確率過程に対する漸近展開理論、統計推測理論の研究とその応用

吉田朋広　(日本数学会 2006 年度解析学賞受賞)

現在の研究につながる以前の結果を統計学での位置づけとともに述べ，最近の結果は最後にコメントしたい．

時間とともにランダムに変動する量を確率過程と呼ぶ．確率過程はいろいろあるが，統計学で古くから研究されているものは弱定常過程と呼ばれるクラスである．自己相関関数によって構造が規定され，スペクトル解析も有効な解析手段となる．このクラスの記述において特徴的なことは線形定常性である．そこでの非定常性の扱いもそれに基づくものといえる．狭い意味の "時系列解析 "というのはこのような対象を扱う統計学のことをさし，すでに多くの研究がある．

近年，セミマルチンゲールによる現象のモデリングと解析が行われている．その特徴は非線形性および非定常性であり，マルコフ過程，確率微分方程式，点過程を含む様々な確率モデルを対象とする．確率過程のパスの分布が定まるモデルを主に扱い，自己相関構造に主眼を置く伝統的な時系列解析と対比的に『確率過程の統計学』と呼ばれる．自己相関は確率過程の２時点での値の分布によって定まる量であって，一般には確率過程の分布を決定しない．

統計モデルでは，未知パラメータ θ があり，θ に対して定まる分布 P_θ からなる分布族 $\mathcal{P} = \{P_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ が付随する．たとえば拡散過程の統計モデルに対しては $\mathcal{P}$ は連続写像の空間 $C([0,T];\mathbb{R}^d)$ 上の分布族である．データを見て意思決定するということは $\mathcal{P}$ がのっている標本空間 $\mathcal{X}$ の上の写像 $\delta : \mathcal{X} \to \mathcal{D}$ を与えるということである．ある決定関数 δ が統計的に良いかどうかの判断は，たまたま観測した１つのデータ x に対してなされるべきではなく，すべての x を考慮した評価，つまり適当な平均量によってなされるべきである．平均量は P_θ に関する積分であるから，決定関数 δ の総体における最適性の問題が $\mathcal{P}$ に基づく方法（尤度解析）によって記述されることになる．古典的統計学はこのような決定理論の形式に昇華され，その後漸近的方法と合流し，漸近決定理論へ発展した．確率過程の統計学においては分布族が（陽に書けるかどうかに関わらず）存在し，その発展の当初より漸近決定理論の研究と深く結びついてきたことは自然なことである．さらに，確率過程の場合の研究から新たな概念が漸近論にもたらされたり，両者は相互に影響してきた．セミマルチンゲールに関しては８０年ころ尤度比公式（密度

公式）が完成し，極限定理もかなり発展し，中心極限定理を文字通り中心とする１次の統計的漸近理論の研究が進んだ．ちなみに，尤度比公式と極限定理の研究を進めた旧ソ連およびフランスのグループはいずれも統計学を研究の背景にもっていたし，確率積分に対するマルチンゲール中心極限定理を最初に与えたのは統計学者である．

独立観測列は統計学の基本的な対象であり，取り扱いが一般の確率過程より容易なため，漸近論に関しても膨大な研究があり，高次統計推測論，統計的予測，ブートストラップなどリサンプリング法，情報幾何，情報量規準といった分野を形成している．漸近展開は１次の極限定理より正確な分布の近似を与える方法であるが，上記の現代理論統計の主要分野の基礎となっている．[1] これに反して，セミマルチンゲールのような連続時間確率過程に対しては，漸近展開，とくに分布論的な漸近展開が未知であったため，このような統計学の諸分野はなかった．

９０年台にはいり，マリアバン解析の渡辺理論に基づき，スモール σ-モデルに対する漸近展開を与えた．小さな摂動を持つ確率微分方程式に対する統計量の高次有効性を証明し，また，副産物としてオプション価格の漸近展開の方法も与えた．この方法は，国友直人教授，高橋明彦教授（東大経済）や筆者らによってその後さらに発展し，金融関係で利用されている．[2]

伝統的な独立観測の場合の漸近展開に対応するのは，分布論的漸近展開である．スモール σ-モデルでは，統計量の第一近似が確率変数として存在するが，一般の状況では，漸近展開の第一項である中心極限定理に対応する確率変数が自然には存在せず，漸近展開を導く方法も純粋に分布論的な方法でなければならず，技術的にまったく異なったものになる.「分布論的」とはその意味である．筆者は９０年代中ごろの研究で，マルチンゲールに対する漸近展開とミキシング-ϵ-マルコフ過程に対する漸近展開の２つの方法を与えた．[3] 確率微分方程式に対するエルゴード的な状況での漸近展開が可能となり，高次推測論，情報量規準の研究，ファイナンスへの応用が始まっている．[4]

最近の研究としては，パーシャル・ミキシングの導入と漸近展開の証明や，サポート定理によるマリアバン共分散の局所非退化性証明により，ミキシング過程の漸近展開の適用を容易にした．漸近展開以外では，２つの確率過程の共分散推定において，非同期共分散推定量（Hayashi-Yoshida estimator と呼ばれている）を提案し，その漸近性質を示した．また，局所漸近２次という一般的な尤度比の漸近挙動のもとで，多項式型大偏差不等式を証明し，Ibragimov-Hasminskii-Kutoyants のプログラムが非線形時系列に対して実行可能となり，たとえば，確率微分方程

[1]独立観測にたいしてたとえば [1],[2].

[2]たとえば [3].

[3]マルチンゲールの漸近展開はグローバル・アプローチ，ミキシング過程の漸近展開はローカル・アプローチとも呼ばれる．これらの３つの方法については [5] とその文献を参照.

[4][4] その他.

式に対する（擬似）尤度解析における最尤型推定量およびベイズ型推定量の挙動が明らかとなり，モーメント収束を伴う強い収束が証明された．これは統計的予測問題や統計量の漸近展開の誤差評価における本質的な困難を解消する．他の話題としては，ジャンプ型確率微分方程式のサンプリング下でのパラメータ推定の方法を与え，その挙動を証明した．観測の増分のジャンプ/非ジャンプ-判別フィルタの構成がアイデアである．

参考文献

[1] Ghosh, J.K.: Higher order asymptotics. California: IMS 1994

[2] Hall, P.: The boostrap and Edgeworth expansion. Berlin Heiderberg New York London Paris Tokyo Hong Kong: Springer 1992

[3] 国友直人, 高橋明彦: 数理ファイナンスの基礎．東洋経済 2003

[4] Sakamoto, Y., Yoshida, N.: Asymptotic expansion formulas for functionals of epsilon-Markov processes with a mixing property. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 56, 545-597 (2004)

[5] 吉田朋広：マリアバン解析と数理統計．数学 **55**, 3, 225-244, 岩波 2003