I. スキーム, ℓ進層の分岐理論の現状と展望.

II. ℓ進層のFourier変換の計算.

I. 1. Euler数, 導手の公式 8割.

2. 特性類 3

3. 分岐群. 7

I-1. k:体. $\mathrm{char}\, k = p > 0$. $\ell \neq p$ prime.

U: k上smoothなvariety.

$\mathcal{F}$: smooth ℓ-adic sheaf on U.

$X \supset U$ compact化.

$\mathcal{F}$の分岐 $X \setminus U$に沿ってある.

$$\chi_c(U_{\bar k}, \mathcal{F}) = \sum_{q=0}^{2\dim U} (-1)^q \dim H^q_c(U_{\bar k}, \mathcal{F})$$

← compact台.

$p=0$. $\chi_c(U_{\bar k}, \mathcal{F}) = \mathrm{rk}\, \mathcal{F} \cdot \chi_c(U_{\bar k}, \mathbb{Q}_\ell)$

おもしろくない.

Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式 (SGA5)

$\dim U = 1$. (k: 代数閉体)

$$\chi_c(U_{\bar k}, \mathcal{F}) = \mathrm{rk}\, \mathcal{F} \cdot \chi_c(U_{\bar k}, \mathbb{Q}_\ell) - \sum_{x \in X \setminus U} \mathrm{Sw}_x \mathcal{F}.$$

← Swan導手.

$X \supset U$: smooth cpt化.

K_x: xでの局所体. $\mathrm{Frac}\, \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$.

$G_x = \mathrm{Gal}(\bar K_x / K_x) \curvearrowright \mathcal{F}_{\bar\eta_x} = V$. $\eta_x = \mathrm{Spec}\, K_x$ ← c.d.v.f.

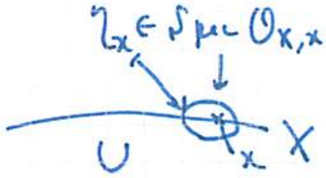
有限次元ℓ進表現.

$\cup$

$G^r_{x,\log}$: 分岐群のfiltration

$\cup$ $r > 0$. $r \in \mathbb{Q}$.

$$G^{r+}_{x,\log} = \overline{\bigcup_{s>r} G^s_{x,\log}} \quad (r \geq 0, \in \mathbb{Q})$$



$$V = \bigoplus_{r \in \mathbb{Q}} V^{(r)} \quad \text{s.t.} \quad V^{G^{r+}_{x,\log}} = \bigoplus_{r \in \mathbb{Q}} V^{(s)}.$$

slope decomp'n.

$$\mathrm{Sw}\, V = \sum_r r \dim V^{(r)}.$$

S. Bloch 0-cycle class. '80s.

G-O-S 公式の高次元化. (加藤-S)

K-S. 1. IHES ⋯ conductor formula

2. Ann. ⋯ G-O-S 公式の高次元化

3. 準備中 ⋯ 一般の導手公式.

G-O-S の高次元化. k: 完全体.

$$\chi_c(U_{\bar{k}}, \mathcal{F}) = \mathrm{rk}\,\mathcal{F}\cdot\chi_c(U_{\bar{k}}) - \deg \mathrm{Sw}\,\mathcal{F}.$$

$\mathrm{Sw}\,\mathcal{F} \in CH_0(X\setminus U)_{\mathbb{Q}}$ $X \supset U$ cpt化. ← 不要と考えられている. Hasse-Arf.

$$CH_0 = \bigoplus_{\substack{x\in X\setminus U\\ \text{closed}}} \mathbb{Z} \,/\, \text{有理同値}. \qquad)_{\mathbb{Q}} =)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$$

$\downarrow \deg$

$\mathbb{Z}$.

dim = 1. $CH_0(X\setminus U) = \bigoplus_{x\in X\setminus U}\mathbb{Z}$

$\mathrm{Sw}\,\mathcal{F} = (\mathrm{Sw}_x\mathcal{F})$.

※ ほんとうは $\mathrm{Sw}\,\mathcal{F}$
$\cap$ ← ここに定義される
$\varprojlim_X CH_0(X\setminus U)_{\mathbb{Q}}$ $\downarrow \deg$. $\to \mathbb{Q}$

res. + X: sm → $\cong$ $CH_0(X\setminus U)_{\mathbb{Q}}$

Sw $\mathcal{F}$ の定義, 公式の証明.

<u>定義</u> $\mathcal{F}$ 有限次étale被覆で trivialize される場合.

$V \xrightarrow{f} U$ (finite étale Galois) $f^*\mathcal{F}$ const.

$G = \mathrm{Gal}(V/U)$.

$\mathcal{F} \leftrightarrow G$ の ℓ進表現 M.

$$\mathrm{Sw}\,\mathcal{F} = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} f_* s_{V/U}(\sigma)\,\mathrm{Tr}(\sigma, M)$$

($f_* s_{V/U}(\sigma)$: dim 1 Swan 指標.)

dim 1 Swan 導手 (← Sw $\mathcal{F}$)

($\frac{1}{|G|}$, $f_* s_{V/U}(\sigma)$ ← 分母が出てくる.)

$\sigma \neq 1$. $\Gamma_\sigma \subset V \times V$.

$S_{V/U}$ "=" $(\Gamma_\sigma, \Delta_V)$

$V \times V$.

$V \to U$ étale.

$\Gamma_\sigma \cap \Delta = \emptyset$.

$\sigma \circlearrowright$ $V \subset Y$, $U \subset X$ ($V \to U$, $Y \to X$)

Zariski localに étale → $A^n \supset \bigcup_{i=1}^{m} (x_i = 0)$

(Y: proper smooth. $\supset D$ divisor s.n.c. $V = Y \setminus D$.
(σ: Y の Aut.

とすると $(\Gamma_\sigma, \Delta_Y)_{Y \times Y}$ は定義される。

⇝ Artin 導手になってしまう。Y に依存。

くっつけた boundary をきりおとす

log structure をつける。

⇝ $(\Gamma_\sigma, \Delta_Y)_{(Y\times Y)^\sim}$.

"

$(\Gamma_\sigma, \Delta_Y)_{(Y\times Y)'}$

$Y \supset D = \bigcup_i D_i$. D_i : D の irr comp.

$Y \times Y \supset D \times D \supset D_i \times D_i$

ideal sheaf $I_{D_i \times D_i}$ ↗ ↰ これを全て blow-up.

"

$\prod_i I_{D_i \times D_i} \subset \mathcal{O}_{Y \times Y}$ での b.u.

↑

$(Y \times Y)' \supset (Y \times Y)^\sim$.

log. diag. δ' ↗ $(Y\times Y)'$

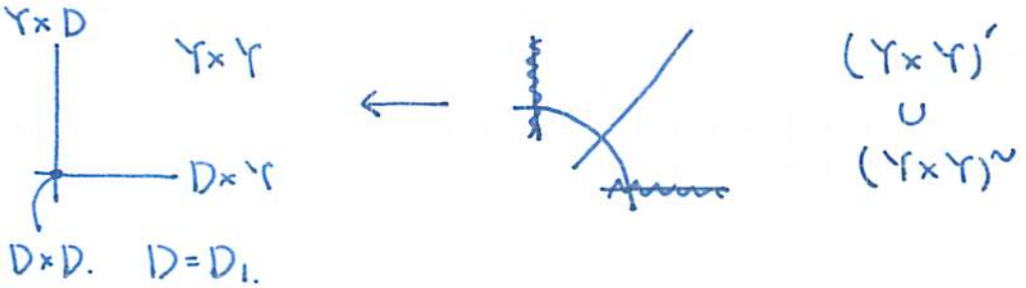
$Y \xrightarrow{\delta} Y \times Y$

$\cup$ D_i , $\cup$ $D_i \times D_i$.

$(\Gamma_\sigma, \Delta_Y^{\log})_{(Y\times Y)'}$.

でうまくいく。

つごうのよい Y がなかったとしても、かわりに alteration を使えば $\otimes \mathbb{Q}$ が必要だが $S_{V/U}(\sigma)$ が定義できる



$\chi_c(U, \mathcal{F})$ のもとめ方.

$\mathrm{Tr}(\sigma; H_c^*(V, \mathbb{Q}_\ell)) = \deg(\Gamma_\sigma, \Delta_V)^{\log}$ ← $(Y\times Y)'$

↑ (開多様体 / log) Lefschetz 跡公式.

k：閉体.

K：局所体. 完備離散付値体. 剰余体 F. char $F = p > 0$ 完全体

U/K smooth. $\mathcal{F}$：U 上の smooth ℓ進層.

$H^q_c(U_{\bar K}, \mathcal{F})$ G_Kの有限次ℓ進表現

↑ $\mathrm{Gal}(\bar K/K)$

$$Sw\, H^*_c(U_{\bar K}, \mathcal{F}) = \sum_{q=0}^{2\dim U} (-1)^q Sw\, H^q_c(U_{\bar K}, \mathcal{F}).$$

$\mathcal{F} = \mathbb{Q}_\ell$, U = X proper.

$$Sw\, H^*(X_{\bar K}, \mathbb{Q}_\ell) = \deg ((\Delta_X, \Delta_X))^{\log}.$$

$\mathcal{X}$：X の O_K 上の proper flat model. ← compact化.

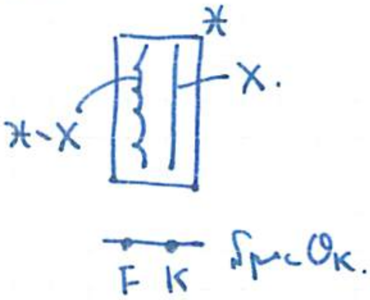
$((\Delta_X, \Delta_X))^{\log} \in CH_0(\mathcal{X} \setminus X)_{\mathbb{Q}}$

deg ↓

$CH_0(\mathrm{Spec}\, F)_{\mathbb{Q}}$

‖

$\mathbb{Q}$.



$\mathcal{X}$：正則かつ

($\mathcal{X}$の closed fiber) の被約化が S.N.C.D. のとき,

$$((\Delta_X, \Delta_X))^{\log} = (-1)^{n+1} c_{n+1}{}^{\mathcal{X}}_{\mathcal{X}_F}(\Omega^1_{\mathcal{X}/O_K}(\log/\log)).$$

一般の定義は alteration を使う.

k：閉体. $X \supset U = X \setminus D$. $D \subset X$ S.N.C.D. $\dim X = n$.

(X ↑ smooth)

$$\chi_c(U) = \chi_c(U, \mathbb{Q}_\ell) = \deg (\Delta_X, \Delta_X)_{(X \times X)'} = \deg (-1)^n c_n(\Omega^1_{X/k}(\log D))$$

一般化

$((\Delta_X, \Gamma))^{\log} \in F_0G(\mathcal{X}_F)_{\mathbb{Q}}$

G(−)：連接層の Grothendieck群.

↑ ネータースキーム.

$F_\bullet G(-)$：台の次元による fil.

‖

$\langle [\mathcal{F}_\bullet] \mid \dim \mathrm{supp}\, \mathcal{F} \le \bullet \rangle$.

$CH_0(-) \longrightarrow F_0G(-)$.

KS 3. $\mathcal{F}$ 一般, U open.

$\mathrm{Sw}\, H_c^*(U_{\bar K}, \mathcal{F}) - \mathrm{rk}\,\mathcal{F} \cdot \mathrm{Sw}\, H_c^*(U_{\bar K}, \mathbb{Q}_\ell)$
$= \deg \mathrm{Sw}\, \mathcal{F}$.
$\in F_0 G(\mathcal{X}_F)_{\mathbb{Q}}$.

char K = 0.

char K = p > 0 なる fun. field での分岐は tame.

U, V / K. char K = 0.
char F = p > 0.

$f: U \to V/K$ 上の hom

$$K_0(U, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \xrightarrow{\mathrm{Sw}} (U \text{の boundary の } 0\text{-cycle の群})$$
$$\downarrow f_! \quad \circlearrowleft \quad \downarrow f_*$$
$$K_0(V, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \xrightarrow{\mathrm{Sw}} (V \text{の 〃})$$

V = Spec K. Sw + dim Q

I-2. Sw : $\mathbb{Z}$-valued.
= $CH_0(\mathrm{Spec}\, k)$.

	係	数
1. 下	有限	K 局所体.
2. 上	○	X.

X/k. $\mathcal{F}$: X 上の ℓ進層. (← constructible)

$c(\mathcal{F}) \in H^0(X, K_X)$. $a: X \to \mathrm{Spec}\, k$. $K_X = Ra^! \bar{\mathbb{Q}}_\ell$.
$\mathcal{F}$の特性類. 例 X: smooth. dim = d ⇒ $K_X = \bar{\mathbb{Q}}_\ell(d)[2d]$.
↑SGA 5

Lefschetz trace formula (SGA 5 III)

X: proper. $\mathrm{Tr}: H^0(X, K_X) \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell$
$c(\mathcal{F}) \longmapsto \chi(X, \mathcal{F})$

Abbes-Saito. 3. Inv. Math.

GOS を上でやる.

U: smooth ⊂ X: cpt 化. $j: U \to X$.
$\mathcal{F}$: U 上の smooth ℓ進層.

$c(j_!\mathcal{F}) = \mathrm{rk}\,\mathcal{F} \cdot c(j_!\mathbb{Q}_\ell) - \mathrm{Sw}\,\mathcal{F}$.

GOS を上で.
($\mathcal{F}$: pot. Kummer type)
↑ res. を仮定すれば不要.

$CH_0(X \setminus U)_{\mathbb{Q}}$
↓ ← cycle map.
$H^0(X, K_X)$

での Sw $\mathcal{F}$ の像.

$$\mathrm{Sw}\,\mathcal{F} \in X \setminus U \hookrightarrow X \leftarrow c(j_!\mathcal{F})$$

津島 ↗ (Sw), $U \searrow \mathrm{Spec}\,k \swarrow X$

Spec k: Euler数. $\chi_c(U,\mathcal{F})$

$c(j_!\mathcal{F})$: 特性類.

k: 有限体

$CH_0(X)$
$\downarrow$
$\pi_1^{ab}(X)$

特性多様体.

特性類 : X の coh. class.

— 多様体 : $T^*X_{(\log)}$ の cycle.

p進　阿部

$$Ch(\mathcal{F}) \in Z_d(T^*X(\log)). \quad d = \dim X.$$

$Z_d(T^*X(\log)) = \bigoplus_{C \subset T^*X(\log)} \mathbb{Z}$; C subvar. $\dim C = d$.

(?) ↗ $Ch(\mathcal{F})$

contravariant vect. bdl. ↙

$$T^*X = \mathbb{V}(\Omega^{1*}_X) \qquad X/k \text{ smooth dim } d.$$
$$= \mathrm{Spec}(S^\bullet \Omega^{1*}_X)$$
$$T^*X(\log) = \mathbb{V}(\Omega^1_X(\log D)^*)$$
$D \subset X$ S.N.C.D.

$$\begin{array}{ccc} Ch(\mathcal{F}) \in Z^d(T^*X(\log)) & & \\ & \downarrow \text{cycle map} & \\ & H^{2d}(T^*X(\log), \mathbb{Q}_\ell(d)) & \\ & \uparrow \wr & \\ c(\mathcal{F}) \in H^{2d}(X, \mathbb{Q}_\ell(d)) & & \end{array}$$

($Ch(\mathcal{F}) \longmapsto c(\mathcal{F})$)

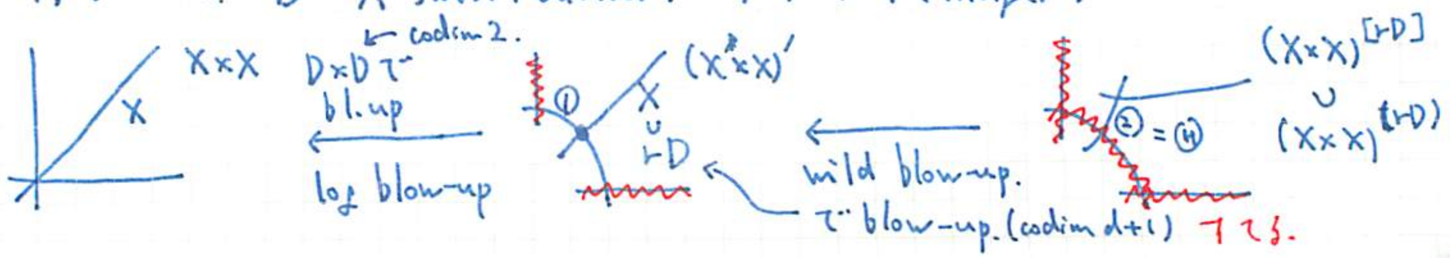
rk 1. Kato　Class field theory, D-modules, ...　AJM.

rk > 1 (仮定つき) T.S.　JIMJ. to appear.

分岐の調べ方.

1. $V \to U$ Galois 被覆 s.t. $\mathcal{F}$ を trivialize.
2. 積をとって diagonal で blow-up. → diff. form が自然に出てくる

X: smooth. $D \subset X$ smooth divisor. $r > 0$. r: integer.



①：D×D 上 1次元 $\mathbb{G}_m$-torsor.

②：D 上 d次元. $\mathbb{V}(\Omega^1_X(\log D)(rD)|_D)$

$U = X \setminus D$. $\mathcal{F}$：U上の smooth ℓ進層.
rk 1.

$$\Theta \subset (X\times X)^{(rD)} \overset{j^{(r)}}{\supset} U\times U \xrightarrow{\mathrm{pr}_1,\ \mathrm{pr}_2} U \quad \mathcal{F}.$$

$\mathcal{H} = \mathcal{H}om(\mathrm{pr}_2^*\mathcal{F}, \mathrm{pr}_1^*\mathcal{F})$
U×U上の smooth ℓ進層, rk 1.

$j^{(r)}_*\mathcal{H}|_\Theta$.

r：$\mathcal{F}$ の D での Swan導手.
↑ Kato.

$\mathcal{F}$ は D で wild に分岐するとすると $\exists\, r>0$ s.t. $j^{(r)}_*\mathcal{H}|_\Theta$ は Θ 上の smooth rk 1 の ℓ進層で Artin-Schreier方程式 $T^p - T = f$ で定義され, f は Θ 上の zeroでない 1次形式.

f：Θ 上の関数.

$$\begin{array}{c} (\text{////}) \\ \downarrow\ T^p - T = f \\ \Theta \end{array} \qquad \mathbb{F}_p\text{-torsor}.$$

$\mathbb{F}_p \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$: Θ 上の rk 1 の $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$層.

$$f \in \Gamma(D, \Omega^1_X(\log D)(rD)|_D), \quad f \neq 0.$$

この r より小さい r' ⇝ $\mathcal{H}$ は $(X\times X)^{(r'D)}$ に smooth にのびない.

大きい r' ⇝ $j^{(r')}_*\mathcal{H}|_\Theta$ は $j^{(r)}_*\mathcal{H}|_\Theta$ のひきもどしなので, constant部分が出てくる.

rk 1 の層. Witt vector, Artin-Schreier-Witt theory.

$$0 \to \mathbb{Z}/p^{m+1} \to W_{m+1} \xrightarrow{F-1} W_{m+1} \to 0. \quad \text{exact}$$

U：affine. $H^1(U, \mathbb{Z}/p^{m+1}) \xleftarrow{\sim} W_{m+1}(U)/F-1$.

$$\chi_a \longleftarrow\!\!\shortmid\ a$$

$K = \mathrm{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_{X,\xi})$. $a \in W_{m+1}(K)$ $= (a_0, \dots, a_m)$

$\xi \in D$: gen. pt.

$$G_K \overset{\text{dual.}}{\longleftrightarrow} H^1(K, \mathbb{Z}/p^{m+1})$$

$G^r_{K,\log}$. (ﾌｨﾙ)   (ﾌｨﾙ)

$$\Omega^1_K \overset{F^m d.}{\longleftarrow} W_{m+1}(K) \;(\text{ﾌｨﾙ})$$

(ﾌｨﾙ)

$a_0^{p^m-1} da_0 + \dots + a_{m-1}^{p-1} da_{m-1} + da_m \longleftarrow (a_0, \dots, a_m)$

$m_K^{-\cdot}\Omega^1_{\mathcal{O}_K}(\log)$.

$\Omega^1_{\mathcal{O}_K}(\log) = \Omega^1_{\mathcal{O}_K} + \mathcal{O}_K\, d\log t \subset \Omega^1_K$

t: Kの素元.

refined swan

$$\mathrm{Gr}^F_r \Omega^1_K \overset{\mathrm{rsw}}{\longleftrightarrow} \mathrm{Gr}^F_r H^1(K)$$

$= m_K^{-r}/m_K^{-r+1} \otimes_{\mathcal{O}_K} \Omega^1_{\mathcal{O}_K}(\log) \ni \mathrm{rsw}\,\chi_a \longleftarrow \chi_a$

$\Omega^1_{\mathcal{O}_K}(\log) = \Omega^1_X(\log D)_\xi \otimes_{\mathcal{O}_{X,\xi}} \mathcal{O}_K$. (完備化)

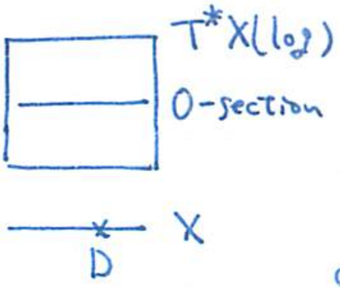
$\cup$

$\Gamma(D, \Omega^1_X(\log D)(rD)|_D)$ ← loc. free $\mathcal{O}_D$-mod

$\ni f$ (=)

$(-1)^n c_n(\Omega^1_X(\log D))$

$c(j_!\mathcal{F}) = c(j_!\mathbb{Q}_\ell) - \mathrm{Sw}\,\mathcal{F}$.



$\mathrm{Ch}(j_!\mathcal{F})$ の定義.

$\mathrm{Ch}(j_!\mathcal{F}) = [\text{0-section}] - [f\text{の像}]$.

claim f: non-vanishing

$[f\text{の像}] \longmapsto \mathrm{Sw}\,\mathcal{F}$ ‖ A-S. Kato の定義 $C_\mathcal{F}$

$0 \neq f \in \Gamma(D, \Omega^1_X(\log D)(rD)|_D)$

$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathcal{O}_X(-rD)|_D, \Omega^1_X(\log D)|_D)$

$\rightsquigarrow \mathbb{V}(\mathcal{O}_X(-rD)|_D^*) \xrightarrow{f} \mathbb{V}(\Omega^1_X(\log D)|_D^*)$ (injection.)

$= T^*X(\log)|_D$.

D上のline bdl.

$\subset d{-}1$

I-3. 分岐群.

K：完備離散付値体. $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$
$(= \mathrm{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_{X,\xi}))$ $\cup$
$G^r_{K,\log}$ $(r>0, \in \mathbb{Q})$

A-S. 1. AJM 定義. rigid geom., log geom.
2. DM Kato volume ; ← blow-up.

S. JIMJ. to appear. どっちもいらない.

$G^r_{K,\log} \supset G^{r+}_{K,\log}$

$Gr^r_{\log} G_K = G^r_{K,\log} / G^{r+}_{K,\log}$.

- abel. $\cap$ central.

$\underbrace{G^{0+}_{K,\log}} / G^{r+}_{K,\log}$
$\quad \| $
wild inertia $\to P$

$(I = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K^{ur})$ の p-Sylow群.)

- p倍で消える.
- dualが書ける.

) eq. char : JIMJ.
mixed : 準備中.

$\mathrm{Sw}\, V \in \mathbb{Q}_{>0}$. 同様に定義できる. $\to \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$.

$\in \mathbb{Z}$: Xiao Liang. p進的.

有限次元 $\overline{F}$-v.sp.

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(Gr^r, \mathbb{F}_p) \underset{単射}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}_{\overline{F}}(m_{\overline{K}}^{-r}/m_{\overline{K}}^{-r+}, \Omega^1_K(\log) \otimes_F \overline{F})$$

(F：剰余体 $\supset k$：完全体. F は k 上有限生成)

$\Omega^1_F(\log) = \hat{\Omega}^1_{\mathcal{O}_K}(\log) \otimes_{\mathcal{O}_K} F$ ← 有限次元 F-v.sp.

$0 \to \Omega^1_F \to \Omega^1_F(\log) \xrightarrow{\mathrm{res}} F \to 0$. exact.

$m_{\overline{K}}^{-r} = \{x \in \overline{K} \mid v(x) \geq -r\}$
$m_{\overline{K}}^{-r+} = \{ \quad " \quad \mid \quad " \quad > -r\}$.

K: eq. char

$$\begin{array}{ccc} G_K & \longrightarrow & G_K^{ab} \\ \cup & & \cup \\ G^r_{K,\log} & \twoheadrightarrow & G_K^{ab,r} \\ r>0, \in \mathbb{Q} & & r>0, \in \mathbb{N}. \end{array}$$

$r \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(Gr^r G_K, \mathbb{F}_p) & \xrightarrow{\mathrm{rsw}} & \mathrm{Hom}(\quad \overline{F}\text{-v.sp.} \quad) \\ \cup & \cup & \cup \\ \mathrm{Hom}(Gr^r G_K^{ab}, \mathbb{F}_p) & \xrightarrow[\mathrm{rsw}]{} & \mathrm{Hom}(m_K^{-r}/m_K^{-r+1}, \Omega^1_F(\log)) \end{array}$$

像 Kato.

証明：積 diag. で bl. up.

eq. char.

mixed：積がうまくとれない。 $\mathbb{Q}_p \otimes \mathbb{Q}_p$. truncated を使う。

※ rD. $r \in \mathbb{Q}$ での blow-up.

・そのまま blow-up. → singularity が出てくる。たいしたことはないのでそのままやる

・$K - K'$ $r = \frac{n}{m}$ 分岐指数 m.

$(m, p) = 1 \Rightarrow$ tame.

$(m, p) \neq 1 \Rightarrow$ 有限でない拡大をすると、log smooth.

$rD \subset X$. $(\mathcal{I}_X^m, \mathcal{I}_D^n)$ で blow-up.

II. ε-factor と Fourier 変換.

K：局所体. 剰余体 有限. $p = \operatorname{char} F$. V：$G_K = \operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ の有限次元 ℓ 進表現 $\ell \neq p$.

$\varepsilon(V, \psi, dx) \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$. $\psi : K \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ non-trivial add. char.

↑ Weil number

dx：K の $\mathbb{Q}_\ell$ 値 Haar meas. $\int_{O_K} dx = 1$ とする。

$\operatorname{ord}\psi = -n$. $\psi(m_K^n) = 1$ となる最小の n.

$$\left.\begin{array}{l} V：不分岐 \\ n = 0 \end{array}\right) \Rightarrow \varepsilon(V, \psi, dx) = 1.$$

$\operatorname{rk} V = 1$. ⟷ χ. tame $\quad \psi_0 : F \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$. $\quad \varepsilon = -\tau(\chi_0, \psi_0) = \sum_{a \in F^\times} \chi_0^{-1}(a)\psi_0(a)$.

$\operatorname{ord}\psi = -1$. $\quad \chi_0 : F^\times \nearrow$

ε-factor：… をみたすただ1つ。

↳ (今の式, twist, Induction $\operatorname{Ind}_{G_L}^{G_K} V_L$.
  wild な character. ↳ ψ をかえる。

χ：wild char. $\quad x = c(1+y)$, $y \in m_K$.

$$\varepsilon(\chi, \psi, dx) = \int_{K^\times} \chi^{-1}(x)\psi(x)\,dx = \int \chi^{-1}(c(1+y))\,\psi(c(1+y))\,d(c(1+y))$$

© ・ ~~も重く[illegible]~~

$$= \chi^{-1}(c)\psi(c)\|c\| \int \chi^{-1}(1+y)\psi(cy)\,dy$$

$p \neq 2$

χ：conductor. $n = \begin{cases} 2m \\ 2m+1 \end{cases}$

$\chi(1+\mathfrak{m}^n)=1$ となる最小の n.

$y \in \mathfrak{m}^m$. $\quad \mathfrak{m}_K^m/\mathfrak{m}_K^n \longrightarrow 1+\mathfrak{m}_K^m/1+\mathfrak{m}_K^n \qquad \chi(1+y+\frac{y^2}{2}) = \psi(\underline{\underline{c}}y)$

$\qquad y \longmapsto 1+y+\frac{1}{2}y^2. \qquad\qquad y \in \mathfrak{m}_K^m$

$$\psi(cy)\cdot\chi^{-1}(1+y) = \chi(1+y+\tfrac{1}{2}y^2)\chi^{-1}(1+y) = \chi(1+\tfrac{y^2}{2}) = \psi(c\tfrac{y^2}{2}).$$

$$\int \psi(c\tfrac{y^2}{2})\,dy = \underbrace{\sum_{\bar{y} \in \mathfrak{m}_K^m/\mathfrak{m}_K^{m+1}} \psi(c\tfrac{\bar{y}^2}{2})}_{\text{quad. Gauss sum.}} \cdot \mathrm{vol}(\mathfrak{m}_K^{m+1}).$$

$\varepsilon(\chi,\psi,dx) = \chi^{-1}(c)\,\psi(c)\cdot\|c\|\cdot$ 2次の Gauss 和 $\times$ vol.

K：eq.char

$\uparrow \mathcal{F}_\chi$. ← もとの $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ の char.

$\uparrow \mathcal{L}_\psi$

$\uparrow$ Tate twist.

Gauss 和 ← $H^1_c(\mathbb{A}^1, \mathcal{L}_\psi(c.x^2))$ 1次元. $\quad \mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\, F[x]$. $\quad T^p - T = c \cdot x^2$.

右辺：1次元 G_{F_K} の表現への Frob 作用の固有値.

$K = k((t))$. k：有限体.

Laumon ε-factor の cohomological な表示.

$\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\, k[t]$. $\qquad K = \mathrm{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}^1,0})$

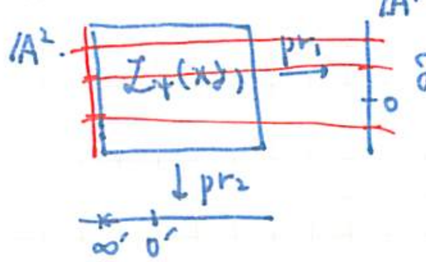
V：G_K の ℓ 進表現. $\mathcal{F}$：$\mathbb{P}^1$ 上の constructible sheaf. $V = \mathcal{F}_{\bar{\eta}_0}$.

$F_{\psi_0}(\mathcal{F})$ $\qquad \psi_0 : \mathbb{F}_p \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ nontrivial char. fix.

$\mathcal{L}_{\psi_0}(xy)$. $\quad \mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}\, k[x,y]$

↑ $\mathbb{A}^2$ 上の rk 1 sheaf $\qquad T^p - T = xy$.

$\hat{f}(y) = \int f(x)\exp(2\pi i xy)\,dx$.



$F_{\psi_0}(\mathcal{F}) = Rpr_{2!}(pr_1^* \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_{\psi_0}(xy))$

cohomology の deformation.

$F_{\psi_0}(\mathcal{F})_{\bar{0}'} = H_c^*(\mathbb{A}^1_{\bar{k}}, \mathcal{F}|_{\mathbb{A}^1})$.

$F_{\psi_0}(\mathcal{F})_{\bar{\eta}_{\infty'}} \overset{\text{Laumon}}{=} \bigoplus_{x \in \mathbb{A}^1} \Psi_x^1$ ← nearby cycle.

$x \in \mathbb{A}^1$: $\mathcal{F}$ が smooth でないところ.

deg 1. 1 かない. $\eta_{\infty'} = \mathrm{Spec}\, k((\frac{1}{y}))$.

$\dim F_{\psi_0}(\mathcal{F})_{\bar{\eta}_{\infty'}} = \sum a_x(\mathcal{F})$.

$\dim \Psi_x^1 = a_x(\mathcal{F})$.

$\varepsilon(V, \psi, dx) = \det(-Fr_\infty; \Psi_0^1)$

Laumon の公式.

Ψ_0^1: $\dim : a_0(\mathcal{F})$. Artin conductor.

$G_{K'_\infty}$ の ℓ 進表現.

<u>証明</u> global.

$\det(Fr, H_c^*) = \prod_x \varepsilon_x$.

$\uparrow y$

<u>積公式と</u> 同時に証明. global recip.

$K'^{\times}_\infty \longrightarrow G_{K'_\infty}^{ab}$ の char.

$\cup$

$1/y$.

det をとる前の Ψ_0 はよく分からない Galois 表現.

<u>新証明</u> (仮定が必要)

Ψ_0 を G_K の表現として explicit に書く. local に証明.

$K = K_0 = k((x))$. $\chi: K_0^\times \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ char., order p 巾. wild に分岐.

$\Rightarrow \chi = \chi_a$. $a \in W_{m+1}(K)$.

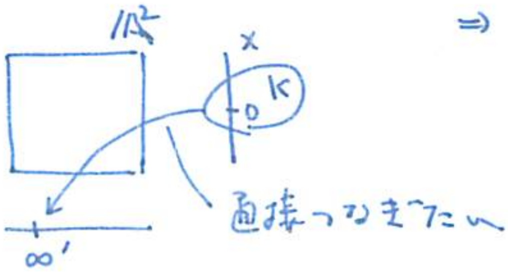
$F^m da \in \Omega^1_K$.

$\quad \| $

$K \cdot d\log x$

$\quad \|$

$\frac{dx}{x}$.



$F^m da = \exists ! c \cdot \frac{dx}{x}$.

仮定(i). <u>$c \neq 0$</u>. $\Rightarrow \mathrm{ord}\, c < 0$.

$K_{\infty'} \longrightarrow K$

$\cup \qquad \cup$

$y \longmapsto c$..

(ii) $\mathrm{ord}\left(\frac{d\log c}{d\log x}\right) \times p \leq (p-2)n$

$\uparrow$ χ_a の conductor.

$p \neq 2$.

$\frac{dc}{c} \neq 0$ $c \in K$. $d\log c \in \Omega^1_K$.

このとき $\psi_0' = \mathrm{Ind}_{G_K}^{G_{K_\infty'}}\left(\chi \otimes \mathcal{L}_\psi(cx) \otimes \kappa\left(\frac{1}{2}\frac{dc}{dx}\right) \otimes \mathbb{Q}\right)$

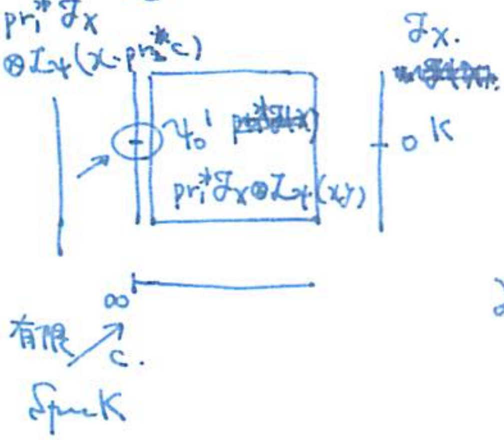
- ψ_0' ← $G_{K_\infty'}$ の表現.
- $\mathcal{L}_\psi(cx)$ ← $T^p - T = cx$.
- $\kappa\left(\frac{1}{2}\frac{dc}{dx}\right)$ ← Kummer. $T^2 = \frac{1}{2}\frac{dc}{dx}$
- $\mathbb{Q}$ ← Fr の固有値が $-\sum_{x} \psi_0(x^2)$.

$= \Leftarrow\!\!\!\!\Rightarrow$ $\varepsilon = \det$.

$\Uparrow$

○.

(⇒) それなりにおもしろい. explicit reciprocity law, Stiefel–Whitney class.



$\boxed{\mathrm{Res}_{G_K}^{G_{K_\infty'}} \psi_0' \supset (\quad) \text{のなかみ}}$ をきめる.

$\mathcal{H} = \mathcal{H}om\left(pr_2^* \mathcal{F}_X \otimes \mathcal{L}_\psi(pr_2^*(cx)), pr_1^* \mathcal{F}_X \otimes \mathcal{L}_\psi(x \cdot pr_2^* c)\right)$

where $\mathcal{L}_\psi(pr_2^*(cx)) = pr_2^* \mathcal{L}_\psi(cx)$.

$\psi' \mathcal{H} = \mathcal{H}om(\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{L}_\psi(cx), \psi_0'(\mathcal{F}))$.

$\mathcal{H} = \mathcal{H}om(pr_2^* \mathcal{F}_X, pr_1^* \mathcal{F}_X) \otimes \mathcal{L}_\psi((pr_1^* x - pr_2^* x) \cdot pr_2^* c)$

- $\mathcal{H}om(pr_2^* \mathcal{F}_X, pr_1^* \mathcal{F}_X)$: $X = \chi_a$. Witt vector を使って計算.
- Taylor 展開の 1 次が キャンセルするようにする

$n = \mathrm{cond}\, \chi_a$. $n = \begin{cases} 2m+1 \\ 2m \end{cases}$ ← こっちに帰着.

$j_* \mathcal{H}|_{\Theta} = \mathcal{L}_\psi(\cdot\, x^2)$