平成１７年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ａ　（筆 記 試 験）

平成１６年　８月３０日（月）

１３：００　～　１６：００

問題は全部で７題ある。Ａ１，Ａ２は必修問題である。

Ａ３～Ａ７の中から２題選び、合計 4題解答すること。

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること。
各解答用紙の所定欄に各自の氏名、受験番号と解答する問題の番号を記入すること。

（２）　各計算用紙の上部に各自の受験番号を明記すること。ただし、氏名は記入してはならない。

（３）　試験終了後に提出するものは、１枚１題ずつ４枚の答案用紙及び４枚の計算用紙である。着手した問題数が４題にみたない場合には、氏名と受験番号のみを記した白紙答案を補い、４枚とすること。
指示に反したもの、提出答案用紙が 4枚でないものは無効とする。

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は、表面右下に「裏面使用」と明記すること。

A 第１問（必修）

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，$AB\,{}^t\!A = \alpha B$ となる零でない２行２列の実対称行列 B と実数 α をすべて求めよ．ただし ${}^t\!A$ は A の転置行列を表す.

A 第２問（必修）

実数 $\mathbf{R}$ 上の関数 $f(x)$ を，$x > 0$ のとき $f(x) = e^{-1/x}$，$x \leq 0$ のとき $f(x) = 0$ で定義する．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上の C^∞ 級関数であることを示せ.

(2) $n = 1, 2, ...$ とするとき，n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ に対し，$\mathbf{R}$ 上で

$$f(x) = \int_0^x p_n(x-t) f^{(n)}(t)dt \qquad (*)$$

を満たす x の多項式 $p_n(x)$ を求めよ.

(3) $(*)$ を満たす多項式 $p_n(x)$ は各自然数 n に対して一つに限るか，理由をつけて述べよ.

A 第３問

$\mathbf{R}_+$ を正の実数全体の集合とし，$f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ を狭義の単調増加関数とする．つまり，$x, y \in \mathbf{R}_+$ に対して，$x < y$ ならば $f(x) < f(y)$ を満たすと仮定する．このような f に対して

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|, \quad x, y \in \mathbf{R}_+$$

とおく.

(1) d_f は $\mathbf{R}_+$ の距離を定めることを示せ.

(2) 距離 d_f について $\mathbf{R}_+$ が完備ならば f は通常の意味で連続関数であることを示せ.

(3) f は連続関数とする．距離 d_f について $\mathbf{R}_+$ が完備となるための必要十分条件を

$$\lim_{x \to +0} f(x) \quad 及び \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

を用いて与え，その理由を述べよ.

A 第4問

$V = M_n(\mathbf{R})$ を実係数 $n \times n$ 行列全体のなすベクトル空間とし，$\wedge^2 V$ を V の2次の外積とする．$a = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ に対して $\mathrm{tr}(a) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ と定義する．次の問いに答えよ．

(1) $\wedge^2 V$ 上の交代形式 ϕ で，V のすべての元 a, b, x, y に対して

$$\phi(a \wedge b, x \wedge y) = \mathrm{tr}(xayb - xbya)$$

を満たすものが存在することを示せ．

(2) e_{ij} を (i, j) 成分が1で他の成分が0となる $n \times n$ 行列とするとき，$\mathrm{tr}(e_{ij}e_{kl}e_{pq})$ を求めよ．ただし i, j, k, l, p, q は n 以下の正整数である．

(3) (1)で求めた ϕ は非退化であること，すなわち，すべての $w \in \wedge^2 V$ に対して $\phi(u, w) = 0$ を満たす $\wedge^2 V$ の元 u は0に限ることを示せ．

A 第5問

$\mathbf{R}^2$ を2次元ユークリッド空間とし，$S^1 = \left\{ v \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; |v| = 1 \right\}$ とする．2行2列の正則実行列全体の集合を $\mathrm{G}L(2, \mathbf{R})$ とおき，$\mathrm{G}L(2, \mathbf{R})$ の要素 $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le 2\\1\le j\le 2}}$ と $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le 2\\1\le j\le 2}}$ の距離 $d(A, B)$ を

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(a_{ij} - b_{ij})^2}$$

によって定義し，距離空間とみなす．$L \in \mathrm{G}L(2, \mathbf{R})$ に対して写像 $f_L : S^1 \to S^1$ を

$$f_L(v) = L(v)/|L(v)|$$

によって定義する．次の (a) と (b) の2つの集合がそれぞれ $\mathrm{G}L(2, \mathbf{R})$ における開集合であるか否かを判定せよ．

(a) $\left\{ L \in \mathrm{G}L(2, \mathbf{R}) \;\middle|\; \#\mathrm{Fix}\,(f_L) < \infty,\ 0 < \#\mathrm{Fix}\,(f_L) < \#\mathrm{Fix}\,(f_L^2) \right\}$,

(b) $\left\{ L \in \mathrm{G}L(2, \mathbf{R}) \;\middle|\; \forall m \in \mathbf{N},\quad 0 < \#\mathrm{Fix}\,(f_L^m) < \infty \right\}$.

ただし, $\mathbf{N}$ は1以上の整数全体の集合，また $m \in \mathbf{N}$ に対し，f_L^m は m 個の f_L を合成した写像を表し，$f_L^1 = f_L$，$f_L^2 = f_L \circ f_L$ である．さらに $f_L^m(x) = x$ を満たす $x \in S^1$ の個数を $\#\mathrm{Fix}\,(f_L^m)$ と表す．

A 第6問

a, b, r を $-r < a < b < r$ を満たす3つの実数とする．$\mathbf{C} \setminus [a, b]$ を複素数全体 $\mathbf{C}$ の中での $[a, b] = \left\{ x \in \mathbf{R} \,\middle|\, a \leq x \leq b \right\}$ の補集合とする．以下の問いに答えよ．

(1) x が実数かつ $x > b$ のとき $\log \dfrac{x-a}{x-b}$ で与えられる関数は $\mathbf{C} \setminus [a, b]$ 上の一価正則関数 $\log \dfrac{z-a}{z-b}$ に拡張されることを示せ．

(2) C を原点を中心とする半径 r の円周とするとき，次の複素積分の値を求めよ．ただし積分路の向きは反時計回りとする．

$$\int_C e^z \log \frac{z-a}{z-b}\, dz$$

A 第7問

f を $\mathbf{R}$ から $\mathbf{C}$ への有界な一様連続関数とする．S を $\mathbf{R}$ 上の非負値関数 $h(r) \geq 0$ $(r \in \mathbf{R})$ で $\mathbf{R}$ 上広義リーマン積分可能なものの全体とする．関数 $\varphi \in S$ に対し

$$(\varphi * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-r) f(r) dr$$

と定義する．ただし積分は $\mathbf{R}$ 上の広義リーマン積分を意味する．このとき与えられた $A \in \mathbf{C}$ に対し以下の2条件 (a), (b) は互いに同値であることを示せ．

(a) 極限

$$\lim_{t \to \infty} f(t)$$

が存在して A に等しい．

(b) 任意の $\varphi \in S$ に対し極限

$$\lim_{t \to \infty} (\varphi * f)(t)$$

が存在して

$$A \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(r) dr$$

に等しい．