

その後の発展

— 量から数, 数から量子へ —

2010年度公開講座『複素数の話』11月6日(土)
東京大学大学院数理科学研究科
細野 忍

0. 代数学の基本定理を実験しよう
1. 量と数 - 数の体系
2. 量から数, 数から量へ
3. 量から数, 数から量子へ
4. まとめ

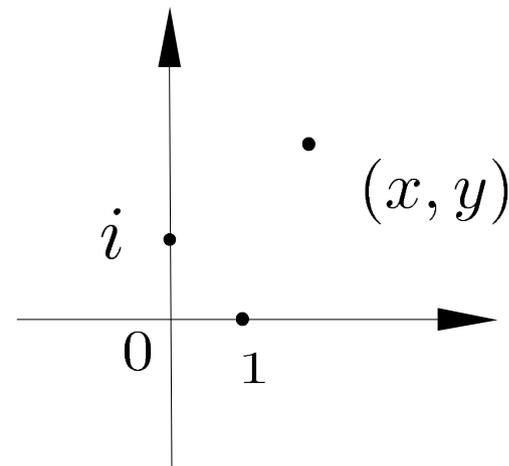
0. 代数学の基本定理を実験しよう

$$z = x + iy$$

複素数係数のn次方程式:

$$f(X) = 0$$

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \quad (a_0, a_1, \cdots, a_n \text{ は複素数})$$



複素数係数の $n(>0)$ 次方程式には、複素数の範囲で解がある。(代数学の基本定理)

因数定理「 $f(a)=0$ ならば 整式 $f(X)$ は $(x-a)$ で割りきれれる」によって、

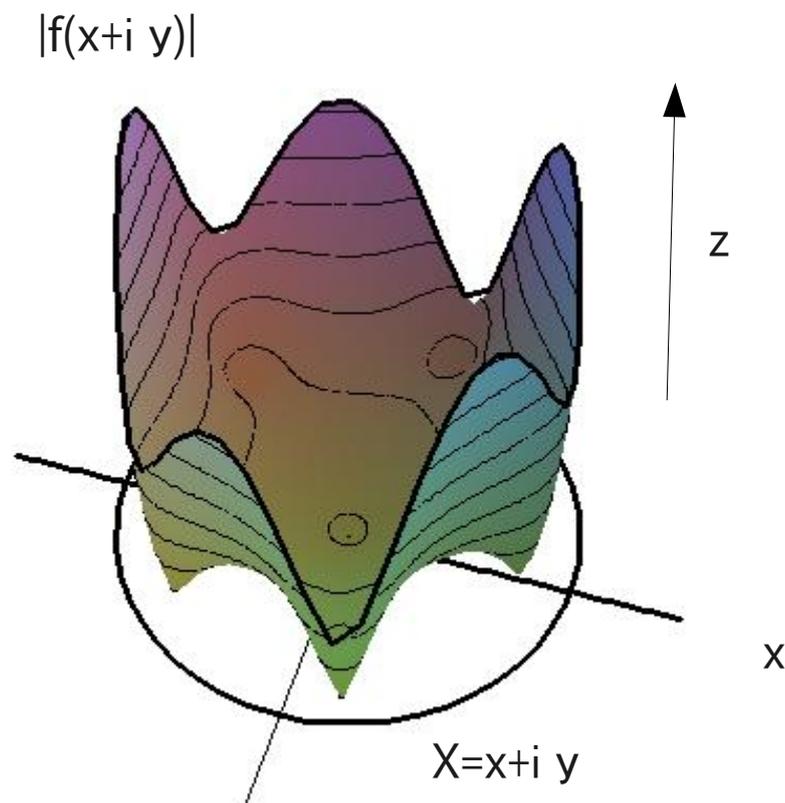
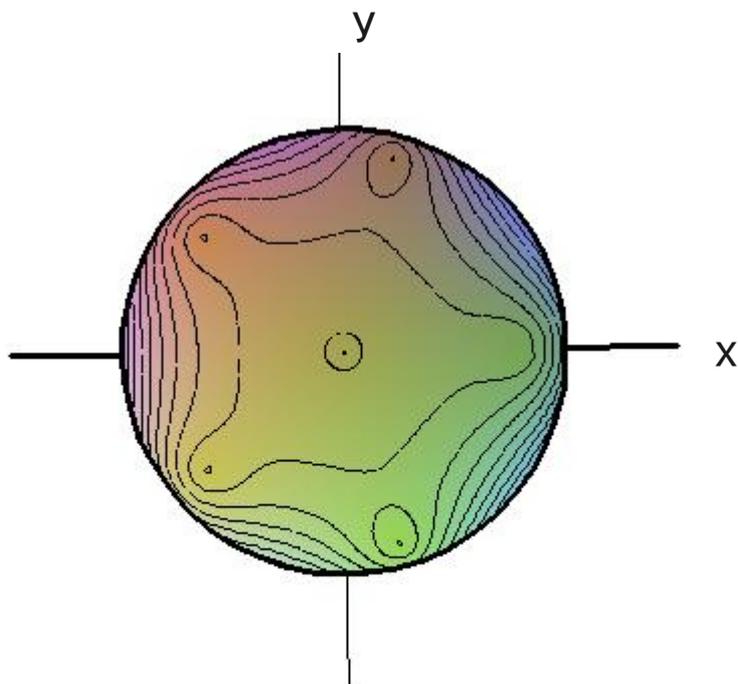
$$f(X) = a_n (X - c_1)(X - c_2) \cdots (X - c_n) \quad (c_i \text{ は複素数})$$

のように、1次式の積で表される。

実験:

整式(多項式) $f(X)$ に複素数 $X=x+iy$ を代入して, $f(X)=0$ となる (x,y) を探してみる.

$$f(X)=0 \iff |f(X)|=0$$



$$f(X) = X(2X^5 + X^3 + 3)$$

1. 量と数

量

1つ, 2つ, ...

1個の重さ, 2個の重さ, ...

1/3個, 2/5個, ...

$x^2 = a$ を満たす長さ ($a > 0$)

π, e, \dots

$i^2 = -1$ となる”数”を実数
に加えて表される量(?)

数

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbf{Z}, m \neq 0 \right\}$$

\mathbf{R} 実数

$$\mathbf{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbf{R}, i^2 = -1\}$$

i : 虚数単位

$a + ib$ ($b \neq 0$): 虚数

数の体系(体)

K:集合, 和 $a+b=b+a$, 積 $ab=ba$

(1) $(a+b)+c=(a+b)+c$, $a(bc)=(ab)c$

(2) $a+0=0+a=a$ を満たす 0 が存在する

(3) $a \cdot 1=1 \cdot a = a$ を満たす 1 が存在する

(4) 任意の a に対し, $a+a'=a'+a=0$ なる a' が存在する

(5) 任意の $a \neq 0$ に対し, $aa''=a''a=1$ となる a'' が存在する

(6) $a(b+c)=ab+ac$, $(a+b)c=ac+bc$

(1)~(6)を満たす
集合 **K** を **体** と呼ぶ.

K を係数にする x の(定数でない)任意の多項式が, x の一次式の積で書ける:

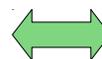
$$\begin{aligned} & x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 \\ & = (x + c_1)(x + c_2) \cdots (x + c_n) \quad (a_i \in \mathbf{K}, c_i \in \mathbf{K}) \end{aligned}$$

と書ける様な体 **K** は, **代数的閉体** であると言われる.

Q は代数的閉体でない.

R は代数的閉体でない.

C は代数的閉体である.



代数学の基本定理

体 K を大きくする手続き(代数拡大):

K : 体 $\rightarrow g(x)$ 既約多項式 (次数 >1)

$\rightarrow g(\alpha) = 0$ を満たす記号 α を用意して $K_1 = K(\alpha)$ とする.
このとき, $g(x)$ が既約であることから K_1 は体となる.

例: $g(x) = x^3 + x + 1$, $\mathbf{Q}(\alpha) = \{a + b\alpha + c\alpha^2 \mid a, b, c \in \mathbf{Q}\}$

$g(x) = x^2 + 1$, $\mathbf{Q}(\alpha) = \{a + b\alpha \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$

数の世界で知られている定理:

任意の体 K について,

体 K の代数拡大で, かつ代数的閉体であるもの \overline{K} が存在する.

\overline{K} は K に対して(同型を除いて)一意的に定まる.

「 \mathbf{R} に対して決まる $\overline{\mathbf{R}}$ は複素数 \mathbf{C} 」 代数学の基本定理

(\mathbf{Q} に対して決まる $\overline{\mathbf{Q}}$ もあるが, これは \mathbf{C} とは一致しない.)

<http://webpace.ship.edu/cgboer/platoscave.html>

Plato's allegory of the cave (プラトンの洞窟の比喩)

量の世界

数の世界

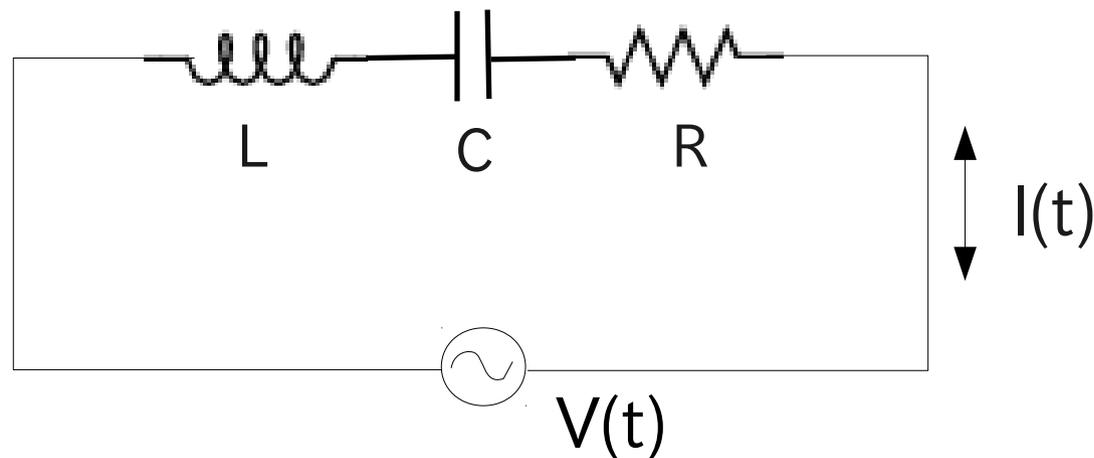
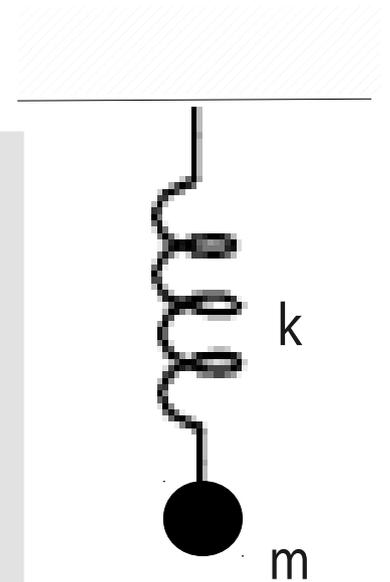
2.量から数, 数から量へ (複素数の効用)

量の時間変化 = 微分方程式で表されることが多い:

例: バネの減衰振動
電気回路

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t) - \gamma \frac{dx(t)}{dt}$$

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \frac{dV(t)}{dt}$$



1. 指数関数

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828 \dots$$

$$e^x : \text{指数関数} \quad \left(e^n, e^{\frac{m}{n}} = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^m, \dots\right)$$

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad (e^x)^a = e^{ax}$$

2. ベキ級数による定義

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (|x| < +\infty)$$

三角関数についてもベキ級数による定義が知られている:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

指数関数 + 数の世界 = 三角関数！

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) \end{aligned}$$

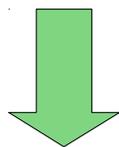
Eulerの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \frac{de^{ix}}{dx} = ie^{ix}$$

特に, $e^{i\pi} = -1$ (Euler の等式)

交流電流 $I(t)$ を決める微分方程式:

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \frac{dV(t)}{dt} \quad (V(t) = V_0 \cos(\omega t))$$



電流・電圧を複素数に拡張して考える。

$$L \frac{d^2 \mathbf{I}(t)}{dt^2} + R \frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} + \frac{1}{C} \mathbf{I}(t) = \frac{d\mathbf{V}(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \mathbf{V}_0 e^{i\omega t} \\ \mathbf{I}(t) &= \mathbf{I}_0 e^{i\omega t} \end{aligned}$$

$$\left(L(i\omega)^2 + R(i\omega) + \frac{1}{C} \right) \mathbf{I}_0 e^{i\omega t} = i\omega \mathbf{V}_0 e^{i\omega t}$$

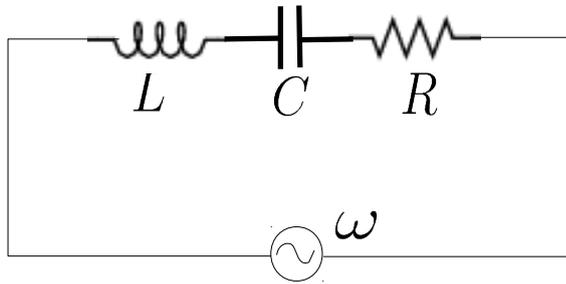
$$\mathbf{Z} = iL\omega + R + \frac{1}{iC\omega}$$

複素インピーダンス

$$\mathbf{Z} \mathbf{I}_0 = \mathbf{V}_0$$

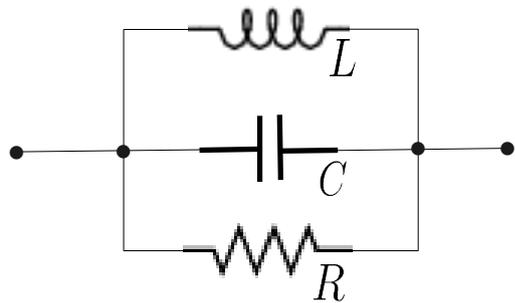
交流電流に関するオームの法則

$$\mathbf{Z} \mathbf{I}_0 = \mathbf{V}_0$$



$$\mathbf{Z} = iL\omega + \frac{1}{iC\omega} + R$$

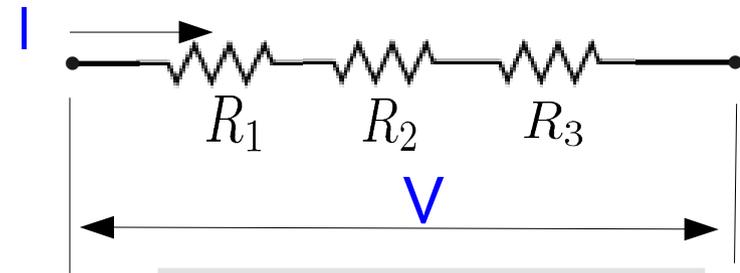
複素インピーダンス



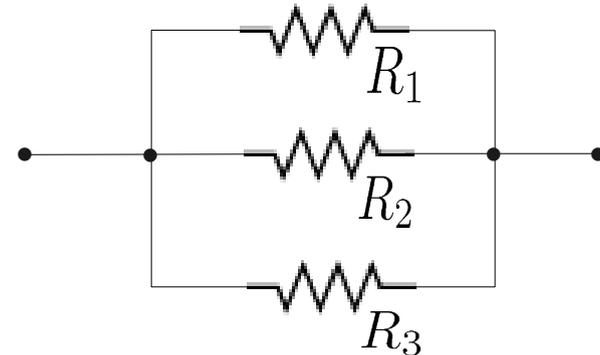
$$\frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{iL\omega} + iC\omega + \frac{1}{R}$$

$$\mathbf{I}_0 = \frac{1}{\mathbf{Z}} \mathbf{V}_0$$

$$RI = V \quad \text{オームの法則}$$



$$R = R_1 + R_2 + R_3$$



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$|\mathbf{I}_0| = \left| \frac{1}{\mathbf{Z}} \right| |\mathbf{V}_0| = \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right)^2} |\mathbf{V}_0|$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{で電流最小となり, 回路は共振.}$$

3. 量から数へ，数から量子へ

20世紀 量子力学の発見

- ・1900 Planck 黒体輻射の理論 (h Planck 定数)
- ・1905 Einstein 光量子の理論 「振動数 ν の光はエネルギー $h\nu$ を持った粒子」
- ・1923 de Broglie 物質波の理論 「運動量 p を持つ粒子は $\lambda = h/p$ の波の性質を持つ」
- ・原子スペクトルの実験と理論

Bohr(1913), Sommerfeld(1915), Heisenberg(1925), Schrödinger(1926)....

$$\oint p dx = nh \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Bohrの原子模型
Wilson-Sommerfeldの量子化条件

エネルギーなど，連続的に値をとると思われていた量が，原子・電子のミクロの世界では，とびとびの値しか許されない。

とびとびの値をとる量を，量子(quanta)と呼ぶ。



量子力学
(Quantum Mechanics)

水素原子内の電子の方程式 (Schrödinger方程式, 1926)

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{e^2}{r} \right\} \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

$$\psi(\mathbf{x}, t) \quad \text{波動関数} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{確率波と解釈} \\ \text{値は複素数} \end{array} \right.$$

$$P(\mathbf{x}, t) = \overline{\psi(\mathbf{x}, t)} \psi(\mathbf{x}, t) \quad \text{時刻 } t \text{ に電子が位置 } x \text{ に存在する確率(密度)}$$

位置

$$\langle x(t) \rangle = \int \overline{\psi(x, t)} x \psi(x, t) dx$$

運動量

$$\langle p(t) \rangle = \int \overline{\psi(x, t)} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x, t) dx$$

エネルギー

$$\langle E(t) \rangle = \int \overline{\psi(x, t)} E(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi(x, t) dx$$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \varphi(\mathbf{x}), \quad \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 + \frac{e^2}{r} \right\} \varphi(\mathbf{x}) = E\varphi(\mathbf{x})$$

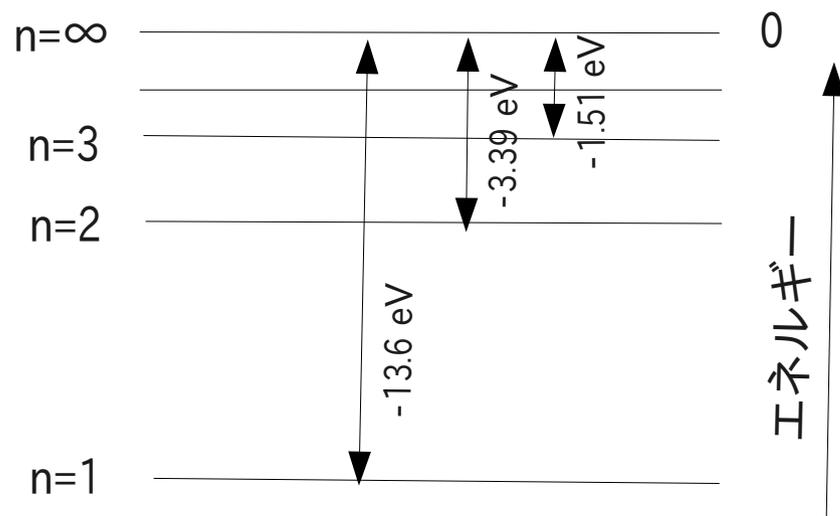
$$\varphi = \text{const.} Y_{l,m}(\theta, \phi) R_{n,l}(r)$$

$$E_{n,l,m} = -\frac{e^2 m_e}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

- $n = 1, 2, 3, \dots$ 主量子数
- $l = 0, 1, 2, \dots, n$ 副量子数
- $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$ 磁気量子数

K殻, L殻, M殻, ... $n = 1, 2, 3, \dots$

s軌道, p軌道, d軌道, ... $l = 0, 1, 2, \dots, n$



$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 - \frac{e^2}{r} + \frac{e\hbar}{2m_e} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}) \right\} \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \psi(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{x}, t) \\ \psi_2(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}$$

(Pauliのスピン行列)

Dirac方程式(1928) [陽電子の予言(後に発見)]

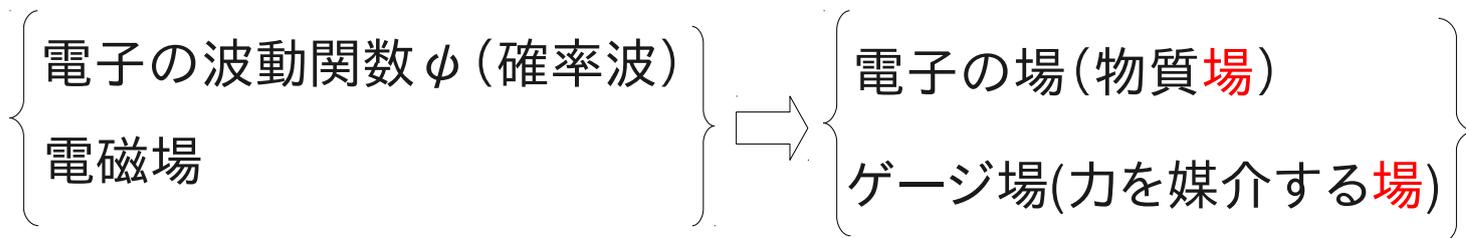
$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -i\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \\ -i\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_e c^2 & 0 \\ 0 & -m_e c^2 \end{pmatrix} - \frac{e^2}{r} \right\} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

電子の波動関数

陽電子の波動関数

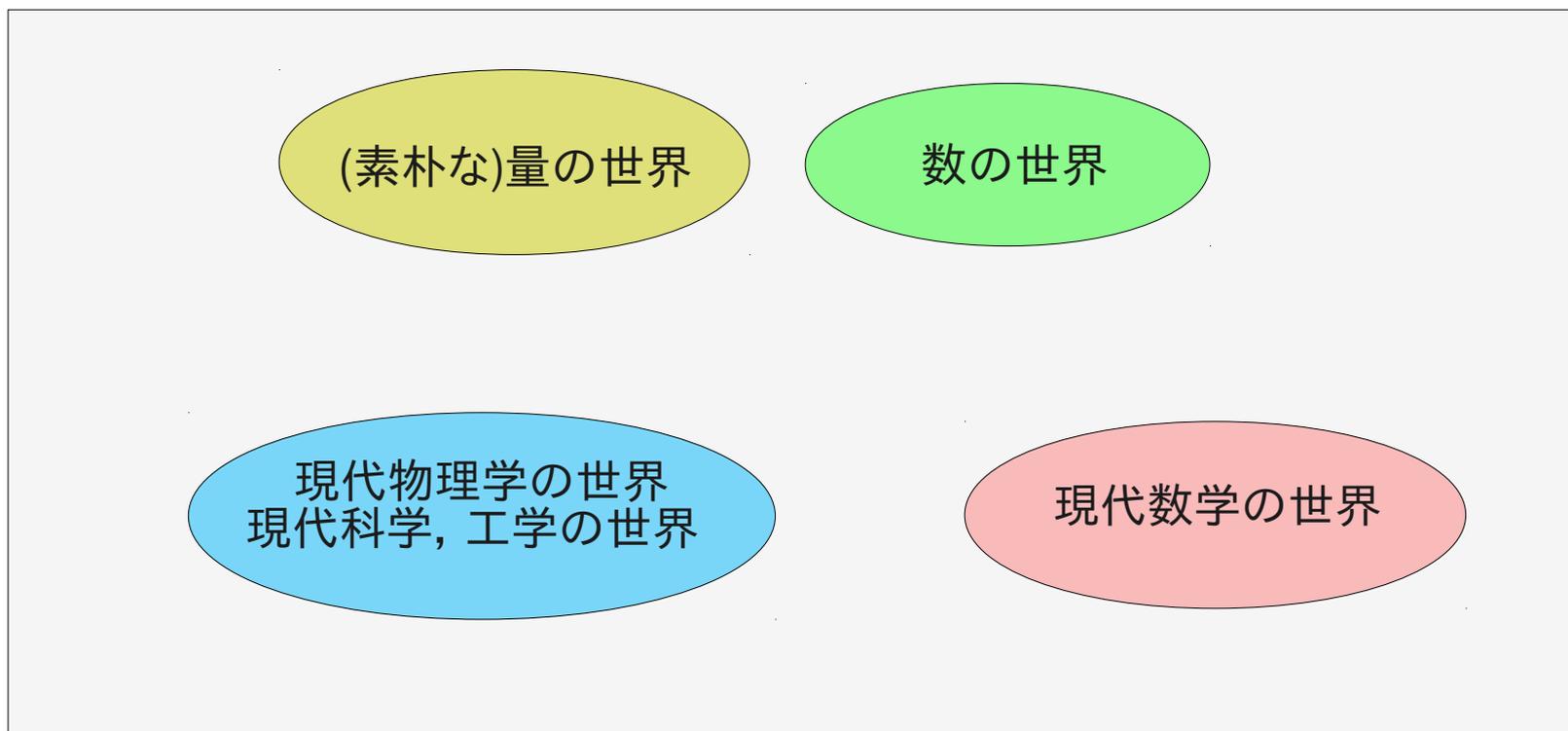
現代物理学では、



空間の各点に備えられた性質で、**複素数**を用いて表される。

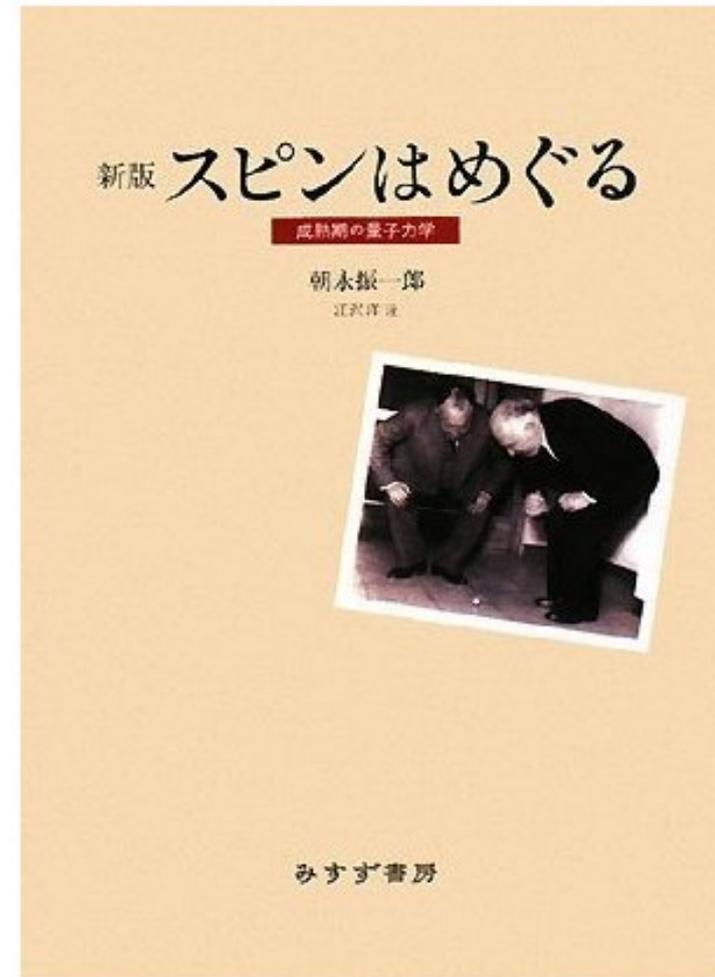
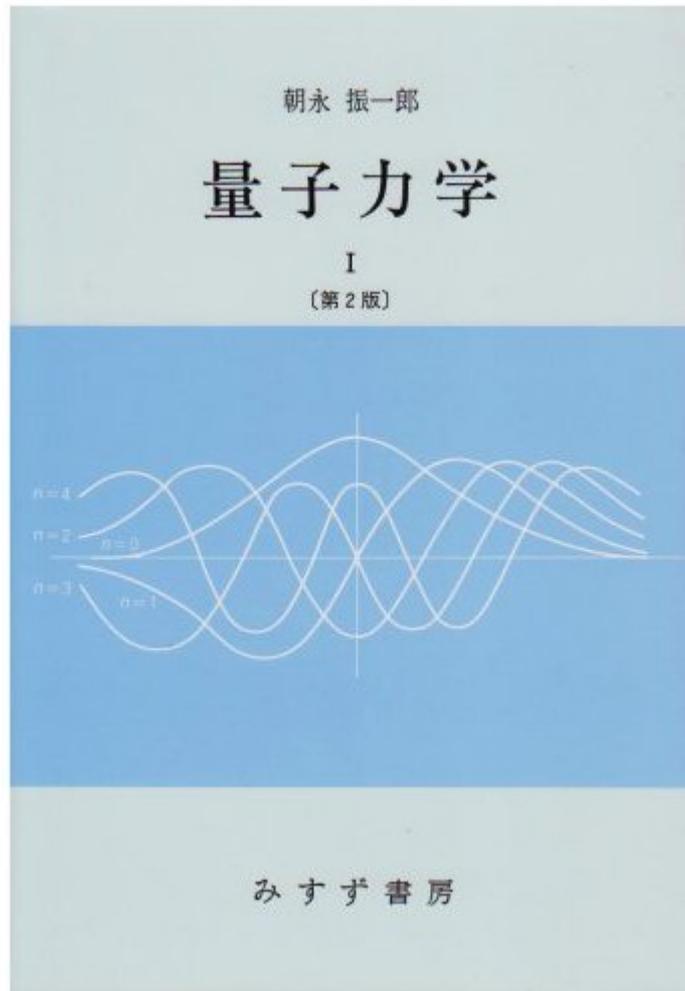
と考えられ、**場の量子**によってミクロの世界を理解している。

4. まとめ



Bohr半径 0.05 nm (M殻では0.5nm)

参考文献： 朝永振一郎著



(他に、随筆集もおすすめ)