小平・スペンサーの変形理論

川又雄二郎

東大・数理

２０１４年１１月２２日

C^∞ 級関数と正則関数

参考：小平邦彦「複素構造の変形 I、II」東京大学セミナーノート、1968。

C^∞ 級関数

$\mathbf{R}^n$ の領域（開集合）の上で定義された関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ は、座標 x_i たちで何回でも微分できるとき、C^∞ 級であるという。

正則関数

$\mathbf{C}^n$ の領域の上で定義された関数 $f(z_1, \ldots, z_n)$ (ここで $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$) は、複素座標 z_i たちで何回でも微分できるとき、正則であるという。

$\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$ と考えるとき、(n 変数の) 正則関数は ($2n$ 変数の) C^∞ 級関数と見なせる。しかし、C^∞ 級関数と正則関数は大きく異なる：

C^∞ 級関数と正則関数の違い

C^∞ 級関数は柔軟であるが、正則関数は堅い。

C^∞ 級関数と正則関数の違い

C^∞ 級関数は柔らかい。

例１。$\mathbf{R}$ 全体の上で定義された C^∞ 級関数で、開区間 $(0,1)$ 上では 0 ではなく、かつその外側では恒等的に 0 になるようなものが存在する。
局所的に存在する関数は、１の分割に応用される。

正則関数は堅い。

例２。円盤 $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ 上で定義された正則関数は、集合 $\{z = 1/n \mid n \in \mathbf{N}\}$ 上で値 0 をとるならば、恒等的に 0 である。
局所的な性質が全体に解析接続される。

可微分多様体

可微分多様体

（1）位相空間。（2）局所的には $\mathbf{R}^n$ の開部分集合と同じ。（3）貼り合わせは C^∞ 関数の組。

（2）より、局所座標が定まる。（3）より、局所座標の間の座標変換は C^∞ 関数の組で表される。
可微分多様体は局所的には $\mathbf{R}^n$ と区別がつかないが、大域的には「多様な」構造を持つ。

例１。球面 S^2。地球上にいる人にとって、その近くでは地球面は平面と思えるので、経度と緯度を使って平面上の地図で表せる。全体的には平面とは異なる。
例２。トーラス。局所的には球面と区別がつかないが、大域的な構造は異なる。

複素多様体

複素多様体

（１）位相空間。（２）局所的には $\mathbf{C}^n$ の開部分集合と同じ。（３）貼り合わせは複素正則関数の組。

例１。S^2 は二つの開集合 $U_\pm = S^2 \setminus P_\pm \cong \mathbf{C}$ ($P_\pm$ は北極と南極）で覆われる。貼り合わせの関数は $z \mapsto 1/z$。１次元射影空間 $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ を得る。

例２。複素数 $\tau = x + iy,\ y > 0$ を固定する。複素平面 $\mathbf{C}$ 上の４点 $0, 1, \tau, \tau + 1$ で囲われた平行四辺形において、２組の平行な２辺をそれぞれ同一視すると１次元複素多様体（楕円曲線）E が得られる。貼り合わせは平行移動。τ は周期と呼ばれる。

複素多様体の変形

C^∞ 関数は柔軟なので、可微分多様体においては張り合わせを少し変えても（変形しても）同型な可微分多様体になる。
複素多様体の貼り合わせを少しずらすと、異なる（同型でない）複素多様体が得られるときがある。これを複素多様体の変形という。

例１。$\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ は変形しない.
例２。複素トーラス E は周期 τ を動かすと変形する（異なる楕円曲線が得られる）。
E は $\mathbf{C}$ の加法に関する部分群 $L_\tau = \mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z}$ による商群である：
$E = \mathbf{C}/L_\tau$.
同型写像 $f : E_\tau \cong E_{\tau'}$ があったとすると、自己同型 $\tilde{f} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ で $\tilde{f}(L_\tau) = L_{\tau'}$ となるもの持ち上がる。これは 以下の条件と同値である。

$$\tau' = (a\tau + b)/(c\tau + d), \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z}, \quad ad - bc = 1$$

可微分多様体の複素構造

$\mathbf{C}^n$ の開部分集合は $\mathbf{R}^{2n}$ の開部分集合となる。複素正則関数は C^∞ 級関数でもある。従って、複素多様体は可微分多様体を定める。逆に見ると、可微分多様体に複素構造を入れると複素多様体になると考えられる：

複素構造

複素多様体＝可微分多様体＋複素構造

例１：２次元球面 S^2 には複素構造がただ一つはいる：１次元複素射影空間 $\mathbf{P}^1$。
例２：トーラスは可微分多様体としては $S^1 \times S^1$ と同型であるが、複素構造がたくさん入る。すなわち、トーラス上の複素構造は変形できる。
楕円曲線は、複素２次元射影空間 $\mathbf{P}^2$ の中で、方程式

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

で表される代数曲線にもなる。複素構造の変形は係数 a, b を変化させても得られる。

複素多様体の複素解析族

複素多様体の複素解析族

複素解析多様体の間の正則写像 $f : X \to T$ であって、各ファイバー $X_t = f^{-1}(t)$ （$t \in T$）が複素多様体になるようなもの。

例：楕円曲線の族。$\mathfrak{h} = \{\tau \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ 上半平面、
$L = \{(m, n\tau, \tau) \mid m, n \in \mathbf{Z}, \tau \in \mathfrak{h}\}$、$X = (\mathbf{C} \times \mathfrak{h})/L$、$f : X \to \mathfrak{h}$ を自然な射影とすれば、ファイバー $X_\tau = \mathbf{C}/L_\tau$ は楕円曲線。
例：２次曲面の族。
$X = \{((x_0 : x_1 : x_2 : x_3), t) \in \mathbf{P}^3 \times \mathbf{C} \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + t^2 x_3^3 = 0\}.$
$f : X \to \mathbf{C}$ は自然な射影。
$t \neq 0$ ならば、ファイバー X_t は滑らかな２次曲面（複素多様体）であり、$\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ と同型である。
$t = 0$ のときは、X_0 は特異点を持ち複素多様体にはならないが、特異点解消 $\mu_0 : Y_0 \to X_0$ が存在し、Y_0 は次数２の線織曲面になる。複素多様体の複素解析族 $g : Y \to \mathbf{C}$ で、$Y_0 = g^{-1}(0)$ かつ $X_t = g^{-1}(t)$ となるものが存在する（同時特異点解消）。

実ベクトル空間 $V = \mathbf{R}^{2n}$ の複素化

複素構造の入った実ベクトル空間 $V = \mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$ を考える。複素ベクトル空間としての基底を $v_1, \ldots, v_n$ とする。
$w_i = \sqrt{-1}v_i \in V$ とすると、実ベクトル空間としての基底は、
$v_1, w_1, \ldots, v_n, w_n$ である。
対応した複素座標系を $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ とする。これは V 上の複素線形関数であって、$z_i(v_j) = \delta_{ij}$ が成り立つ。
実ベクトル空間としての V の座標系は $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ で与えられる:

$$x_i(v_j) = \delta_{ij}, \quad x_i(w_j) = 0, \quad y_i(v_j) = 0, \quad y_i(w_j) = \delta_{ij}$$

実ベクトル空間 V の複素化は、$2n$ 次元の複素ベクトル空間である:

$$V_{\mathbf{C}} = V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = V \oplus \sqrt{-1}V \cong \mathbf{C}^{2n}$$

$V_{\mathbf{C}}$ の元は組 (u, v) $(u, v \in V)$ で与えられ、複素数によるスカラー倍は

$$(a + b\sqrt{-1})(u, v) = (au - bv, av + bu)$$

で定義される。このスカラー倍作用は V に元々あるスカラー倍作用とは別物であることに注意する。

実ベクトル空間 $V = \mathbf{R}^{2n}$ の複素構造

$x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ は $V_\mathbf{C}$ の複素座標系を与える：

$$x_i(v_j, 0) = \delta_{ij}, \quad x_i(0, v_j) = \sqrt{-1}\delta_{ij}, \quad x_i(w_j, 0) = 0, \quad x_i(0, w_j) = 0$$
$$y_i(v_j, 0) = 0, \quad y_i(0, v_j) = 0, \quad y_i(w_j, 0) = \delta_{ij}, \quad y_i(0, w_j) = \sqrt{-1}\delta_{ij}$$

複素ベクトル空間 $V_\mathbf{C}$ の n 次元複素ベクトル部分空間 W^+, W^- を、それぞれ $\frac{1}{2}(v_i, -w_j)$, $\frac{1}{2}(v_i, w_j)$ $(i = 1, \ldots, n)$ を基底に持つものとして定義する。
$V_\mathbf{C}$ はこれらの直和である：$V_\mathbf{C} = W^+ \oplus W^-$。
$z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$, $\bar{z}_i = x_i - \sqrt{-1}y_i$ は、それぞれ W^+, W^- の複素座標系になっている：

$$z_i(v_j, -w_j) = 2\delta_{ij}, \quad z_i(v_j, w_j) = 0, \quad \bar{z}_i(v_j, -w_j) = 0, \quad \bar{z}_i(v_j, w_j) = 2\delta_{ij}$$

自然な写像 $V \to V_\mathbf{C} \to W^+$ は複素ベクトル空間としての同型である。ここで、第１の写像は $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ から誘導され、第２の写像は直和分解 $V_\mathbf{C} = W^+ \oplus W^-$ の射影である。V, W^+ の複素座標系が一致しているからである。

実ベクトル空間 $\mathbf{R}^{2n}$ の複素構造の変形

実ベクトル空間 $V = \mathbf{R}^{2n}$ の複素構造を変形するには、複素ベクトル部分空間 W^+ を複素化 $V_\mathbf{C}$ の中で動かせばよい。
W_t^+ を

$$z_i(t) = z_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\bar{z}_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

を複素座標系とする複素ベクトル部分空間とする。ここで、t はパラメーターであり、$[a_{ij}(t)]$ は t の正則関数を要素とする n 次正方行列である。
t が小さい限り、自然な写像 $V \to V_\mathbf{C} \to W_t^+$ は実ベクトル空間としての同型であり、V の複素構造の変形を与える。

接空間の複素構造の変形の記述

複素多様体 X の各点 $x \in X$ で X を１次近似するのは、接空間 $T_{X,x}$ である。X の局所座標系 $z_1, \dots, z_n$ を使えば、接空間の複素座標系が微分形式 $dz_1, \dots, dz_n$ で与えられる。$\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ には $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n$ が対応する。微分形式 $dz_1, \dots, dz_n$ の双対基底は、ベクトル場 $\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}$ である。C^∞ 級ベクトル場を係数とする微分形式

$$\phi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial}{\partial z_i} d\bar{z}_j$$

を使えば、X の各点での接空間の複素構造の変形は、

$$dz_i(x,t) = dz_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t) d\bar{z}_j$$

で記述される。ここで、係数 $a_{ij}(x,t)$ は x に関しては C^∞ 級関数であり、t に関しては正則関数である。

可積分条件

各点の接空間レベルで与えた複素構造の変形 ϕ が X 全体の複素構造の変形からきているためには、以下の方程式を満たすことが必要十分である：

可積分条件

小平-スペンサーの方程式　$\bar{\partial}\phi + \frac{1}{2}[\phi, \phi] = 0$

座標系を使えば、

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial a_{ik}(x,t)}{\partial \bar{z}_j}\right) \frac{\partial}{\partial z_i} d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_j$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial a_{lk}(x,t)}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_l} - a_{lk}(x,t) \frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial z_l} \frac{\partial}{\partial z_i}\right) d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k = 0$$

位数 1 の無限小変形（その１）

変形の第１近似は、位数 1 の無限小変形で与えられる：

$$\phi = t\phi_1, \quad t^2 = 0$$

t は無限小変形のパラメーターである。
可積分条件から、

$$\bar{\partial}\phi_1 = 0$$

すなわち、

$$\phi_1 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^1(x) \frac{\partial}{\partial z_i} d\bar{z}_j$$

とおくとき、

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}^1}{\partial \bar{z}_k} \frac{\partial}{\partial z_i} d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_j = 0$$

位数 1 の無限小変形（その 2）

一方、C^∞ 級のベクトル場

$$\psi_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

は X の可微分多様体としての無限小自己同型を与える（X はコンパクトであると仮定）。ここで、b_i は C^∞ 級関数である。
無限小自己同型から誘導される複素構造の自明な変形が以下の式で与えられる：

$$d(z_i + b_i(x)t) = dz_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_i(x)}{\partial z_j} t dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_i(x)}{\partial \bar{z}_j} t d\bar{z}_j$$

$t^2 = 0$ を考慮すると、無限小自己同型からくる自明な複素構造の変形は以下の式で与えられる：

$$\phi_1 = \bar{\partial} \psi_1$$

位数 1 の無限小変形（その 3）

$$C^p(X, \Theta_X) = \{\phi \mid \bar{\partial}\phi = 0\}, \quad B^p(X, \Theta_X) = \{\phi \mid \phi = \bar{\partial}\psi\}$$

を C^∞ 級ベクトル場を係数とする $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_n$ に関して p 次の微分形式のうちで、$\bar{\partial}$ に関して閉じているもの全体のなす複素ベクトル空間と、そのうちで $\bar{\partial}$ に関して完全であるもののなす複素部分ベクトル空間とする。
前のページの議論から、位数 1 の真の無限小変形全体のなす複素ベクトル空間は、1 次のコホモロジー群

$$H^1(X, \Theta_X) = \frac{C^1(X, \Theta_X)}{B^1(X, \Theta_X)}$$

と同一視される。ここで、Θ_X は X の接層、すなわち、接ベクトル場全体のなす集合（層）を表す。
X がコンパクト複素多様体であれば、これは有限次元の複素ベクトル空間になる。

無限小変形の拡張（その１）

複素構造の変形を冪級数展開する：

$$\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i t^i$$

ϕ_1, ϕ_2 と順番に求めていく。
位数 1 の無限小変形 $\phi = \phi_1 t,\ t^2 = 0$ を，位数 2 の無限小変形 $\phi' = \phi_1 t + \phi_2 t^2,\ t^3 = 0$ に拡張することを考える。
仮定から $\bar{\partial}\phi = 0$。
可積分条件は、

$$\bar{\partial}\phi_2 + \frac{1}{2}[\phi_1, \phi_1] = 0$$

これは、ϕ_1 を与えたとき、ϕ_2 を求める微分方程式である。

無限小変形の拡張（その２）

$$[\phi_1, \phi_1] = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} (a^1_{ij}(x)\frac{\partial a^1_{lk}(x)}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial z_l} - a^1_{lk}(x)\frac{\partial a^1_{ij}(x)}{\partial z_l}\frac{\partial}{\partial z_i})d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k$$

は閉じた 2 次の微分形式、すなわち $C^2(X, \Theta_X)$ の元を定める。
微分方程式が解を持つということは、これが $B^2(X, \Theta_X)$ の元になっているということである。
こうして、与えられた位数 1 の無限小変形 が位数 2 の無限小変形に拡張できるための条件は、$\xi = [\phi_1, \phi_1]$ で代表された 2 次のコホモロジー群の元 $[\xi] \in H^2(X, \Theta_X)$ が 0 になることであることがわかった。
さらに高位の無限小変形への拡張するための障害も２次のコホモロジー群 $H^2(X, \Theta_X)$ の元になっている。
有限次元の複素線形空間 $H^2(X, \Theta_X)$ を障害の空間と呼ぶ。

半普遍族の存在（その１）

小平ースペンサーの定理

コンパクト複素多様体 X において、$\dim H^1(X,\Theta_X)=d$ かつ $H^2(X,\Theta_X)=0$ と仮定する。このとき、d 次元の多重円盤 $T=D^d$、$D=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|<1\}$ の上の変形の複素解析族 $f:\mathcal{X}\to T$ が存在して、X の任意の小さな変形は f のファイバーとして現れる。

証明：障害が消えているので、無限小変形は自由に延長できる。こうして得られる形式的べき級数上の変形が、収束することを確かめれば、変形の複素解析族が得られる。

例：n 次元複素トーラス。$d=n^2$。
例：$K3$ 曲面。$d=20$。3 次元射影空間 $\mathbf{P}^3$ の中で 4 次式, たとえば $x_0^4+\cdots+x_3=0$ で定義された代数曲面を変形させる。4 次式は 19 次元動くので、変形族は射影空間の外に出て、非代数的な複素多様体が得られる。これは式では表せないが、変形によって存在がわかる。

半普遍族の存在（その２）

一般の場合には、$\dim H^1(X, \Theta_X) = d$、 $H^2(X, \Theta_X) = e$ とするとき、d 次元の多重円盤 D^d の中で、e 個の方程式で定義された（特異点を許す）複素解析空間 T と、その上の変形の複素解析族 $f : \mathcal{X} \to T$ が存在して、X の任意の小さな変形は f のファイバーとして現れる（倉西）。

$f : \mathcal{X} \to T$ を複素解析的変形の半普遍族または倉西族と呼び、底空間 T を局所モジュライ空間（倉西空間）と呼ぶ。

T の次元は以下の不等式を満たす：

$$d - e \leq \dim T \leq d$$

局所モジュライ空間

小平の問題

いろいろと実験してみると、障害の空間の次元が正であっても、右側の不等式が等式になっていることが多い。

例：n 次元複素トーラスの場合、$n \geq 2$ ならば
$\dim H^2(X, \Theta_X) = \frac{1}{2}n^2(n-1) \neq 0$ であるが、障害は消える。

障害が消える変形の理論

複素トーラスやカラビ・ヤウ多様体のように素性の良い多様体の場合には、障害の空間は消えていなくても実際の障害は消える。

マーフィーの法則 (Vakil)

どんなに悪い特異点を持ってきても、それを局所モジュライ空間として実現するようなコンパクト複素多様体が存在する。

そのような多様体は特別なものではなく、むしろ特別な理由がある場合をのぞいて、局所モジュライ空間は特異点をもつ（Mumford)。