



時弘 哲治

超離散系の研究

セルオートマトン (Cellular Automaton=CA) は、直訳すると「細胞から構成される自動機械」となる。その名の示すように、有限個の状態をとるセル (細胞) から構成され、離散的な時間ステップで自分自身の状態を更新してゆく。簡単な時間発展の規則に従いながら複雑な時間発展パターンを示すことのできる離散力学系であり、空間変数、時間変数、とりうる値のすべてが離散的であるため、丸め誤差などの心配がなくコンピュータシミュレーションに適している。たとえば、図1にルール90ECAと呼ばれる空間1次元で2状態をとるセルから構成されるCAの時間発展パターンを示す。このパターンは自己相似的であり、適当なスケール変換 (縮小写像) のもとで極限操作をすると、典型的なフラクタルであるシェルピンスキー・ガスケット (Sierpinski gasket) に一致することを示すことができる。この例からもわかるように、微分方程式によって記述されるモデルでは再現することが困難な複雑なパターンも、CAは比較的簡単に再現できる。そのため、複雑な自然・社会現象のモデルとして研究され、生き物の紋様の生成、森林火災、高速道路の車の流れ、建物内部の避難経路などさまざまな問題に適用されている。

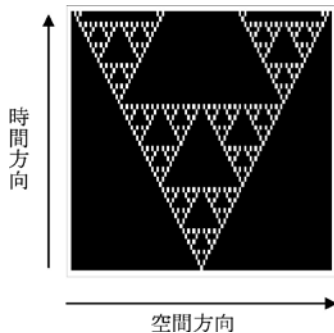


図1 ルール90ECAの時間発展パターン

超離散系とは、連続的な方程式から極限操作で得られるセルオートマトン (Cellular Automaton=CA) である。代表的なものに、KdV方程式から得られる「箱玉系」がある。箱玉系は2状態をとるセルを空き箱と玉の入った箱として、CAを箱から箱へ移動する玉のなす力学系として捉えたものである。時間発展の1例を図2に示す。箱玉系は、(i) ソリトン解をもつ、(ii) 十分にたくさんの保存量をもつ、(iii) 初期値問題が解ける、など、KdV方程式に良く似た性質を持っている。KdV方程式は代表的な無限次元非線形可積分方程式であり、その超離散化である箱玉系も「可積分性」を反映して、豊富な数理的構造をもっている。超離散系研究のひとつの

目的は、こうした可積分CAの数理的構造を明らかにすることである。たとえば、周期条件を課した箱玉系では、組み合わせ論的R行列による表示、逆散乱法による初期値問題の解、基本周期公式、基本周期の漸近的挙動および統計的性質の証明、基本周期公式とリーマン予想の等価性の証明、ベータ仮設方程式におけるストリング仮説の意味づけなど興味深い結果が得られている。また、箱玉系の状態空間を量子系の線形空間と見たとき、時間発展規則はひとつの (非自明な) 量子アルゴリズムと考えられ、応用上も重要である。

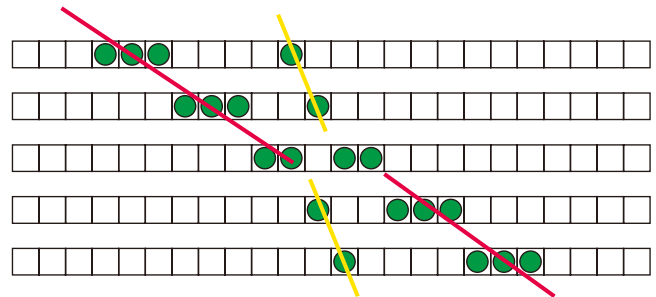


図2 箱玉系の時間発展パターン。3個からなる玉の列と1個からなる玉の列がソリトンの散乱をしている。

自然・社会現象に対する微分方程式モデルとCAモデルを比較すると、微分方程式モデルでは解析的な考察が可能で厳密な数学的議論ができるが、数値的なシミュレーションは一般には困難である。これに対してCAは、数値シミュレーションは容易であるがその完全な離散性のため厳密な解析が困難である。超離散系では、対象とするCAは連続な方程式の極限として得られるため、その連続な方程式を通じてCAに対する解析的な取り扱いも可能になる。CAに対して厳密な解析手法を提供することも超離散系研究の目的のひとつである。逆に生物の生成や自己増殖モデルとして用いられるCAを逆超離散化することで、たとえば、フラクタルパターン (図3) や生物の貝殻のパターンを生成する偏微分方程式を構成することが可能になってきている。この偏微分方程式と化学・生物現象の基礎方程式である反応拡散系との関係についても研究している。



図3 図1のCAを逆超離散化した偏微分方程式の解。