はじまりはコンパクト

「ねえ、コンパクトってなに。」
「コンパクトはねえ。コンパクトは有限みたいなもんだよ。」
教室からでるとキャンパスの並木道はもうすっかり暗くなっていた。４月から数学科に進む２年生は必修の「集合と位相」の授業で、ぼくたちはコンパクト空間の定義を教わったところだった。
「うん、有限な部分被覆ってあったもんね。でも、それが存在してどうなるの。」
「どうって・・、コンパクトの話すると長くなるからさ。晩ごはん食べてそれからってのはどう？」
「コンパクトなのに短くまとめられないって、なんかおかしいね。えーと、9 時には帰らないといけないんだけどそれまでならいいよ。」
「え、そんなに早くは終わらないよ。まあいっか、きょうは 1 回めってことで。」(そうか、こんなふうに自然に誘えばよかったのか。)
「何ぶつぶつ言ってんの？早くいこうよ。」

第１話　―　最大値の定理

「f’(x)>0 なら f(x)は単調増加って定理あるでしょ。あれの証明って覚えてる？」
「覚えてるよ。でも、コンパクトの話を教えてくれるんじゃなかったっけ。」
「そうだよ。それがコンパクトの話になるんだよ。」
「そうなの？だって平均値の定理を使えばすぐじゃない？」
「うん、そうだけどさ。じゃその平均値の定理の証明は？」
「なんか試験みたいだね。最大値の定理⇒ロルの定理⇒平均値の定理だったよね。」

「ふつうそうやるよねってのを確かめといたほうがいいかなって思ったんだ。でもね、平均値の定理を使わないでやってるおもしろい本をこないだみつけたんだ。」
「あれ、微積分は小平邦彦先生の「解析入門」で勉強したって言ってなかったっけ。それって、新しい本？」
「うん。斎藤毅って人の「微積分」って本なんだ。」
「なにここで宣伝なんかしてるの？ちょっとまずくない？」
「大丈夫だよ、たぶん。小平先生のは岩波だし、編集者の人だって優しそうだもん。」
「なんか話ずれてない？コンパクトはどうしたの。」
「その最大値の定理がコンパクトってことなんだもん。」
「えっそうなの？どうして。」
「証明してみればわかるんじゃないかな。授業じゃまだやってないけど、閉区間がコンパクトってことは使うよ。閉区間じゃなくてもコンパクトで空でなければ同じだから、X って書くことにするね。」
　$f(x)$を X で定義された連続関数とする。背理法で示すことにして、$f(x)$には最大値がなかったと仮定する。これは、任意の $x \in X$ に対し、$t \in X$ で $f(x)<f(t)$をみたすものが存在するということである。
　$t \in X$ に対し $U_t=\{x \in X | f(x)<f(t)\}$とおく。$f(x)$は連続だから U_t は X の開集合なので、最大値がないという仮定より $(U_t)_{t \in X}$ は X の開被覆になる。X はコンパクトとしているから、有限な部分被覆 $U_{t1},\cdots,U_{tn}$ がある。
「ちょっとまって、ここで有限な部分被覆がでてくるんだ。」
「うん。どう使うか見てて。」
この続きは
　　　小平邦彦（編）「新・数学の学び方」岩波書店
でお読みください。