複素解析にあらわれる放物型不変式論

平地 健吾

熱核の漸近展開はリーマン多様体上の不変量の研究の主要な道具であり, その計算には直交群に関する不変式論が利用される．これに類似する理論を多変数関数論において構築しようというのが, フェッファーマンによって提唱された「複素解析にあらわれる放物型不変式論」である．ここでは球面のセゲー核の計算を例としてこの理論の基本的なアイディアを説明する．

セゲー核の定義は簡単であるが計算は難しい．$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を滑らかな境界をもつ領域, $d\sigma$ を境界上の体積要素とするとき, Ω 上の正則関数で境界値が $L^2(\partial\Omega, d\sigma)$ に含まれるもの全体はヒルベルト空間になる．セゲー核はこの空間の正規直交基底 $\{\varphi_j(z)\}_{j=1}^\infty$ をもちいて $K(z) = \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(z)|^2$ で定義される．($K(z)$ は基底の選び方によらず Ω 内では滑らかである．) 単位球 $\Omega_0 = \{|z| < 1\}$ の境界 S^m, $m = 2n-1$, に通常の体積要素 $d\sigma_0$ をあたえれば対応するセゲー核は $(1-|z|^2)^{-n}$ の定数倍になることは容易に示せるが, 体積要素を取りかえただけでもセゲー核の計算は非常に困難になる．

球面 S^m 上の一般の体積要素を $d\sigma = e^f d\sigma_0$ とあらわし, $d\sigma$ に対応するセゲー核を $K_f(z)$ と書くことにする．$K_f(z)$ の境界での特異性は次の形であることがフェッファーマンにより示されている:

$$K_f(z) = \Phi_f(z)(1-|z|^2)^{-n} + \Psi_f(z)\log(1-|z|^2),$$

ここで Φ_f, Ψ_f は球の境界までこめて滑らかな関数である．以下では対数項の主要部 $\Psi_f|_{S^m}$ に注目する (これは熱核の t^0 の係数に類似していて特に重要である)．まず Ω_0 の正則自己同型は $G = SU(1,n)$ の作用であたえられることを思い出す．Ω_0 を $z \mapsto [1:z] = [\zeta_0 : \zeta_1 : \cdots : \zeta_n] \in \mathbb{CP}^n$ により射影空間に埋め込めば, その定義方程式は

$$L(\zeta) = |\zeta_0|^2 - |\zeta_1|^2 - \cdots - |\zeta_n|^2 > 0$$

であり, 二次形式 L を保つ ζ の一次変換が Ω_0 の全ての自己同型を与えるのである．G の作用は境界 S^m にまで拡張され $S^m = G/P$ のように境界を等質空間と見なすことができる; ここで P は G の放物型部分群であり, 以下の議論では P の表現論が用いられる．$\Psi[f] := \Psi_f|_{S^m} \cdot d\sigma$ とおけば, P の既約表現の誘導表現の間の (線形とは限らない) G 不変微分作用素

$$C^\infty(S^m) \to C^\infty(S^m, \Lambda^m) \tag{1}$$

がえられる．このような作用素は一般バーマ加群の間の準同型と対応し, (1) の空間の間の不変線形微分作用素は定数倍を除いてただ一つ存在することが知られている．よって $\Psi[f]$ の f に関する線形部分を決定するには不変線形微分作用素を一つ構成すればよいことになる．これには L に対応するラプラシアン

$$\Delta_L = \partial_{\zeta_0}\partial_{\overline{\zeta}_0} - \partial_{\zeta_1}\partial_{\overline{\zeta}_1} - \cdots - \partial_{\zeta_n}\partial_{\overline{\zeta}_n}$$

が利用できる．$\{L(\zeta)=0\}\subset\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ を S^m 上の $\mathbb{C}^*$ 束とみなし f を束上の $\mathbb{C}^*$ 不変な関数に持ち上げる．さらに f を $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ 上の $\mathbb{C}^*$ 不変関数 $\widetilde{f}$ に拡張し, $Q[f](z):=(\Delta_L^n\widetilde{f})(1,z)d\sigma_0$ とおく．z が S^m を動くとき $Q[f]$ は拡張 $\widetilde{f}$ の選び方によらず Λ^m の断面をあたえることがわかり, さらに Δ_L の G 不変性から $Q[f]$ の G 不変性がえられる．よって上述の一意性により

$$\Psi[f]=c_n\,Q[f]+O(f^2) \tag{2}$$

が成り立つ (c_n は次元 n で決まる普遍定数である)．非線形項 $O(f^2)$ を決定するにはもう少し工夫が必要であるが, f を $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ に持ち上げて G 不変式を構成するという方針には変わりがない．

以上の議論は一般の強擬凸領域でも, P の作用をモーザー標準座標の変換とみなすことにより適用できる．この場合も不変微分作用素の構成は $\mathbb{C}^*$ 束（領域の標準束から零断面を除いたもの）上で行われ, ローレンツ形式 L のかわりに束の全空間上のリッチ平坦アインシュタイン・ケーラー計量 g を用いることになる．Δ_L を Δ_g に読みかえれば, (2) と同様な等式が一般の強擬凸領域でも成り立つ．ただし非線形項の解析にはまだ未解決の部分も多い。

上で定義した $Q[f]$ は Q-曲率とよばれ, とくに共形幾何において, 近年盛んに研究されている．Q-曲率とセゲー核の関係の解明が現在の研究課題である; ここで紹介した S^m での計算は今準備中の論文に含まれる新しい結果である．