



齋藤 毅

すべての道は素数へ続く

3世紀以上もの間、数多くの数学者を退け続けてきたフェルマーの最終定理がついに証明されたことが話題になったことを覚えている方も多いだろう。これが解決されたからといって、整数に関する問題がすべて明らかになったということではない。しかしこの成果は、人間がこれまでに築きあげてきた、数に対する理解の1つの頂点を示すものである。それは同時に、整数のこれからの発展への展望を切りひろくものでもある。

フェルマーの最終定理そのものは中学生にも説明できるといわれるように、数論では、誰もが知っている数の性質を探求する。しかし、問題が素朴だから簡単だというわけではない。素朴にみえる問題の難しさは、手がかりが見えないところにある。19世紀の数学界に君臨したガウスは、数論を「数学の女王」と呼んだ。それは、数論それ自体の魅力とともに、数学を1つに結びつける数論のもつ力をさすものだろう。数学の1つの分野での発見は、数に対する理解への隠されていた手がかりとして、数論の進展につながるのである。

人類の数に対する理解は、数の世界を広げることで進んできた。1つ、2つと数えることではじまる自然数から、引き算で整数へ、割り算で分数へという具合である。それに対し、ふつうの数とされている実数は、数直線上の点としてとらえられる。これがあまりに自然な考え方だったため、そのほんとうの意味が明らかにされたのは、19世紀も終わりに近づいてからだった。

このように数の世界を広げる方法が認識されると直ちに、同じようにして数の世界を広げる方法がいくらかもあることが発見された。2, 3, 5, 7, …と、素数がいくらかもあることは、古代ギリシャのユークリッド「原論」で証明されていることだが、その素数1つ1つに、2進数の世界、3進数の世界、…という数の体系が見いだされた。フェルマーの最終定理が20世紀に証明できたのは、整数を2進数、3進数、…と考えることが、整数を実数と考えるのと同じくらい自然なことであり、重要なことであるということがわかったからだ、ということができる。

19世紀の解析学の大きな成果である関数論は、素数の分布の研究に応用され、現代数学の最大の未解決問題とよばれるリーマン予想を生み出した。20世紀の抽象数学の花形である代数幾何は、ヴェイユ予想の解決をもたらし、

素数を「点」と考える視点が確立した。群の無限次元表現論は、類体論の非可換化を可能にし、現代の数論の中心的問題であるラングランズ対応へと導いた。フェルマーの最終定理の素朴さの影に隠されていた手がかりは、このラングランズ対応だった。

この、代数幾何を使って整数論を研究する数論幾何が、私の研究分野である。これは、p進体、代数幾何、ガロワ表現が交錯する活発な研究領域である。数のもつ隠された対称性は、ガロワ群の中に読み取ることができる。ガロワ群と代数幾何は、ヴェイユ予想の証明を可能にしたエタール・コホモロジーによって結びついている。この結びつきを通して、両者の関わりを調べる、幾何的な分岐理論が専門である。ラングランズ対応と分岐理論の関係についての研究は、現在世界的に活発に研究が進んでいるp進局所ラングランズ対応への契機を与えるものとなった。

数論と微分方程式は、一見かけ離れているように見えるが、グロタンディークらによるエタール層の理論と、佐藤幹夫、柏原正樹らによって創始された微分方程式のD加群の理論の間には、表面的なものにとどまらない密接な類似がある。この数年は、超局所解析と分岐理論の類似を研究し、特性多様体の定義やオイラー数の公式などの成果があがっている。

