平成２８年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ｂ　（筆記試験）

平成２７年 9月 1日（火）
１１：００ ～ １５：００

問題は全部で１８題ある．その中から**３題**選んで解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名，受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名は記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**３枚の答案**，および**３枚の計算用紙**である．着手した問題数が３題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙答案を補い，３枚とすること．
指示に反したもの，**答案が３枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

B 第1問

群 G は $\mathbf{Z}$ と同型な正規部分群 N を持ち, G/N は n 次巡回群 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ と同型であるとする. ただし, n は 2 以上の整数とする.

(1) n が奇数であるとき G がアーベル群であることを示せ.

(2) G の構造を決定せよ.

B 第2問

X, Y を変数とする多項式環を $\mathbf{C}[X, Y]$ とし, 商環

$$\mathbf{C}[X, Y]/(X^2Y + XY^2 - XY)$$

を A とおく. また, $X, Y \in \mathbf{C}[X, Y]$ の A での像をそれぞれ $\overline{X}, \overline{Y}$ とおく.

(1) A の素イデアルをすべて求めよ.

(2) 環 A の $\mathbf{C}$ 上の自己同型 φ であって

$$\varphi(\overline{X}) = \overline{Y}, \qquad \varphi(\overline{Y}) = -\overline{X} - \overline{Y} + 1$$

を満たすものがただひとつ存在することを示せ.

(3) (2) の φ を用いて A の部分環 B を

$$B = \{a \in A \mid \varphi(a) = a\}$$

で定める. $\mathbf{C}$ 上の環の単射準同型 $\psi : B \to \mathbf{C}[t]$ で商ベクトル空間 $\mathbf{C}[t]/\psi(B)$ が有限次元になるものをひとつ構成し, その ψ に対し $\mathbf{C}[t]/\psi(B)$ の次元を求めよ. ただし, $\mathbf{C}[t]$ は t を変数とする多項式環である.

B 第3問

X を変数とする実数係数の有理関数体 $\mathbf{R}(X)$ を K とし, K の部分体

$$\mathbf{R}\left(X^4 - \frac{1}{X^4}\right)$$

を F とおく. K の F 上のガロア閉包を L とする.

(1) L の F 上の拡大次数 $[L:F]$ を求めよ.

(2) L の F 上のガロア群 $\mathrm{Gal}(L/F)$ は位数 8 の元をもつことを示せ.

(3) 体の拡大 L/F の 4 次部分拡大をすべて求めよ.

B 第4問

m を正の整数とする. x, y, z, w を変数とする 4 変数多項式環 $\mathbf{C}[x, y, z, w]$ の部分集合

$$S = \{x^i y^j z^k w^\ell \mid i, j, k, \ell \geq 0,\ \ i + j = k + \ell = m\}, \quad S_p = \{x^i y^j z^k w^\ell \in S \mid i + k = p\}$$

が生成する複素線型部分空間をそれぞれ W, W_p とする. ただし, p は $0 \leq p \leq 2m$ なる整数とする. さらに線型変換 $E, F : W \to W$ を

$$E = y\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial z}, \qquad F = x\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial w}$$

と定め, $H = EF - FE$ とおく.

(1) H のすべての固有値およびその重複度を求めよ.

(2) $0 \leq p < 2m$ に対し $F(W_p) \subseteq W_{p+1}$ を示せ.

(3) 任意の $0 \leq p \leq m$ および $n \geq 1$ に対し, 複素数 $a_n^{(p)}$ が存在し, すべての $v \in W_p \cap \mathrm{Ker}\, E$ に対して

$$E^n F^n(v) = a_n^{(p)} v$$

が成り立つことを示せ. さらに, $a_n^{(p)}$ を具体的に求めよ.

(4) $0 \leq p < m$ に対して $F^{2m-2p}|_{W_p} : W_p \to W_{2m-p}$ は全単射であることを示せ.

B 第5問

3 次元実射影空間を

$$\mathbf{R}P^3 = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mid (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^4 - \{0\}\}$$

と斉次座標により表し，その部分集合 X, Y を

$$X = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbf{R}P^3 \mid x_0 x_3 = x_1^2 + 2k x_1 x_2 + x_2^2\},$$

$$Y = \{(0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbf{R}P^3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}$$

とする．ただし，k は実定数とする．

(1) X が $\mathbf{R}P^3$ の滑らかな部分多様体になるための k の条件を求めよ．

以下，k は (1) で求めた条件を満たすとする．

(2) $X \cap Y$ が相対位相のもとで位相多様体になるための k の条件を求めよ．

(3) $X \cap Y$ の各点 p において X と Y の接空間 T_pX, T_pY を $T_p\mathbf{R}P^3$ の部分空間とみなす．そのとき，$T_pX \cap T_pY$ の次元を求めよ．

B 第6問

$\mathbf{C}^4$ の部分位相空間

$$X = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbf{C}^4 \mid z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 1\},$$
$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in X \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}\}$$

に対し，連続写像 $\pi : X \to S$ を

$$\pi(z_1, z_2, z_3, z_4) = \left(\frac{a_1}{\sqrt{1+B}}, \frac{a_2}{\sqrt{1+B}}, \frac{a_3}{\sqrt{1+B}}, \frac{a_4}{\sqrt{1+B}}\right)$$

で定める．ただし，ここで $k = 1, 2, 3, 4$ に対し

$$z_k = a_k + b_k\sqrt{-1} \quad (a_k, b_k \in \mathbf{R}), \qquad B = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2$$

とおいた．

(1) π の像が S に含まれることを確かめ，π はホモトピー同値写像であることを示せ．

(2) 連続写像 $f : S \to X - S$ であって，合成写像 $\pi \circ f$ が S の恒等写像 id_S と一致するようなものは存在するか．存在するならば具体的にひとつ構成し，存在しないならばその証明を与えよ．

B 第7問

複素平面と数直線の直積空間 $X = \mathbf{C} \times \mathbf{R}$ における変換 t_1, t_2, α を次のように定義する．

$$t_1 : (z, x) \mapsto (z+1, x),$$
$$t_2 : (z, x) \mapsto (z+\xi, x),$$
$$\alpha : (z, x) \mapsto (\omega z, x+1).$$

ここで，z, x は，それぞれ，$\mathbf{C}, \mathbf{R}$ の座標であり，

$$\xi = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \quad \omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

とする．ただし，i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ である．変換 t_1, t_2, α で生成される群を Γ とおく．

(1) 商空間 $M = X/\Gamma$ はコンパクト3次元 C^∞ 級多様体の構造をもつことを示せ．

(2) 整係数ホモロジー群 $H_*(M; \mathbf{Z})$ を求めよ．

B 第8問

$\mathbf{R}^3$ 上の 2 次形式 $Q(u) = x^2 + y^2 - z^2$（ただし，$u = {}^t(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$）に対して，

$$M = \{u \in \mathbf{R}^3 - \{0\} \mid Q(u) = 0\},$$
$$SO(2,1) = \{g \in SL(3, \mathbf{R}) \mid \text{すべての } u \in \mathbf{R}^3 \text{ に対して } Q(gu) = Q(u)\}$$

と定義する．ただし，${}^t(\cdots)$ は転置を表す．また，M には相対位相を入れる．

(1) M は C^∞ 級多様体の構造をもち，群 $SO(2,1)$ は M に推移的に作用することを示せ．

(2) $M \cap \{{}^t(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid xyz \neq 0\}$ 上の微分形式

$$-\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)dz + \left(\frac{x}{z} - \frac{z}{x}\right)dy - \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{y}\right)dx$$

は M 上の C^∞ 級の微分形式に拡張できることを示せ．

以下，(2) で得られた M 上の微分形式を α とする．

(3) 微分形式 α は $SO(2,1)$ の作用で不変であることを示せ．

(4) 実数 ℓ に対して

$$\beta_\ell = (x^2 + y^2 + z^2)^\ell \alpha$$

とおく．β_ℓ が M 上の閉形式となるための ℓ に関する条件を求めよ．また β_ℓ は完全形式かどうかを判定せよ．

B 第9問

複素平面 $\mathbf{C}$ 内の 3 点 w_0, w_1, w_2 を頂点とする三角形の内部を T とする．頂点 w_j ($j = 0,1,2$) における内角を $\alpha_j \pi$（ただし，$0 < \alpha_j < 1$）とおく．上半平面 $H = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ から T の上への双正則写像が，H のリーマン球面内での閉包 $H \cup \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ への連続な拡張 f を持ち，以下が成り立つとする．

$$f(0) = w_0, \qquad f(1) = w_1, \qquad f(\infty) = w_2.$$

(1) 円板 $D = \left\{z \in \mathbf{C} \,\middle|\, |z| < 1\right\}$ で定義された正則関数 φ で，

$$f(z) = z^{\alpha_0}\varphi(z) + w_0 \quad (z \in H \cap D), \qquad \text{かつ} \qquad \varphi(0) \neq 0$$

を満たすものが存在することを示せ．

(2) $F(z) = \log f'(z)$ とおくとき $F'(z)$ は D 上の有理型関数に解析接続され，その有理型関数は $z = 0$ において 1 位の極を持ち，その留数が $\alpha_0 - 1$ であることを示せ．

(3) f は次の微分方程式を満たすことを示せ．

$$f''(z) = \left(\frac{\alpha_0 - 1}{z} + \frac{\alpha_1 - 1}{z - 1}\right) f'(z).$$

B 第10問

$r > 0$ を定数，

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; \frac{r^2}{4} < x^2 + (y - r)^2 < r^2\right\}$$

とする．A の閉包を含む開集合で定義された C^2 級実数値関数 u が以下の条件を満たすとする．

$$u(0,0) = 0, \qquad \partial A - \{(0,0)\} \text{ 上で } u > 0, \qquad A \text{ 上で } \Delta u \leq 0.$$

ただし，∂A は A の境界を表し，$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ とする．

また，a, b を実定数とし，関数 v を次のように定める．

$$v(x, y) = a\left(e^{-b\left(x^2 + (y-r)^2\right)} - e^{-br^2}\right), \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

(1) A 上で $\Delta v > 0$ かつ ∂A 上で $u \geq v$ となるような $a, b > 0$ がとれることを示せ．

(2) (1) のように a, b をとるとき，$w = u - v$ は A 内に極小点を持たないことを示せ．

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,0) > 0$ を示せ．

B 第11問

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，f, f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を X 上の μ について可積分な非負実数値可測関数とする．

(1) 次を示せ．

$$\lim_{K \to \infty} \int_{\{x \in X \mid f(x) \geq K\}} f(x)\, d\mu(x) = 0.$$

(2) $\mu(X) < \infty$ とする．μ についてほとんどすべての $x \in X$ に対して $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ であり，かつ

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

を満たすとする．このとき，次を示せ．

$$\lim_{K \to \infty} \sup_{n \geq 1} \int_{\{x \in X \mid f_n(x) \geq K\}} f_n(x)\, d\mu(x) = 0.$$

B 第12問

μ を $\mathbf{R}$ のルベーグ測度とし，$\mathbf{R}$ 上の μ に関して本質的有界かつルベーグ可測な複素数値関数から作られる L^∞-空間を $L^\infty(\mathbf{R})$ と表す．$\mathbf{R}$ 上の複素数値有界連続関数のなす空間を $BC(\mathbf{R})$ とする．

(1) $L^\infty(\mathbf{R})$ 全体で定義された $L^\infty(\mathbf{R})$ 上の有界線型汎関数 f で，任意の $\varphi \in BC(\mathbf{R})$ に対して

$$f(\varphi) = \varphi(0)$$

を満たすものが存在することを証明せよ．ただし，$\varphi \in BC(\mathbf{R})$ は自然な仕方で $L^\infty(\mathbf{R})$ の要素とみなしている．

(2) f を (1) で得られた $L^\infty(\mathbf{R})$ 上の有界線型汎関数とする．このとき，$\mathbf{R}$ 上の複素数値ルベーグ可積分関数 v で，次の条件 $(*)$ を満たすものは存在しないことを証明せよ．

$(*)$ 任意の $u \in L^\infty(\mathbf{R})$ に対して

$$f(u) = \int_{\mathbf{R}} u(x) v(x)\, d\mu(x)$$

が成り立つ．

B 第13問

$a \geq 0, \lambda > 0$ を定数とする．関数 $y = y(x)$ $(0 < x < \infty)$ に対する微分方程式

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (ax - x^2) y = \lambda^2 y$$

を考える．この方程式の恒等的に 0 ではない解 $y = y(x)$ で境界条件

$$\lim_{x \to +0} y(x) = \lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$$

を満たすものが存在するための必要十分条件を，a, λ を用いて表せ．

B 第14問

$\mathbf{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ とし，λ を正の定数とする．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ 値確率変数の族 $\{X_j,\ Y_j\ ;\ j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$ が独立で，各 $j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して，

$$P[X_j = k] = P[Y_j = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (k \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$$

を満たすとする．確率変数 U_j $(j \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$ を

$$U_j(\omega) = Y_{X_j(\omega)}(\omega) \qquad (\omega \in \Omega)$$

で定める．さらに，

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_j \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

とおく．

(1) $p = 1, 2, \ldots$ と $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して，$E[Y_k^p] < \infty$ を示せ．

(2) $p = 1, 2, \ldots$ と $j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して，$E[U_j^p] < \infty$ を示せ．

(3) $j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して，$E[U_j]$ を求めよ．

(4) 確率変数 S_∞ が存在して

$$\lim_{n \to \infty} E\left[|S_n - S_\infty|^2\right] = 0$$

となることを示せ．

(5) 極限

$$\lim_{n \to \infty} E\left[S_n^{\,4}\right]$$

が存在するか答えよ．

B 第15問

区間 $[0,1]$ 上の非負実数値連続関数の集合を Ω とする．$f \in \Omega$ が非自明であるとは，f が恒等的に零ではないこととする．$[0,1]\times[0,1]$ 上の連続関数 $k(x,y)$ は，ある与えられた定数 $M \geq 1$ と正値関数 $k_1, k_2 \in \Omega$ に対し，

$$0 < k_1(x)k_2(y) \leq k(x,y) \leq Mk_1(x)k_2(y) \qquad (x,y \in [0,1]),$$

を満たすものとする．さらに

$$R = \int_0^1 k_1(x)k_2(x)dx$$

で定義される実数 R は，$R > 1$ を満たすと仮定する．また，積分作用素 $\mathcal{L} : \Omega \to \Omega$ を，

$$(\mathcal{L}f)(x) = \int_0^1 k(x,y)(1-e^{-f(y)})dy, \qquad f \in \Omega,\ x \in [0,1].$$

で定義する．

(1) 任意の $0 < \epsilon < 1$ に対して，ある正数 x^* が存在し，$0 \leq f(x) \leq x^*$ $(0 \leq x \leq 1)$ を満たす任意の $f \in \Omega$ について

$$1 - e^{-f(x)} \geq (1-\epsilon)f(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $(1-\epsilon)R > 1$ となるように $0 < \epsilon < 1$ をとり，(1) の条件を満たす x^* をひとつ固定する．このとき，

$$0 < g(x) \leq x^* \quad かつ \quad (\mathcal{L}g)(x) \geq g(x) \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

を満たす $g \in \Omega$ が存在することを証明せよ．

(3) $\mathcal{L}$ は非自明な不動点をもつことを示せ．

(4) $0 < \theta < 1$，$t > 0$ に対し，次が成り立つことを示せ．

$$1 - e^{-\theta t} > \theta(1 - e^{-t}).$$

(5) $f_1, f_2 \in \Omega$ がともに非自明な不動点であると仮定する．このとき，集合

$$S = \{\mu \in \mathbf{R} \mid すべての\ 0 \leq x \leq 1\ に対して\ f_1(x) \geq \mu f_2(x)\}$$

に上限 $\theta = \sup S$ が存在し，$\theta \geq 1$ であることを示せ．これを用いて，$\mathcal{L}$ の非自明な不動点は，たかだかひとつであることを示せ．

B 第16問

以下の問に答えよ．

(1) $n \times n$ 複素行列 A に対して，

$$\sup_{x \in \mathbf{C}^n - \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sqrt{\rho(A^*A)}$$

を示せ．ただし，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$ に対し，$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$ とする．また，A^* は A の共役転置行列，$\rho(A^*A)$ は行列 A^*A のスペクトル半径を表す．

(2) M を $n \times n$ 正定値実対称行列，$\tau > 0$，$0 \leq \theta \leq 1$ とし，i を虚数単位 $\sqrt{-1}$ とする．与えられた $a \in \mathbf{C}^n$ に対して，

$$\frac{1}{\tau}(u - a) + i(1-\theta)Ma + i\theta Mu = 0$$

を満たす $u \in \mathbf{C}^n$ が一意的に存在することを示せ．さらに，$\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ のとき $\|u\| \leq \|a\|$ が成り立つことを示せ．

B 第17問

次のような有向グラフを考える．頂点の集合は $Q = \{(i,j) \mid i,j \in \mathbf{Z}, 0 \leq i,j \leq 5\}$ である．有向辺として以下のものをとる．

$$\begin{cases} (i,j) \to (i+1,j) & (i \neq 5,\ j \text{ は偶数}), \\ (i,j) \to (i-1,j) & (i \neq 0,\ j \text{ は奇数}), \\ (i,j) \to (i,j-1) & (i \text{ は偶数},\ j \neq 0), \\ (i,j) \to (i,j+1) & (i \text{ は奇数},\ j \neq 5). \end{cases}$$

これで, 36 個の頂点と 60 個の有向辺からなる有向グラフができる．有向辺に沿った無限パス $\pi(0) \to \pi(1) \to \pi(2) \to \cdots$ のうちで，最初の頂点 $\pi(0)$ が $q \in Q$ に等しいもの全体を $\Pi(q)$ と書くことにする．集合 $X \subseteq Q$ に対して，

$$\begin{aligned} \mathbf{EG}(X) &= \{q \in Q \mid \exists \pi \in \Pi(q)\ \forall n \geq 0\ \pi(n) \in X\}, \\ \mathbf{AF}(X) &= \{q \in Q \mid \forall \pi \in \Pi(q)\ \exists n \geq 0\ \pi(n) \in X\} \end{aligned}$$

と定める．また $|X|$ で X の元の個数を表すとする．

(1) $\min\{|X| \mid \mathbf{AF}(X) = Q\}$ を求めよ．

(2) $\min\{|X| \mid \mathbf{AF}(\mathbf{EG}(X)) = Q\}$ を求めよ．

B 第18問

$\mathbf{R}$ 上の周期 2π の有界な複素数値関数 g に対して,

$$\|g\| = \sup_{-\pi \leq x < \pi} |g(x)|$$

とおく．2 以上の整数 n に対して

$$K_n(t) = \frac{1}{\log n} + \sum_{k=-n}^{n} \frac{\log(|k|+n) - 1}{\log(|k|+n)} e^{ikt} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

とおく．ただし，i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ を表す．$\mathbf{R}$ 上の周期 2π の連続な複素数値関数 f に対して，関数 $T_n f$ を

$$T_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t)\,dt \qquad (x \in \mathbf{R},\ n = 2, 3, 4, \ldots)$$

と定める．

(1) N を 1 以上の整数とし，$f(x) = \cos(Nx)$ $(x \in \mathbf{R})$ とする．このとき，

$$\lim_{n \to \infty} (\log n) \|T_n f - f\|$$

を求めよ．

(2) f を $\mathbf{R}$ 上の 2 回連続微分可能な複素数値関数で，周期 2π をもつとする．もし

$$\lim_{n \to \infty} (\log n) \|T_n f - f\| = 0$$

であるならば，f は定数関数であることを証明せよ．