ℓ進層の特異台と特性サイクル

北海道大学 2014.7.17, 18

エタール・コホモロジーは，Weil予想の解決を動機としてGrothendieckによって導入されたが，正標数の多様体上のℓ進層の暴分岐と複素多様体上の$\mathcal{D}$加群の不確定特異点のあいだには強い類似が観察されている．$\mathcal{D}$加群の超局所解析では余接束上に特性サイクルが定義されることから，ℓ進層にも余接束上に特性サイクルが定義されることが期待される．

kを標数$p>0$の代数閉体とし，Xをk上スムーズなd次元の代数多様体とする．ℓをpと異なる素数とする．特性サイクルの加法性より，Xの開部分スキームU上のスムーズなℓ進層$\mathcal{F}$の零延長$j_!\mathcal{F}$の場合が基本的である．

特性サイクル $\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}$は，余接束$T^*X$の$d$次元錐的サイクルとして定義され，次の性質1. と2. をみたすことが期待される．

1. オイラー数:Xが固有的なら，**オイラー数** $\chi_c(U,\mathcal{F})=\sum_{q=0}^{2d}(-1)^q\dim H_c^q(U,\mathcal{F})$は特性サイクルと零切断の交点数

$$\chi_c(U,\mathcal{F})=(\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F},T^*_XX)_{T^*X} \tag{0.1}$$

と等しい．

2. 消失輪体：uをXの閉点とし，スムーズな代数曲線への射$f\colon X\to C$による像を$v=f(u)$とおく．vで0でないC上の微分形式のひきもどしが定める余接束の切断$df\colon X\to T^*X$と特性サイクル$\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}$の共通部分が$u$のファイバー$T^*_uX\subset T^*X$の近傍で孤立点であるとき，$u$は$j_!\mathcal{F}$に関して$f\colon X\to C$の**孤立特性点**であるという．

uが$j_!\mathcal{F}$に関して$f\colon X\to C$の孤立特性点ならば，消失輪体の全次元の交代和も特性サイクルとの交点数

$$-\mathrm{dimtot}_v\phi_u(j_!\mathcal{F},f)=(\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F},df)_{T^*X,u} \tag{0.2}$$

として表せる． □

孤立特性点しかもたないような$f\colon X\to C$はたくさんあるので，(0.2)は特性サイクル$\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}$を特徴づける条件である．

特性サイクルについては次のことが既知である．

例 0.1. 1. 馴分岐の場合：U が X の単純正規交叉因子 D の補開部分スキームで，$\mathcal{F}$ は D にそって馴分岐であるとする．D の既約成分を $D_1,\ldots,D_m$ とし，添字 $1,\ldots,m$ の集合 I に対し $X_I=\bigcap_{i\in I}D_i$ とおき $T^*_{X_I}X$ を余法束とすると，

$$\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}=(-1)^d\mathrm{rank}\ \mathcal{F}\sum_{I\subset\{1,\ldots,m\}}[T^*_{X_I}X] \tag{0.3}$$

である．この場合 (0.1) は以前から知られていたことであり，(0.2) は Enlin Yang 氏が最近確認した．

2. 曲線の場合：$\dim X=1$ なら，

$$\mathrm{Char}\ j_!\mathcal{F}=-\Big(\mathrm{rank}\ \mathcal{F}\cdot[T^*_XX]+\sum_{x\in D}\mathrm{dimtot}_x\mathcal{F}\cdot[T^*_xX]\Big) \tag{0.4}$$

である．この場合 (0.1) は Grothendieck-Ogg-Shararevich の公式 [2] であり，(0.2) はスワン導手の誘導公式である． □

X が高次元のときにも次のことが示せる．

定理 0.2. X を k 上のスムーズな d 次元代数多様体とする．$j_!\mathcal{F}$ の特異台 $SS(j_!\mathcal{F})$ が余接束 T^*X の余次元 d の錐的閉部分集合として定義され，後述する条件をみたすならば，特性サイクル Char $j_!\mathcal{F}$ が特異台 $SS(j_!\mathcal{F})$ に台をもつ $\mathbf{Z}\Big[\dfrac{1}{p}\Big]$ 係数のサイクルとして定義され，(0.2) がなりたつ． □

曲面の場合には，次がなりたつ．

定理 0.3. X を k 上のスムーズな曲面とすると，特異台 $SS(j_!\mathcal{F})$ の存在についての仮定は必ずなりたち，したがって特性サイクル Char $j_!\mathcal{F}$ が特異台 $SS(j_!\mathcal{F})$ に台をもつサイクルとして定義される．(0.2) だけでなく (0.1) もなりたつ． □

特性サイクルの定義と定理 0.2 の証明の方針を簡単に紹介する．特性サイクルを定義するには，特異台の各既約成分に対しその係数を定義すればよい．X が準射影的であるとし，X の射影空間へのうめこみ $X\to\mathbf{P}=\mathbf{P}(E^\vee)$ をとる．X の超平面切断の普遍族 $X\times_{\mathbf{P}}\mathbf{H}\to\mathbf{P}^\vee$ は $\mathbf{P}$ の余接束の制限 $X\times_{\mathbf{P}}T^*\mathbf{P}$ にともなう射影空間束と同一視される．特異台の各既約成分の生成点が定める $X\times_{\mathbf{P}}\mathbf{H}$ の点での，$j_!\mathcal{F}$ の $X\times_{\mathbf{P}}\mathbf{H}$ へのひきもどしの，射 $X\times_{\mathbf{P}}\mathbf{H}\to\mathbf{P}^\vee$ に関する消失輪体の全次元を使って係数を定義する．ここで，剰余体一般の局所体に対して分岐理論が拡張されていることを使う．

特性サイクルが (0.2) をみたすことは，まず双対射影空間 $\mathbf{P}^\vee$ 内の直線が定める射の場合に証明する．一般の場合と特性サイクルの定義がうめこみ $X\to\mathbf{P}=\mathbf{P}(E^\vee)$ によらないことは，隣接輪体の全次元が曲線への射を少し変形しても変わらないという安定性を証明し，そこから導く．これはどちらも Deligne-Laumon の Swan 導手の平坦性の，消失トポスを使った拡張から導く．

定理 0.3 の証明は省略する．

全体の流れはだいたい次の図のようになっている．

$$\begin{tikzcd}
 & \text{特異台の存在} \arrow[d] & \text{分岐理論} \arrow[l, "\text{強非退化のとき}"'] \arrow[dl] \\
 & \text{特性サイクルの定義} \arrow[dl, "\dim X=2"'] \arrow[d] & \text{Swan 導手の平坦性} \arrow[l] \arrow[dl] \\
\text{Euler 数の公式} & \text{Milnor 公式} & \text{消失トポス} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

目 次

1 消失輪体と全次元

Milnor 公式で表わす不変量を定義する．

K を離散付値体とし，$S = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ とする．Λ を有限体とし，その標数は S で可逆とする．X を S 上の有限型スキームとし，$\mathcal{K}$ を X 上の Λ 加群の層の構成可能な複体とする．s を S の閉点の上にある幾何的点とし，$\bar{\eta}$ を強局所化 $S_{(s)}$ の生成点の上にある幾何的点とする．x を幾何的ファイバー $X_s = X \times_S s$ の幾何的点とする．隣接輪体の複体の x での茎を $\psi_x(\mathcal{K}) = R\Gamma(X_{(x)} \times_{S_{(s)}} \bar{\eta}, \mathcal{K})$ で定める．消失輪体の複体は完全三角 $\to \mathcal{K}_x \to \psi_x(\mathcal{K}) \to \phi_x(\mathcal{K}) \to$ をみたす．

ヘンゼル離散付値体 K の Λ 線形空間上のガロワ表現 V の全次元 $\dim \mathrm{tot} V$ は次のように定義する．G_K を絶対ガロワ群とし，$G_K^r (r \geqq 1, r \in \mathbf{Q})$ を log なし分岐

群によるフィルトレイションとする．有理数 $r \geqq 1$ に対し $G_K^{r+} = \overline{\bigcup_{s>r} G_K^s} \subset G_K^r$ とおく．G_K^1 は惰性群 I であり，G_K^{1+} はその p-Sylow 部分群 P である．暴分岐群 G_K^{1+} の位数は p 巾で ℓ と素だから，G_K の作用で安定な V の直和分解

$$V = \bigoplus_{r \geqq 1} V^{(r)} \tag{1.1}$$

で任意の有理数 $r \geqq 1$ に対し G_K^{r+} 不変部分が $V^{G_K^{r+}} = \bigoplus_{s \geqq r} V^{(s)}$ をみたすものがただ 1 つ定まる．これを V の**傾き分解**という．

$$\dim \mathrm{tot} V = \sum_{r \geqq 1} r \cdot \dim V^{(r)} \tag{1.2}$$

を V の**全次元**という．$\dim \mathrm{tot} V \geqq \dim V$ であり，等号は V への作用が馴 $V = V^{G_K^{1+}}$ であることと同値である．K の剰余体が完全体ならば，Hasse-Arf の定理より V の全次元 $\dim \mathrm{tot} V$ は自然数である [9].

2 局所非輪状性

特異台の定義のため，局所非輪状性に関する用語を復習する．

Λ を有限体とし，Λ の標数はスキーム S で可逆とする．$f\colon X \to S$ をスキームの射とし，$\mathcal{K}$ を X 上の構成可能な Λ 加群の複体とする．$f\colon X \to S$ が $\mathcal{K}$ に関して**局所非輪状**であるとは，X の任意の幾何的点 x と $s = f(x)$ の任意の一般化 $t \to S_{(s)}$ に対し，標準射 $\mathcal{K}_x \to R\Gamma(X_{(x)} \times_{S_{(s)}} t, \mathcal{K})$ が同形であることをいう．$X_{(x)} \times_{S_{(s)}} t$ を Milnor ファイバーという．$X_{(x)} \times_{S_{(s)}} S_{(t)}$ は Milnor チューブという．

スムーズ射の局所非輪状性より，スムーズな射 $f\colon X \to S$ は局所定数層に関して局所非輪状である．

$f\colon X \to S$ が $\mathcal{K}$ に関して局所非輪状ならば，任意の準有限射 $S' \to S$ に対し，$f'\colon X' = X \times_S S' \to S'$ は $\mathcal{K}$ のひきもどしに関して局所非輪状である．任意の射 $S' \to S$ に対し，$f'\colon X' = X \times_S S' \to S'$ は $\mathcal{K}$ のひきもどしに関して局所非輪状なとき，$f\colon X \to S$ は $\mathcal{K}$ に関して普遍的に局所非輪状であるという．任意のスムーズな射 $S' \to S$ に対し，$f'\colon X' = X \times_S S' \to S'$ が $\mathcal{K}$ のひきもどしに関して局所非輪状ならば，$f\colon X \to S$ は $\mathcal{K}$ に関して普遍的に局所非輪状である．

命題 2.1. 1.[1] S が 1 点なら，$f\colon X \to S$ は任意の $\mathcal{K}$ に関して普遍的に局所非輪状である．

2.[3] $f\colon X \to Y$ が $\mathcal{K}$ に関して局所非輪状かつ $Y \to S$ がスムーズならば，合成 $X \to S$ も $\mathcal{K}$ に関して局所非輪状である．

3　特異台

特異台を，代数曲線への射の非輪状性を統制するものとして定義する．

k を標数 $p>0$ の代数閉体とし X を k 上スムーズな d 次元代数多様体とする．$U=X-D$ を k の開部分スキームとし，$j\colon U\to X$ を開うめこみとする．$\ell\neq p$ を素数とし，Λ を標数 ℓ の有限体とする．$\mathcal{F}$ を U 上の Λ 加群の構成可能な局所定数層とする．

$T^*X=\mathbf{V}(\Omega^1_{X/k})$ を X の余接束とする．ベクトル束のスカラー倍で安定な閉部分集合を**錐的**という．$S=\bigcup_{i\in I}S_i$ を余接束 T^*X の余次元 d の錐的既約閉部分集合有限個の合併とする．k 上のスムーズなスキームのスムーズ射 $f\colon X\to Y$ が S に関して**非特性的**であるとは，$f^*\colon X\times_Y T^*Y\to T^*X$ の像と S の共通部分が零切断に含まれることをいう．S が次の条件 (SS1) をみたすとき，S は $j_!\mathcal{F}$ の**特異台**であるという．

(SS1)

$$\begin{tikzcd} X\times B \arrow[drr] & W \arrow[l] \arrow[rr, "f"] & & C \arrow[dl] \\ & & B & \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

を k 上スムーズなスキームのスムース射の可換図式で，$W\to X\times B$ はエタール，$C\to B$ は相対次元1であるものとする．D のすべての既約成分 D_i で $\dim D_i>0$ であるものに対し f の $D_i\times B$ の逆像への制限が平坦であり，$f\colon W\to C$ が $S\subset T^*X$ のひきもどしの $W\times_X T^*X\to T^*W$ による像に関して非特性的であるとする．このとき，$f\colon W\to C$ は $j_!\mathcal{F}$ のひきもどしに関して局所非輪状的である．

特異台 $S=SS(j_!\mathcal{F})$ は上の条件 (SS1) で一意的に定まるものではなく，d 次元の錐的部分多様体の合併 S' が S を含むものは，どれも (SS1) をみたす．

4　分岐理論と特異台

余次元 $\geqq 2$ の部分をのぞけば，特異台 $SS(j_!\mathcal{F})$ が分岐理論を使って定義される．

命題 4.1. [10] $U=X-D$ が単純正規交叉因子の補開部分スキームであるとする。$\mathcal{F}$ の D にそった分岐が**強非退化**であるとする．このとき，特異台 $SS(j_!\mathcal{F})$ が余接束の T^*X の余次元 d の錐的サイクルとして定義され，$f\colon X\to Y$ がスムーズで D への制限が平坦で $SS(j_!\mathcal{F})$ に関して非特性的ならば，$f\colon X\to Y$ は $j_!\mathcal{F}$ に関して局所非輪状である．

命題 4.1 は，$f\colon X\to Y$ の相対次元が 1 のときは，強非退化なら曲線への制限の分岐が特性形式で統制できることを使って，局所非輪状性についての下の命題 4.4 を適用して証明する．一般の場合には，命題 2.1.2 を使って相対次元が 1 の場合に帰着させる．スムーズな射によるひきもどしによって強非退化性が保たれ，

特性形式もひきもどしになることから (SS1) がみたされることが従う．強非退化性の仮定は，余次元 $\geqq 2$ の部分をのぞけばみたされる．

系 4.2. 強非退化性の仮定が有限個の閉点をのぞきみたされるならば，(SS1) をみたす特異台 $SS(j_!\mathcal{F})$ が定義される．とくに X が曲面ならば，(SS1) をみたす特異台 $SS(j_!\mathcal{F})$ が定義される．

$f\colon Z \to S$ を S 上の準有限スキームとし，$\varphi\colon Z \to \mathbf{Z}$ を構成可能な関数とする．Z の任意の点 x と $s = f(x)$ の任意の一般化 $s \leftarrow t$ に対し

$$\varphi(x) = \sum_{z \in Z_{(x)} \times_{S_{(s)}} t} \varphi(z) \tag{4.1}$$

であるとき，φ は S 上**平坦**であるという．

補題 4.3. S をネータースキームとし，Z を S 上の準有限スキームとする．Z 上の構成可能関数 φ が S 上平坦ならば，次の条件はすべて同値である．
(1) $\varphi = 0$ である．
(2) Z の密な開部分スキーム上で $\varphi = 0$ である．

$f\colon X \to S$ を平坦な曲線とし，Z を X の閉部分スキームで S 上準有限かつ平坦なものとする．$U = X - Z$ は S 上スムーズであるとし，$j\colon U \to X$ を開うめこみとする．$\mathcal{F}$ を U 上の構成可能な局所定数層とし，Z 上の関数を

$$\varphi(x) = \dim \mathrm{tot}_x \mathcal{F}|_{U_{f(x)}}$$

で定める．Deligne-Laumon の半連続性より次がなりたつ．

命題 4.4. [6] Z 上の関数 φ は構成可能である．さらに，次の条件はたがいに同値である．
(1) $f\colon X \to S$ は $j_!\mathcal{F}$ に関して普遍的に局所非輪状である
(2) φ は S 上平坦である．

5　特性サイクルの構成

X の射影空間へのうめこみを使って，特性サイクルを定義する．

記号は前節のとおりとする．X は準射影的であるとし，$\mathcal{L}$ を可逆 $\mathcal{O}_X$ 加群，$E \subset \Gamma(X, \mathcal{L})$ を有限次元 k 部分空間で，X の射影空間へのうめこみ $X \to \mathbf{P} = \mathbf{P}(E^\vee)$ を定めるものとする．

$\mathbf{P}^\vee = \mathbf{P}(E)$ を双対射影空間とし，$\mathbf{H} = \{(x, H) \mid x \in H\} \subset \mathbf{P} \times \mathbf{P}^\vee$ を超平面の普遍族とする．超平面切断の普遍族

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X \times_{\mathbf{P}} \mathbf{H} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbf{P}^\vee \end{array}$$

を，余接束の制限にともなう射影空間束 $\mathbf{P}(X\times_{\mathbf{P}}T^*\mathbf{P})$ と同一視する．[5]

以下，$j_!\mathcal{F}$ の特異台が存在すると仮定し，$S=SS(j_!\mathcal{F})$ で $j_!\mathcal{F}$ の特異台を表わす．$SS(j_!\mathcal{F})=\bigcup_{i\in I}S_i$ とし，$\tilde{S}_i$ で全射 $X\times_{\mathbf{P}}T^*\mathbf{P}\to T^*X$ による S_i の逆像，$\mathbf{P}(\tilde{S}_i)\subset X\times_{\mathbf{P}}\mathbf{H}=\mathbf{P}(X\times_{\mathbf{P}}T^*\mathbf{P})$ でその射影化を表わす．

$\xi_i\in\mathbf{P}(\tilde{S}_i)$ を生成点とし，$\eta_i\in\mathbf{P}^\vee$ をその像とする．必要なら E をそのテンソル積でおきかえて，ξ_i の剰余体が η_i の剰余体の有限次拡大であるとする．η_i での局所環は離散付値環である．消失輪体を使って

$$a_i=(-1)^{d-1}\dim\mathrm{tot}_{\eta_i}\phi(q^*j_!\mathcal{F},p)$$

とおき，$[\xi_i:\eta_i]$ で剰余体の拡大次数を表わす．射影空間へのうめこみ $X\to\mathbf{P}=\mathbf{P}(E^\vee)$ が定める特性サイクルを

$$\mathrm{Char}^E j_!\mathcal{F}=(-1)^d\sum_{i:[\eta_i:\xi_i]\ \text{は有限}}\frac{a_i}{[\xi_i:\eta_i]}[S_i]. \tag{5.1}$$

で定義する．$\mathrm{Char}^E j_!\mathcal{F}$ の係数が整数であることと，うめこみ $X\to\mathbf{P}=\mathbf{P}(E^\vee)$ によらないことはあとでわかる．

6　ペンシルが定める射

定理 0.2 の証明の鍵は，ペンシルが定める射について Milnor 公式 (0.2) がなりたつことと，孤立特性点について曲線への射を少し動かしても全次元は変わらないことの 2 つである．この 2 つの性質がどちらも Swan 導手の平坦性の帰結であることを示す．

L を $\mathbf{P}^\vee$ 内の直線とする．L の点である超平面すべての共通部分として定まる余次元 2 の部分空間を $A_L\subset\mathbf{P}$ とし，$X_L^\circ=X-X\cap A_L$ とすると，X_L° の点をその点をとおる超平面にうつす射 $p_L^\circ\colon X_L^\circ\to L$ が定まる．この射をペンシル L が定める射という．ペンシルが定める射に対しては (0.2) がなりたつことを，普遍的な族を考えることで示す．

$\mathbf{G}=\mathrm{Gr}(E,2)$ を $\mathbf{P}^\vee=\mathbf{P}(E)$ 内の直線のモジュライとし，$\mathbf{D}\subset\mathbf{G}\times\mathbf{P}^\vee$ を普遍直線束とする．$\mathbf{D}$ は $L\subset V$ をみたす E の 1 次元部分空間と 2 次元部分空間の対のなす旗多様体である．$(X\times\mathbf{G})'$ で $X\times_{\mathbf{P}}T^*\mathbf{P}$ の部分直線束と階数 2 の部分ベクトル束の対のなす X 上の旗空間束を表すと，右の四角がカルテシアンである

$$\begin{array}{ccccc} X\times\mathbf{G} & \longleftarrow & (X\times\mathbf{G})' & \longrightarrow & X\times_{\mathbf{P}}\mathbf{H}\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p}\\ \mathbf{G} & \longleftarrow & \mathbf{D} & \longrightarrow & \mathbf{P}^\vee. \end{array} \tag{6.1}$$

可換図式が得られる．$\mathbf{A}\subset\mathbf{G}\times\mathbf{P}$ を普遍ペンシルの軸とすると，$(X\times\mathbf{G})'\to X\times\mathbf{G}$ は $\mathbf{A}$ との共通部分でのブローアップである．右のたての射 $p\colon X\times_{\mathbf{P}}\mathbf{H}\to\mathbf{P}^\vee$ を使って 9 章で局所ラドン変換を定義する．

$\mathbf{P}^\vee$ の直線 L に対応する点 $[L] \in \mathbf{G}$ での (6.1) の左の四角のファイバー

$$\begin{CD} X @<<< X_L \\ @VVV @VV{p_L}V \\ [L] @<<< L \end{CD}$$

の射 $p_L\colon X_L \to L$ は閉うめこみ $L \to \mathbf{P}^\vee$ による (6.1) の右のたての射 $p\colon X \times_{\mathbf{P}} \mathbf{H} \to \mathbf{P}^\vee$ のひきもどしである．

補題 6.1. $D = \bigcup_i D_i$ を既約成分とし，E_i を $E \to \Gamma(D_i, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{D_i})$ の核とする．$X \times_{\mathbf{P}} \mathbf{H} \to \mathbf{P}^\vee$ は $j_!\mathcal{F}$ のひきもどしに関して，$\mathbf{P}(\tilde{S})$ と $D_i \times \mathbf{P}(E_i)$ の逆像の合併の外で局所非輪状である．

証明. $Z \subset (X \times \mathbf{G})'$ を $\mathbf{P}(SS(j_!\mathcal{F})^\sim) = \bigcup_{i \in I} \mathbf{P}(\tilde{S}_i) \subset X \times_{\mathbf{P}} \mathbf{H}$ の逆像とする．

$(X \times \mathbf{G})' \to X \times_{\mathbf{P}} \mathbf{H}$ の $(X \times \mathbf{G})^\circ = (X \times \mathbf{G}) - (X \times \mathbf{G}) \cap \mathbf{A}$ への制限は全射で，$\mathbf{D} \to \mathbf{P}^\vee$ はスムーズな全射でありしたがってエタール局所的には切断があるから，$(X \times \mathbf{G})^\circ \to \mathbf{D}$ が Z と $D_i \times \mathbf{P}(E_i)$ の逆像の合併の外で $j_!\mathcal{F}$ のひきもどしに関して局所非輪状なことを示せばよい．(SS1) を図式

$$\begin{tikzcd} X \times \mathbf{G} \arrow[drr] & (X \times \mathbf{G})^\circ \arrow[l] \arrow[r, "f"] & \mathbf{D} \arrow[d] \\ & & \mathbf{G} \end{tikzcd} \tag{6.2}$$

に適用すればよい． ■

$W \subset (X \times \mathbf{G}) - (X \times \mathbf{G}) \cap \mathbf{A}$ を $Z^\circ = W \cap Z$ が $\mathbf{G}$ 上準有限となる最大の開部分スキームとし，図式 (6.2) 中の $(X \times \mathbf{G})^\circ$ を W で置き換えたものに次節の命題 7.1 を適用することでペンシルに対する Milnor 公式を証明する．

7 Swan 導手の平坦性

命題 4.4 で X がスムーズな場合に (1)⇒(2) を一般化する。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd} \tag{7.1}$$

をスキームの有限型な射の可換図式とする．Z を X の閉部分スキームで S 上準有限なものとする．$g\colon Y \to S$ はスムーズかつ相対次元は 1 であるとする．X の各幾何的点 x に対し，$y = f(x), s = p(x)$ とおくと，$S_{(s)}$ 上の有限スキーム $Z \times_X X_{(x)}$ の $f_{(x)}\colon X_{(x)} \to Y_{(y)}$ による像 $T_{(x)}$ は $S_{(s)}$ 上平坦であり，$Y_{(y)} - T_{(x)}$ は $S_{(s)}$ 上スムーズであるとする．

命題 7.1. 記号を上の通りとする．$\mathcal{K}$ を X 上の構成可能な Λ 加群の層の複体で，$p\colon X\to S$ は $\mathcal{K}$ に関して局所非輪状であり，$f\colon X\to Y$ は Z の外では $\mathcal{K}$ に関して局所非輪状であるとする．

1. すべての整数 q に対し，$Y_{(y)}$ 上の層 $R^q f_{(x)*}\mathcal{K}$ は $T_{(x)}$ の外で局所定数層である．
2. Z で定義された関数を

$$\varphi(x)=\dim\operatorname{tot}_y((Rf_{(x)*}\mathcal{K})|_{Y_{(y),s}})$$

で定めると，φ は構成可能かつ平坦である．

命題7.1は，9章の消失輪体の一般化を使って命題4.4 (1)⇒(2) から導く．命題4.4 (1)⇒(2) は，命題7.1.2 で $X=Y$ の場合である．

S をネータースキームとし，X を S 上の有限型スキームとする．E を X 上の階数 d のベクトル束，L を直線束とし，$l\colon L\to E$ を線形射とする．A を E 上の余次元 d の錐的なサイクルで，S 上平坦なものとする．X 上局所的に L の基底の l による像が定める E の切断による A のひきもどし l^*A の台を Z とする．Z が S 上準有限であるとし，Z 上定義された関数 φ_{l^*A} を

$$\varphi_{l^*A}(x)=\deg_s l^*A|_{Z_s,x} \tag{7.2}$$

$s=f(x)$ で定める．

補題 7.2. 1. l^*A が S 上平坦ならば，Z 上の関数 φ_{l^*A} は構成可能であり S 上平坦である．

2. X が S 上平坦で相対次元 d とする．Z が S 上準有限ならば，l^*A は S 上平坦である．

ペンシルが定める射に対する Milnor 公式 (0.2) は，命題7.1と補題4.3，補題7.2から次のようにして導かれる．消失輪体の全次元が定める関数 φ と $A=\mathrm{Char}^E j_!\mathcal{F}$ とおいて得られる関数 φ_{l^*A} を比較する．2つの関数が等しいことを示すには，差が定数でありその定数が0であることを1つの点で確かめればよい．

命題2.1.1より，射影 $X\times B\to B$ は X 上の層のひきもどしに関して局所非輪状である．よって W の定義より Z は B 上準有限だから，命題7.1の仮定がみたされ φ は構成可能かつ平坦である．l^*A も補題7.2より構成可能かつ平坦である．$\mathbf{D}$ は接束にともなう射影空間束 $\mathbf{P}(T\mathbf{P})$ であることを考えにいれれば、分岐理論より Z° の密開集合上で (0.2) がなりたつように特性サイクルを定義したことになるので，補題4.3より Z° 上いたるところ (0.2) がなりたつ．

8　Milnor 公式の一般の場合の証明

Milnor 公式 (0.2) の一般の場合の証明の鍵となるのは，次の消失輪体の導手の安定性である．

命題 8.1. $f\colon X \to C$ をスムーズな曲線へのスムーズな射とし，u は $j_!\mathcal{F}$ に関して f の孤立特性点であるとする．このとき自然数 $N \geqq 2$ で，u の任意のエタール近傍 V と任意の射 $g\colon V \to C$ で $g \equiv f \bmod \mathfrak{m}_u^N$ をみたすものに対し，u は $j_!\mathcal{F}$ に関して g の孤立特性点であり，

$$\dim \mathrm{tot}\phi_u(j_!\mathcal{F}, f) = \dim \mathrm{tot}\phi_u(j_!\mathcal{F}, g) \tag{8.1}$$

となるものが存在する．

証明. f と g をつなぐホモトピーを使って証明する．

$f(u)$ での C の一意化元をとって $C = \mathbf{A}^1 = \mathrm{Spec}\ k[t]$ に帰着する．X を V でおきかえて $X = V$ とする．T^*X の切断 $df(t)$ による $SS(j_!\mathcal{F})$ のひきもどしが $\mathfrak{m}_u^{N-2}$ に零化されるとすると，$g \equiv f \bmod \mathfrak{m}_u^N$ ならば $dg(t) \equiv df(t) \bmod \mathfrak{m}_u^{N-1}$ だから u は $j_!\mathcal{F}$ に関して g の孤立特性点である．

f と g をつなぐホモトピー $h\colon X \times \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1 = \mathrm{Spec}\ k[t, s]$ を $h = (1 - s)f + sg$ で定め，命題 7.1 を図式

$$\begin{tikzcd} X \times \mathbf{A}^1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"'] & & \mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1 \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \\ & \mathbf{A}^1 & \end{tikzcd} \tag{8.2}$$

に適用する．h の定義より h は $Z = \{u\} \times \mathbf{A}^1 \subset X \times \mathbf{A}^1$ の近傍で Z をのぞき $SS(j_!\mathcal{F})$ のひきもどしに関して非特性的だから，(SS1) より $j_!\mathcal{F}$ のひきもどしに関して局所非輪状である．よって命題 7.1 より，$\varphi(s) = \dim \mathrm{tot}_u\phi(j_!\mathcal{F}, h_s)$ は定数関数であり，$\varphi(0) = \varphi(1)$ である． ■

$E \subset \Gamma(X, \mathcal{L})$ を有限次元部分空間とする．自然数 $n \geqq 1$ に対し，$E^{(n)} \subset \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ を対称巾からの射 $S^nE \to \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ の像とする．

補題 8.2. $f\colon V \to \mathbf{A}^1$ を閉点 $u \in X$ のエタール近傍で定義された平坦射とし，$N \geqq 1$ を自然数とする．$n \geqq N$ ならば，切断 $l_0, l_\infty \in E^{(n)}$ で，$l_\infty(u) \neq 0$ かつ

$$\frac{l_0}{l_\infty} \equiv f \bmod \mathfrak{m}_u^N$$

をみたすものが存在する．

補題 8.2 は $E \to \mathcal{L}/\mathfrak{m}_u^2\mathcal{L}$ が全射なら $S^nE \to \mathcal{L}^{\otimes n}/\mathfrak{m}_u^n\mathcal{L}^{\otimes n}$ が全射であることからしたがう．命題 8.1 と補題 8.2 から，特性サイクルが $E \subset \Gamma(X, \mathcal{L})$ によらないことと，定理 0.2 がしたがう．

9　消失トポスと消失輪体

命題 7.1 は，消失輪体の理論の一般化を使って証明する．

$f\colon X \to S$ をスキームの射とする．消失トポスとトポスの射の図式

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Psi_f"] & X \overleftarrow{\times}_S S \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & S \\
& X &
\end{tikzcd} \tag{9.1}$$

は [4] で定義されている．

$\mathcal{K}$ を X 上の層の複体とすると，隣接輪体関手 $R\Psi_{\overleftarrow{f}}$ と消失輪体関手 $R\Phi_f$ は完全三角 $\to \mathcal{K} \to R\Psi_f\mathcal{K} \to R\Phi_f\mathcal{K} \to$ をみたす．$p_1\colon X \overleftarrow{\times}_S S \to X$ の X の幾何的点 x でのファイバー $x \overleftarrow{\times}_S S$ は x の像 $s = f(x)$ での強局所化 $S_{(s)}$ であり，$X \overleftarrow{\times}_S S$ は x ごとのファイバー $S_{(f(x))}$ を束ねたものと考えられる．$R\Psi_f = \overleftarrow{f} \circ \Phi_{\mathrm{id}}$ と考えると，$R\Psi_f\mathcal{K}$ の $x \overleftarrow{\times}_S S = S_{(s)}$ への制限は f が強局所化にひきおこす射 $f_{(x)}\colon X_{(x)} \to S_{(s)}$ による順像 $Rf_{(x)*}(\mathcal{K}|_{X_{(x)}})$ である．射影と図式 (6.1) の右のたての射

$$X \xleftarrow{\ q\ } X \times_{\mathbf{P}} \mathbf{H} \xrightarrow{\ p\ } \mathbf{P}^\vee$$

を使って，局所ラドン変換を $\mathcal{R}^E j_!\mathcal{F} = R\Phi_p q^* j_!\mathcal{F}$ を定義する．第 7 章では，実はこれを扱っている．

トポス $X \overleftarrow{\times}_S S$ の点は X の点 x と S の点 t と一般化 $S_{(s)} \leftarrow t$ の 3 つ組 $x \leftarrow t$ であり，$R\Psi_f\mathcal{K}$ のストーク $R\Psi_f\mathcal{K}_{x\leftarrow t}$ は，ストーク $Rf_{(x)*}(\mathcal{K}|_{X_{(x)}})_t$ であり，Milnor チューブのコホモロジー $R\Gamma(X_{(x)} \times_{S_{(s)}} S_{(t)}, \mathcal{K}|_{X_{(x)}})$ である．$R\Psi_f\mathcal{K}$ の構成が有限底変換

$$\begin{tikzcd}
X_T = X \times_S T \arrow[r] \arrow[d] & X_T \overleftarrow{\times}_T T \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d] \\
X \arrow[r] & X \overleftarrow{\times}_S S \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

と可換ならば，Milnor ファイバーのコホモロジー $R\Gamma(X_{(x)} \times_{S_{(s)}} t, \mathcal{K}|_{X_{(x)} \times_{S_{(s)}} t})$ と一致する．

命題 9.1. $f\colon X \to S$ をスキームの有限型な射とし，$\mathcal{K}$ を $D_c^b(X, \Lambda)$ の対象とする．Z を X の閉部分スキームで S 上準有限なものとし，$f\colon X \to S$ は Z の外で $\mathcal{K}$ に関して普遍的に局所非輪状であるとする．

1. [8] $R\Psi_f\mathcal{K}$ も構成可能で、その構成は底変換と可換である．
2. x を X の幾何的点とし，$s = f(x) \leftarrow t \leftarrow u$ を一般化とすると，完全三角

$$\longrightarrow R\Psi_f\mathcal{K}_{x\leftarrow t} \longrightarrow R\Psi_f\mathcal{K}_{x\leftarrow u} \longrightarrow \bigoplus_{(Z\times_X X_{(x)})\times_{S_{(s)}} t} R\Phi_f\mathcal{K}_{z\leftarrow u} \longrightarrow . \tag{9.2}$$

がある．

命題 9.1.1 を使うと命題 4.4 の証明の非核心部分が大幅に簡易化できる．

命題 7.1 の証明. $R\Psi_f\mathcal{K}$ が命題7.1で扱う $Rf_{(x)*}\mathcal{K}$ を束ねたものであることと，命題9.1.2の完全三角(9.2)を使って示す.

1. 命題9.1.2を $Y_{(y)}$ の幾何的点 $w \leftarrow u$ が $T_{(x)}$ に含まれない場合に適用すれば，このとき(9.2)の第3項は0だから，$Rf_{(x)*}\mathcal{K}$ の $Y_{(y)} - T_{(x)}$ への制限は局所定数層である.

2. まず，関数 φ の差分

$$\delta(\varphi)(x \leftarrow t) = \varphi(x) - \sum_{z \in Z_{(x)} \times_{S_{(s)}} t} \varphi(z) \tag{9.3}$$

$(s = f(x))$ が，$R\Psi_f\mathcal{K}$ から定義される $Z \overleftarrow{\times}_Y Y$ 上の関数 ψ の差分

$$\delta(\psi)(x \leftarrow t) = \psi(x \leftarrow y) - \sum_{w \in Y_{(y)} \times_{S_{(s)}} t} \psi(x \leftarrow w) \tag{9.4}$$

$(y = f(x), s = p(x))$ と等しいことを命題9.1.2から導く．ファイバー $Y_{(w)} \times_{S_{(s)}} t$ の生成点の上にある幾何的点を u とし(9.2)を $y \leftarrow w \leftarrow u$ に適用すれば，$\psi(x \leftarrow w) = \sum_{Z_{(x)} \times_{Y_{(y)}} w} \varphi(z)$ が得られる．$Z_{(x)} \times_{S_{(s)}} t = \coprod_{w \in Y_{(y)} \times_{S_{(s)}} t} (Z_{(x)} \times_{Y_{(y)}} w)$ だから，(9.3)と(9.4)が等しいことがしたがう.

1. と $p\colon X \to S$ が $\mathcal{K}$ に関して局所非輪状という仮定より，$R\Psi_f\mathcal{K}$ に対して命題4.4(1)⇒(2)が適用できて，$\delta(\varphi) = \delta(\psi) = 0$ が導かれる．これは φ が平坦なことを表している. ■

参考文献

[1] P. Deligne, *Théorème de finitude en cohomologie ℓ-adique*, Cohomologie étale SGA $4\frac{1}{2}$, Springer Lecture Notes in Math. 569 (1977) 233–251.

[2] A. Grothendieck, rédigé par I. Bucur, *Formule d'Euler-Poincaré en cohomologie étale*, Cohomologie ℓ-adique et Fonction L, SGA 5, Springer Lecture Notes in Math. 589 (1977), 372-406.

[3] L. Illusie, *Appendice à Théorème de finitude en cohomologie ℓ-adique*, Cohomologie étale SGA $4\frac{1}{2}$, Springer Lecture Notes in Math. 569 (1977) 252–261.

[4] ——, *Produits orientés*, Travaux de Gabber, à paraitre dans Astérisque.

[5] N. Katz, *Pinceaux de Lefschetz: Théorème d'existence*, Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique, SGA 7II, Springer Lecture Notes in Math. 340 (1973) 212-253.

[6] G. Laumon, *Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après Deligne)*, Astérique 82-83 (1981), Séminaire ENS (1978-1979) Exp. n° 9, 173-219.

[7] ——, *Caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux constructibles sur une surface*, Astérisque 101-102 (1983), 193-207.

[8] F. Orgogozo, *Modifications et cycles évanescents sur une base de dimension supérieure à un*, Int. Math. Res. Notices, 2006, 1-38.

[9] J.-P. Serre, CORPS LOCAUX, Hermann, Paris.

[10] T. Saito, *Wild ramification and the cotangent bundle*, `arXiv:1301.4632`

[11] ——, *Characteristic cycle and the Euler number of a constructible sheaf on a surface*, `arXiv:1402.5720`