $D := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ とする．次の二つの境界値問題を考える．

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in D, \\ u(\cos\theta, \sin\theta) = 2\cos 3\theta - \sin\theta\cos\theta, & \theta \in [-\pi,\pi), \end{cases} \tag{P1}$$

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in D \setminus \{O\}, \\ u(\cos\theta, \sin\theta) = 2\cos 3\theta - \sin\theta\cos\theta, & \theta \in [-\pi,\pi). \end{cases} \tag{P2}$$

ここで，$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とする．次の問に答えよ．

(1) xy 座標系は，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ により，$r\theta$ 座標系に変換される．このとき，偏微分作用素 Δ を，$r\theta$ 座標系により表示すると，次のようになることを証明せよ．

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

(2) D の $\mathbf{R}^2$ における閉包を $\overline{D}$ で表す．$\overline{D}$ 上連続で D 上 C^2 級になるような問題 (P1) の解 $u(x,y)$ を一つ求めよ．ここで，解は $r\theta$ 座標系ではなく，xy 座標系を用いて表示すること．

(3) $\overline{D}$ 上連続で D 上 C^2 級になるような問題 (P1) の解は一意的であることを証明せよ．

(4) (2) で求めた解は，問題 (P2) の解でもある．その他の (P2) の解で，$\overline{D} \setminus \{O\}$ 上連続で $D \setminus \{O\}$ 上 C^2 級になるものを一つ求めよ．但し，xy 座標系を用いて表示せよ．

B 第13問

$\mathbf{N}=\{1,2,\ldots\}$ とする．θ を正の定数，$p \geq 1$ とする．確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上で定義された確率変数

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, N_1, N_2, N_3, \ldots$$

は独立であるとし，各 $j \in \mathbf{N}$ に対して X_j の分布は確率密度関数

$$\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \quad (x>0)$$

を持ち，N_k $(k \in \mathbf{N})$ は

$$\mathrm{P}\left[N_k = y\right] = 2^{-y} \quad (y \in \mathbf{N})$$

を満たすとする．$M_n = \max_{k=1,\ldots,n} N_k$ とする．

(1) $P\left[\lim_{n\to\infty} M_n = \infty\right] = 1$ となることを示せ．

(2) $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$S_n = \frac{\sum_{j=1}^{M_n} X_j}{M_n}$$

とする．$n \to \infty$ のとき S_n が概収束かつ L^p 収束することを示せ．また，S_n の概収束極限を S_∞ とするとき，

$$\sqrt{M_n}(S_n - S_\infty)$$

の極限分布を求めよ．

(3) $n \in \mathbf{N}$ とする．$t>0$ の関数

$$F_n(t) = \prod_{k=1}^{n}\left\{\prod_{j=1}^{N_k}\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{X_j}{t}\right)\right\}$$

を最大にする t の値を T_n で表す．$n \to \infty$ のとき T_n が概収束かつ L^p 収束することを示せ．

B 第14問

次の各問に答えよ．

(1) 任意の複素数 α に対し，次の微分方程式と初期条件を満たす整関数 $u(z)$ を求めよ．

$$z\frac{d^2u}{dz^2}+(2-z)\frac{du}{dz}-\alpha\,u=0\,,\qquad u(0)=1. \tag{E}$$

(2) 次数 n の多項式 $p_n(z)$ が (E) を満たすような α の値，及びその α に対応する $p_n(z)$ をすべて求めよ．

(3) 小問 (2) で定められた多項式 $p_n(z)$ が任意の n に対して下記の関係式を満たすような n の関数 $c(n)$ と，z の関数 $w(z)$ を一つ求めよ．

$$p_n(z)\;=\;\frac{c(n)}{w(z)}\,\frac{d^n}{dz^n}\Big(z^n w(z)\Big).$$

B 第15問

次の各問に答えよ．

(1) 次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1+x}{1-x} \le 1+4x \qquad \left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right).$$

(2) $v(t)$ を $[0,T]$ で定義された C^3 級関数とする．ただし，T は正の定数である．このとき，次の不等式を満たす正定数 α が存在することを示せ．

$$\left|\frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dt}(t) + \frac{dv}{dt}(t+h)\right)\right| \le \alpha h^2 \left\|\frac{d^3v}{dt^3}\right\|$$
$$(0 \le t \le T,\ h > 0,\ 0 < t+h \le T).$$

ここで，$[0,T]$ で定義された連続関数 $w(t)$ に対して，

$$\|w\| = \max_{t\in[0,T]} |w(t)|$$

と書いている．

(3) $f(s)$ を $\mathbf{R}$ で定義された関数で，

$$|f(s)-f(r)| \le L|s-r| \qquad (s, r \in \mathbf{R})$$

を満たすものとする．L は正定数である．常微分方程式の初期値問題

$$\frac{du(t)}{dt} = f(u(t)) \quad (0 \le t \le T), \quad u(0) = 1 \tag{$*$}$$

に対する台形法

$$\frac{U_{n+1}-U_n}{\tau} = \frac{f(U_n)+f(U_{n+1})}{2} \quad (0 \le n \le N-1), \quad U_0 = 1 \tag{$**$}$$

を考える．ここで，N は正の整数，$\tau = T/N$ としている．$\tau L < 2$ ならば，$(**)$ を満たす $\{U_n\}_{n=1}^N$ が唯一存在することを示せ．

(4) $(*)$ の解 $u(t)$ が $[0,T]$ 上の C^3 級関数であり，さらに，$\tau L < 1$ であるとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\max_{0\le n\le N} |u(n\tau) - U_n| \le \beta \left\|\frac{d^3u}{dt^3}\right\| \tau^2.$$

ただし，β は，α，T，L のみに依存する正定数である．

B 第16問

質量 m の質点が，直線上をポテンシャル $U(x)$ で表される力を受けて運動している．ただし，x は直線の座標，$U(x)$ は滑らかな実数値関数である．以下の問に答えよ．

(1) 質点が閉区間 $[x_{\mathrm{min}}, x_{\mathrm{max}}]$ を往復運動しているとき，この往復運動の周期 T を積分で表せ．

以下では，$U(x)$ は 4 次多項式であるとし，全エネルギーが E の運動を考える．ただし，$U(x) = E$ は相異なる 4 実根 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ を持ち，閉区間 $I_1 = [x_1, x_2]$ 上の往復運動 $\gamma_1(t)$ と閉区間 $I_2 = [x_3, x_4]$ 上の往復運動 $\gamma_2(t)$ がどちらも存在すると仮定する．

(2) γ_1, γ_2 の周期をそれぞれ T_1, T_2 とするとき，$T_1 = T_2$ であることを証明せよ．

(3) 全エネルギー E を徐々に大きくすると I_1 の右端 x_2 と I_2 の左端 x_3 が互いに近づき，$E = E_*$ のときに一致するものとする．周期 T_1 を E の関数とみなすとき，それは $E \nearrow E_*$ でどう振る舞うか？

B 第17問

以下のような連立常微分方程式の初期値問題を考える.

$$\frac{du(t)}{dt} = r_1 u(t) - \alpha u(t) - \frac{\beta u(t)v(t)}{u(t)+v(t)},$$
$$\frac{dv(t)}{dt} = r_2 v(t) + \alpha u(t) + \frac{\beta u(t)v(t)}{u(t)+v(t)}.$$

ただし初期条件を

$$u(0) = u_0 > 0, \quad v(0) = v_0 > 0$$

と与え，$t > 0$ での解を考える．また r_1, r_2, α, β は与えられた正の定数で，$r_1 > r_2$ であると仮定する．上記の連立常微分方程式は $t > 0$ において一意的な解を持つと仮定する．

(1) 任意の $t > 0$ に対して，$u(t) > 0, v(t) > 0$ であることを示せ．

(2) $z(t)$ を以下のように定義する：

$$z(t) := \frac{u(t)}{u(t)+v(t)}.$$

このとき $z(t)$ を求めよ．

(3) $n(t)$ を $n(t) := u(t) + v(t)$ と定義する．このとき

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{n}\frac{dn}{dt}$$

を求めよ．

B 第18問

$a < b$ を正の実数とする. 複素平面上に $a_m = ae^{i\cdot 2m\pi/5}$ $(m \in \mathbf{Z}/5\mathbf{Z})$ および $b_n = be^{i\cdot 2n\pi/10}$ $(n \in \mathbf{Z}/10\mathbf{Z})$ をとる. これらを頂点とし, 有向辺として, $a_m \to a_{m+1}$, $b_n \to b_{n-1}$, $b_{2m+2} \to b_{2m}$, $b_{2m} \to a_m$, $a_{m+1} \to b_{2m}$ を取ると, 15 個の頂点と 30 個の辺からなる有向グラフができる. この有向グラフの二つのコピー G_1, G_2 を取り, 点 b_n に対応する G_1, G_2 の頂点をそれぞれ v_n, w_n $(n \in \mathbf{Z}/10\mathbf{Z})$ と書くことにする. G_2 と同じ頂点を持ち, 辺の向きがすべて G_2 と反対向きであるような有向グラフを G_2^- とする (すなわち, G_2^- に辺 $x \to y$ が存在することと, G_2 に辺 $y \to x$ が存在することが同値). 各 $n \in \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ に対し, G_1 の頂点 v_n と G_2^- の頂点 w_{5-n} を同一視し, それに応じ G_1 の有向辺 $v_n \to v_{n-1}$ と G_2^- の有向辺 $w_{5-n} \to w_{5-(n-1)}$ を同一視して, 20 個の頂点と 50 個の辺からなる有向グラフ G を作る. その頂点の集合を Q とする. G の有向辺に沿った無限パス $\pi(0) \to \pi(1) \to \pi(2) \to \cdots$ のうちで, 最初の頂点 $\pi(0)$ が $q \in Q$ に等しいもの全体を $\Pi(q)$ と書くことにする. 集合 $X \subseteq Q$ に対して,

$$\begin{aligned}\mathbf{EG}(X) &= \{q \in Q\,;\, \exists\pi \in \Pi(q)\ \forall n \geq 0\ \pi(n) \in X\},\\ \mathbf{AF}(X) &= \{q \in Q\,;\, \forall\pi \in \Pi(q)\ \exists n \geq 0\ \pi(n) \in X\}\end{aligned}$$

と定める. また $|X|$ で X の元の個数を表すとする.

(1) $\min\{|X|\,;\, \mathbf{AF}(X) = Q\}$ を求めよ.

(2) $\min\{|X|\,;\, \mathbf{AF}(\mathbf{EG}(X)) = Q\} \leq 10$ を示せ.