4次元空間の多面体をみる

河野俊丈 (東京大学大学院数理科学研究科)

3次元空間内の正多面体は5種類存在することが，プラトンの時代から知られている．これらの正多面体は2次元球面の正多角形による正則分割，つまり，各頂点のまわりに同じ個数の正多角形が集まるような分割を与える．ここでは，球面の幾何学の視点から，4次元空間内の正多面体について解説する．

1　多面体の射影

図1左のように球面の北極点から出る光によって，球面上の図形を平面上にうつすことができる．これを立体射影とよぶ．この射影によって，北極点以外の球面の点は平面と1対1に対応し，北極点は無限遠点と考えられる．正12面体を球面の正則分割と考えて立体射影すると，図1右に示した平面の12個の領域への分割が得られる．ここで，外側の領域も無限遠点を加えて，正12面体の一つの面に対応している．

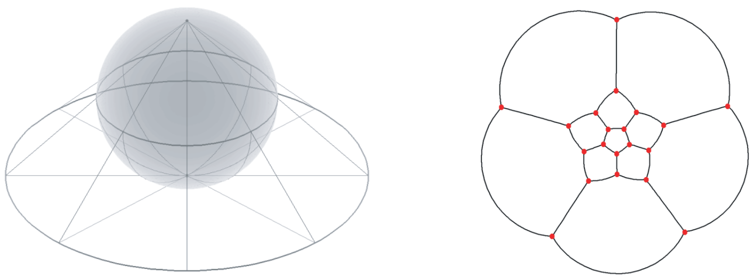

図 1: 正12面体の立体射影

正多面体を表すのに，シュレフリー記号が用いられる．まず，3以上の自然数nに対して，記号$\{n\}$で正n角形を表す．また，それぞれの頂点のまわりに正多角形$\{p\}$がq個集まってできる正多面体を記号$\{p,q\}$で表す．

2　4次元空間の正多面体の分類

4次元空間の正多面体は，3次元球面の正多面体による正則分割 (正多胞体) と考えられ，これは，立体射影によって3次元空間の領域への分割としてみることができる．この分割における頂点，辺，面，領域 (胞体) を，それぞれ0-セル，1-セル，2-セル，3-セルとよぶことにする．

図2は正120胞体を立体射影によって表したもので，120個の3-セルはすべて正12面体である．正120胞体はシュレフリー記号 $\{5, 3, 3\}$ で示される．一般に，4次元空間の正多胞体はシュレフリー記号 $\{p, q, r\}$ で表される．これは，正多面体 $\{p, q\}$ が，各辺のまわりに r 個集まっていて，各頂点のまわりの2次元球面による切り口の分割がタイプ $\{q, r\}$ であることを意味する．

19世紀半ばにシュレフリーによって，4次元空間の正多胞体は表1に示す6通りであることが示された．上の3つは正4面体，立方体，正8面体の4次元化であり，この系列は任意の次元で存在する．5次元以上では，これらの3通りの系列のみが存在することが知られている．

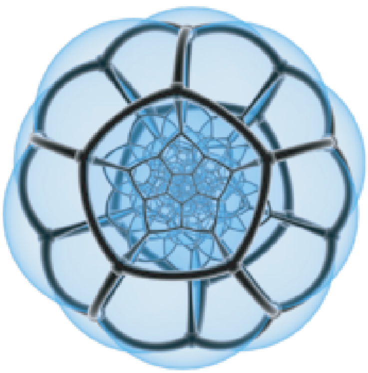

図 2: 正120胞体の立体射影

3　空間の幾何化

このように，正多面体は球面の幾何学と深く関わっている．2次元閉曲面の場合を考えると，例えば，トーラスの場合には局所的にユークリッド平面と合同な距離の構造を入れることができる．これを，トーラスはユークリッド平面をモデルとする幾何構造をもつといい，このような幾

表 1: 4 次元空間の正多面体

正胞体の種類	シュレフリー記号	3-セル	2-セル
正 5 胞体	$\{3, 3, 3\}$	正 4 面体	正 3 角形
正 8 胞体	$\{4, 3, 3\}$	立方体	正方形
正 16 胞体	$\{3, 3, 4\}$	正 4 面体	正 3 角形
正 24 胞体	$\{3, 4, 3\}$	正 8 面体	正 3 角形
正 120 胞体	$\{5, 3, 3\}$	正 12 面体	正 5 角形
正 600 胞体	$\{3, 3, 5\}$	正 4 面体	正 3 角形

何構造を導入することを幾何化とよぶ．2 次元の場合には，幾何構造のモデルとして，球面，ユークリッド平面，双曲平面の 3 通りが存在する．球面の幾何学はこれまでに，多面体を通してながめてきたものであり，三角形の内角の和が 180 度より大きくなる．一方，双曲平面は非ユークリッド幾何学のモデルであり，三角形の内角の和が 180 度より小さくなる．

3 次元の幾何学においても，このような幾何構造のモデルとなる空間を考えることが，幾何学の理解に重要であることが，サーストンによる幾何化予想，ペレルマンによるポアンカレ予想を含む幾何化予想の解決などによって明らかにされてきた，3 次元の場合には幾何構造のモデルとなる空間は 8 通り存在するが，図 3 に示したのがその中でも重要な 3 通りの場合である．

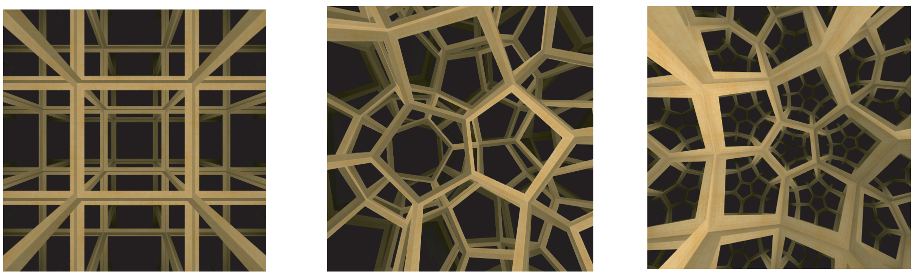

図 3: 3 次元空間のユークリッド，球面および双曲幾何構造

参考文献

1. 河野俊丈，曲面の幾何構造とモジュライ，日本評論社
2. J. R. ウイークス，曲面と 3 次元多様体を視る，現代数学社
http://www.geometrygames.org/CurvedSpaces/