数学原論

現代数学全体に確固たる基礎を与えよう　Ｎ.ブルバキ

東京大学出版会で本を１冊書くたびに『ＵＰ』にも同じ題で書くことになっている（？）ので、これで６年ぶり４回目になる。こんなに分厚いものを書くつもりではなかった。題も大それたものをつけてしまった。

はじめの２冊『線形代数の世界』と『集合と位相』は、数学科の２年生むけの抽象的な現代数学の教科書だった。それを読むとどんな景色が見えてくるのかを紹介する、軽く読めるような本を書こうと思っていた。はじめに考えていた題も全然違うものだった。それがどうしてこうなったのか思いだしてみよう。

フェルマーとガロワ

素数というものがむかしから数学者の興味をひいてきたことをご存知でしょうか？　本の原稿がほとんどできあがってから、整数を２乗した数２つの和になる素数にピタゴラス素数という名前がついていることを、『ＵＰ』に連載を書かれている川添愛先生の『数の女王』を読んで初めて知った。２や５はピタゴラス素数だが、３や７のようにそうでないものもある。

フェルマーの最終定理で有名なフェルマーは、２より大きい素数がピタゴラス素数になるための条件は、４でわった余りが１になることだということを証明した。フェルマーの最終定理をフェルマーが証明していたとは思えないが、ピタゴラス素数の方は証明が書き残されている。

『集合と位相』で学ぶ抽象数学のことばを使うと、数の世界と式の世界を直接結びつけてフェルマーの証明を鮮やかに理解できる。この証明をはじめて理解したときの抽象数学の切れ味の印象が、今も記憶に残っている。このあたりをネタにして、現代の数学を特徴づける抽象的な方法に焦点をあてた軽い本を書いてみようと思ったのがはじまりだった。題ももっと軽いものを考えていた。

そのうちにガロワ理論の講義を担当した。ガロワ理論といえば、若くして決闘で亡くなったというガロワの人気か、群を導入して方程式の可解性の問題を解決した理論の魅力か、数学の入門書の鉄板ネタである。

ところが書き始めてみると、フェルマーとガロワだけではネタが足りない。『数の女王』にも登場するフェルマーの小定理のような小ネタをいれても一〇〇ページにさえ届かない。ほかの話題を探さないと。

直線と平面

十九世紀の数学者は、代数学でも幾何学でも数学固有の新

しい研究対象を発見した。二十世紀はじめにアインシュタインが一般相対性理論を創るときに必要とした曲がった空間の理論も、十九世紀にリーマンが発見していた。『集合と位相』で解説した抽象数学のことばは、このような対象を正確に記述するために生みだされた。

　集合のことばを使えば、数学の対象はすべて集合としてとらえられる。直線とは直線上の点全体の集合のことだし、同じように平面も平面上の点全体の集合のことだ。このように集合として考えれば、どんな数学的対象も点の集まりに解体できる。

　ところが十九世紀後半に集合論を創始したカントルは、点の集まりに解体してしまうと直線と平面が区別できなくなることに気がついた。自分の発見に驚かされた彼は、友人のデデキントに「目には見えるが信じられない」とドイツ語の手紙のなかにそこだけフランス語で書き送った。デデキントは友の驚きに対して冷静に、それは位相を考えていないからじゃないか、と答えた。

　直線から1点をとりのぞくと右と左の2つの部分に分かれるが、平面から1点をとりのぞいてもそうはならない。これで直線と平面は位相を考えにいれると確かに違うことがわかる。でも平面と3次元空間を区別しようとすると同じ手ではうまくいかない。

　多角形の頂点の数と辺の数を数えてみる。その差は、3角形でも、4角形でも0になる。どんなに複雑な多角形を考えても、数える前から答は0になることがわかる。同じように多面体の、頂点の数から辺の数をひいて面の数をたしてみる。こんども、どんなに複雑な多面体を考えても、数える前から答は2になることがわかっている。

　平面と3次元空間が位相も考えると違うものであることが、実はこの0と2が違う数であることからわかる。

圏論の視点

　十九世紀に新しく発見された幾何学の対象は、今では位相空間とか多様体とかよばれる。この対象の性質を調べる手段として考えだされたのが、そのホモロジー群とよばれる線形代数の対象だった。さっきの0とか2とかいう数は、このホモロジー群の大きさを表すオイラー数とよばれている。

　幾何学の2つの対象が同じものだったら、そのホモロジー群も同じものになるはずだ。ところがそのホモロジー群のオイラー数が違うのだから、同じものではあり得ない。こうすれば、点の集まりとしては区別できない平面と3次元空間でも、位相を考えると違うものであることがわかる、という数学の新しい方法が二十世紀になって発展した。

　幾何学の対象の歴史を年表風にまとめるとこうなるだろうか。

・有史以前から――幾何学の対象は平面や空間のなかの図形だ

った。

・十九世紀なかば--現実の空間から離れていろいろな空間を構成できること、そしてそれらの空間こそが幾何学の対象であることを、リーマンが『幾何学の基礎をなす仮説について』で指摘した。

・十九世紀末から二十世紀はじめ--リーマンが発見した新しい空間が、集合と位相のことばで正確に定式化され位相空間や多様体とよばれるようになった。

・二十世紀なかば--位相空間や多様体の性質を理解するためのホモロジーの方法から圏と関手の考えが発展し、数学に新しい統一的な視点を与えるものとして認識されるようになった。

　リーマンの『幾何学の基礎をなす仮説について』は、彼が２７歳のときの教授資格取得講義をもとに書かれた。リーマンが指摘した事実は数学史上最大の発見の一つなのだが、そのことはどのくらい知られているのだろう。リーマンの生涯についてデデキントが書いた文章には、講義の主査だったガウスが「ガウスにしては珍しいほど興奮して、リーマンの述べた思想の深遠さについて語った」とある。１８５４年6月１０日の講義の時点で、リーマンの発想を正確に記述することばは存在しなかった。そのために必要な集合と位相の用語が確立するまでに、その後ほぼ半世紀がかかった。

　位相空間と多様体は現在数学科の2年生と3年生の必修である。ホモロジー群もそのあとに3年生で学ぶ。しかしその次の段階の圏論的視点となると、本格的に学ぶ機会がないまま数学科を卒業してしまうこともありそうだ。このことに気づいたときはそんなことでいいのか、と思ったものだが、その状況は今でも変わっていない。最近は圏論の入門書もよく見かけるようになったので、圏論の視点にもとづいた数学の入門書にしてみようと思いついた。

Eléments de Mathématique

　「集合と位相」にも書いたように、二十世紀にはいり、数学は抽象的な方向へ転換した。これは物理学での量子力学や、生物学での分子生物学の成立にも比べられる大きな出来事である。この転換の理由としては、十九世紀に発見された数学固有の対象を正確に記述するために、抽象的な集合と位相のことばが欠かせないからという要素が大きい。

　『数学原論』は本来、この抽象数学のことばで数学全体を集合論の上に基礎づけて体系的に展開した記念碑的な本の書名である。私の書いたものとまぎらわしくなるので区別するために、原題の Eléments de Mathématique から、Eléments と略記する。著者のブルバキは数千ページに及ぶこの大著によって、数学の抽象的な方向への転換を主導する歴史的な役割を果たした。「線形代数の世界」でも紹介したが、ブルバキは Eléments を書くためにフランスで結成された数学者集団

のペンネームである。

Eléments という題は、古代ギリシャ数学の全貌を体系的に記述し後世の数学に測り知れない影響を及ぼしたユークリッドの『原論』から採られた。Eléments 巻頭におかれた「読者への注意」から本稿の冒頭で引用したことばのとおり、ブルバキは現代数学の『原論』を目指し、それを実現した。

Eléments が書かれた時期は、圏論的視点が発展した時代と重なる。ブルバキのメンバーにも圏論の進展で活躍した数学者は多い。数学の対象の存在意義は他の対象との関わりの中にある、という圏論的視点も Eléments にとりこまれてはいるが、Eléments で圏論が基礎として位置づけられることにはならなかった。

圏論に基礎としての役割を与えるかどうか、ブルバキの中で確執があったらしい。論争に敗れた方はブルバキを去り、勝った方も旧い世代として程なくブルバキを離れた。逆の結果になっていたら、圏論が数学科の2年生の必修になっていただろうか？

はじまりは微積分

ブルバキは、微積分の講義の準備からはじまった。

微分と積分は逆の操作である、という基本定理をニュートンとライプニッツが発見したのが近代の微積分の出発点だった。この基本定理を多変数にすると、ストークスの定理というものになる。

ブルバキの創立メンバーの一人として中心的な役割を果たした『アンドレ・ヴェイユ自伝』によれば、このストークスの定理をどう定式化するのがよいだろうという議論をきっかけとして、パリ高等師範学校の同窓生だった若手数学者の仲間を集めて微積分の教科書を書くことになったのが、ブルバキの誕生だった。１９３０年代当時のフランスの微積分の標準的な教科書は、抽象数学のことばで基礎から厳密に書かれたものではなかった。そういう教科書を自分たちで書こう、ということではじまったものが、案を練るうちに基礎の部分が膨れ上がり、数学全体を体系的に記述する巨大なものに変貌していった。

ところが、Eléments にはストークスの定理は書かれていない。正確にいうと、多様体について書く予定の概要をまとめた巻に、証明ぬきに書かれただけである。本を書く側、企画する側にまわってみると、大きな声ではいえないが、企画だけで書かれないままの本はいくらでもある。Eléments の多様体の巻も刊行未定の本に仲間入りとなった。

数学の一体性

科学のどの分野でもそうだと思うが、研究が進むにつれて専門化、細分化が進んでしまう。数学科でも集合と位相のあとのカリキュラムでは、代数、幾何、解析、応用の分野ごとに

組まれている。

ブルバキは数学の一体性を主張し、抽象的、公理的な方法にそれが組み込まれていると指摘した。フランス語でふつうは複数形で書かれる数学ということばを単数形で使ったところにも、彼らの主張が読みとれる。

数学の一体性は、圏論の視点から見れば、幾何と代数のように異なる分野を直接結びつける関手として実現している。フェルマーが調べた素数の性質やガロワ理論という代数の題材だけでなく、幾何や解析からもストークスの定理のようなホモロジーとも関係する話題をとりあげれば、数学の一体性を1冊の本の構成として表現できる。この内容だったら、1年生で学ぶ微積分の続きにもなる。『集合と位相』と『線形代数の世界』に『微積分』もあわせて、これまでに書いた3冊で解説した基礎的な内容がその先の数学にどうつながっていくのか、本1冊に盛りこめる。これでネタ不足問題も解消だ。

数学の基礎的な話題を幅広くとりあげて解説するという点では本の構想が似てきたように思ったので元の題は廃案にして、**Eléments** から勝手にのれんわけしてもらうことにした。しかしそう決心するまでにはかなりためらいがあった。幅広く話題をとりあげるといっても、数学全般を体系的に展開するわけではない。まして現代の『原論』を目指してなどいない。高校生のころに出会って以来、数学的な自己形成は **Eléments** に依っているという個人的な思い入れもある。でもこの題をつける本を書く機会は二度と巡ってこないだろうという誘惑に抵抗するのは難しかった。

『数学原論』の視界

『数学原論』で現代の数学を学ぶとその先に何が見えてくるのだろうか。登山道を一歩一歩踏みしめて頂上に着いたら、そこからの眺めを楽しみたい。数学の本を読み終えたあとも、苦労して勉強して終わりではなく、こんなことがわかるようになった、という達成感にひたれないだろうか。

そこで代数、幾何、解析が交錯する場として楕円曲線を最終章で紹介する構成にした。楕円曲線は、フェルマーの時代にすでに研究されていた古典中の古典である。フェルマーの時代から3世紀半の時を経て二十世紀末にようやく証明されたフェルマーの最終定理も、楕円曲線の性質を証明することで解決されたのだった。

目標が決まればそれに応じて本の内容も固まってくる。楕円曲線を目標にするのなら、リーマンの幾何学の着想の出発点ともなったリーマン面は外せない。多様体の定義も現代的なことばで書きたくなる。

構想が固まってみると、ネタ不足に悩んでいたはずが、じわじわとページ数が増えていく。のれんをわけてもらっているといっても、はじめの見込みよりずっと分厚い本を書くところまで本家をまねるつもりはなかったのだが。

参考文献　M．マシャル　高橋礼司訳、　ブルバキ　数学者達の秘密結社　丸善出版　２００２年