平成１８年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目 A　（筆記試験）

平成１７年８月２９日（月）
１３：００ ～ １６：００

問題は全部で７題ある．A1，A2 は必答問題である．A3〜A7 の中から２題選び，必答問題と合わせて**合計４題**解答すること．

（１）解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**４枚の答案**，および**４枚の計算用紙**である．着手した問題数が４題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，４枚とすること．
指示に反したもの，**答案が４枚でないものは無効**とする．

（４）解答用紙の裏面を使用する場合は，表面の右下に「裏面使用」と明記すること．

A 第１問 (必答)

４行５列の実数を成分とする行列 A を考える．次のそれぞれの場合について，A の第１列と第２列と第３列の３つのベクトルが生成する $\mathbf{R}^4$ の部分空間の次元の可能性をすべて求めよ．

(1) A に行基本変形を何回か行なって

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

にできる場合．

(2) A に行基本変形と列基本変形をそれぞれ何回か行なって

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

にできる場合．

A 第２問 (必答)

(1) 正の整数 n に対し，定積分 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \, d\theta$ の値を求めよ．

(2) $\mathbf{R}$ 上の関数

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos\theta) \, d\theta$$

を $x = 0$ を中心としてテーラー展開し，その $n+1$ 次以上の項を無視して得られる多項式を $p_n(x)$ とする．$p_n(x)$ を求めよ．

(3) K を $\mathbf{R}$ の有界な部分集合とする．$n \to \infty$ のとき $p_n(x)$ は $f(x)$ に K 上一様収束することを示せ．

A 第３問

V を３次元複素ベクトル空間とし，V^* をその双対空間とする．V^* の元 f の核（kernel）を $\mathrm{Ker}(f)$ で表す．$f_1, f_2, f_3 \in V^*$ について，

$$\begin{aligned} V_1 =& \mathrm{Ker}(f_1) \cap \mathrm{Ker}(f_2), \\ V_2 =& \mathrm{Ker}(f_2) \cap \mathrm{Ker}(f_3), \\ V_3 =& \mathrm{Ker}(f_3) \cap \mathrm{Ker}(f_1) \end{aligned}$$

と定める．このとき，以下の条件 (a) と (b) が同値であることを示せ．

(a) V は部分空間 V_1, V_2, V_3 の直和である．

(b) f_1, f_2, f_3 は一次独立である．

A 第４問

$\mathbf{R}^2$ における同値関係 $\sim$ を以下のように定義する．

$$(x, y) \sim (x', y'), \qquad (x, y), (x', y') \in \mathbf{R}^2$$

とは，整数 n と有理数 ξ が存在して

$$x' = x + n, \quad y' = y + \xi$$

と表されること，とする．この同値関係による同値類の集合を $X = \mathbf{R}^2/\sim$ とおき，$\pi : \mathbf{R}^2 \to X$ を自然な射影とする．X の要素 a_1, a_2 について，$\pi(\mathbf{x}_1) = a_1$, $\pi(\mathbf{x}_2) = a_2$ となる $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{R}^2$ に対する $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ の下限を $\mathrm{d}(a_1, a_2)$ とおく．つまり，

$$\mathrm{d}(a_1, a_2) = \inf \{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \ ; \ \pi(\mathbf{x}_1) = a_1, \ \pi(\mathbf{x}_2) = a_2\}$$

とする．ここで $\|\mathbf{x}\|$ はベクトル $\mathbf{x}$ の通常のノルムを表す．

(1) $a, b, c \in X$ に対して，不等式

$$\mathrm{d}(a, c) \leq \mathrm{d}(a, b) + \mathrm{d}(b, c)$$

を示せ．

(2) $a, b \in X$ に対して，$\mathrm{d}(a, b) = 0$ ならば $a = b$ が成立するかどうかを述べよ．

A 第５問

次の積分を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+\lambda}dx \qquad (0 \neq \lambda \in \mathbf{R}).$$

ただし，被積分関数 $f(x)$ がある点 $a \in (0,\infty)$ を特異点とし a 以外で連続である場合は，$\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ は主値積分

$$\lim_{\varepsilon \to +0}\left(\int_0^{a-\varepsilon} f(x)dx + \int_{a+\varepsilon}^\infty f(x)dx\right)$$

をとるものとする．

A 第６問

$\varphi(x)$ と $f(x)$ をそれぞれ実数の区間 $1 \le x < \infty$ において定義された実数値連続関数と実数値 C^1 級関数とし，これらが次の３条件をみたすと仮定する．

(a) $\varphi(x) \ge 0 \qquad (x \ge 1)$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \varphi(x)dx < \infty$

(c) $f'(x) \le \varphi(x)f(x) \qquad (x \ge 1)$

このとき $f(x)$ が区間 $1 \le x < \infty$ において上に有界であることを示せ.

A 第７問

区間 $(0,\infty)$ 上のコンパクトな台をもつ実数値連続関数 $a(x)$ について，実数 μ をパラメータとする積分

$$I(\mu) = \int_0^\infty e^{i\mu x^2/2}a(x)dx$$

を考える．ここで $i = \sqrt{-1}$ である．$a(x)$ が C^N 級関数（ただし N は正の整数）ならば $I(\mu) = O(\mu^{-N}) \qquad (\mu \to +\infty)$ であることを示せ．