Hasse-Weil L 関数の bad factor と weight スペクトル系列

東大 数理 斎藤 毅

1. Hasse-Weil L 関数とその bad factor

代数体 k 上の n 次元完備非特異多様体 X と、自然数 $0 \leq m \leq 2n$ に対し、その Hasse-Weil L 関数 $L(H^m(X), s)$ は、次の Euler 積で定義される [13]。

$$L(H^m(X), s) = \prod_v P_v(H^m(X), Nv^{-s})^{-1} \tag{1}$$

v は k の有限素点を走り、Nv は剰余体 $\kappa(v)$ の位数であり、$P_v(H^m(X), t)$ は次のように定義される多項式である。

まず v で X がよい還元をもつ場合を考える。X_v を X の v でのよい還元とする。X_v の合同ゼータ関数 $Z(X_v, t)$ は、次の式で定義される $t = Nv^{-s}$ の巾級数である。

$$Z(X_v, t) = \exp\left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\text{Card } X_v(\kappa(v)_d)}{d} t^d\right).$$

ここで $\kappa(v)_d$ は v の剰余体の d 次拡大を表わす。巾級数 $Z(X_v, t)$ は、Weil 予想 [3] により、次のように分解する。

$$Z(X_v, t) = \frac{P_v(H^1(X), t) \cdots P_v(H^{2n-1}(X), t)}{P_v(H^0(X), t) \cdot P_v(H^2(X), t) \cdots P_v(H^{2n}(X), t)} \tag{2}$$

ここで $P_v(H^m(X), t)$ は、次の 2 条件と等式 (2) で特徴づけられる多項式である。

1. $P_v(H^m(X), t)$ は $\mathbb{Z}$ 係数で、定数項は 1 である。
2. $P_v(H^m(X), t) = \prod_i (1 - \alpha_{m,i} t)$ と分解すると、$\alpha_{m,i}$ の複素絶対値は $Nv^{m/2}$ である。

条件 2 より、(1) の右辺の無限積は $\Re s > \frac{m}{2} + 1$ で絶対収束する。多項式 $P_v(H^m(X), t)$ の次数は、うめこみ $k \to \mathbb{C}$ を定めると、特異コホモロジーの Betti 数 $\dim H^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ である。

エタール・コホモロジーを使うと、$P_v(H^m(X), t)$ は次のように表わされる [2] Rapport。ℓ を v の標数とは異なる素数とする。ℓ 進コホモロジー $H^m(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は、X が v でよい還元をもつので、絶対 Galois 群 $G_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ の表現として v で不分岐である。したがって剰余体 $\kappa(v)$ の絶対 Galois 群 $G_{\kappa(v)} = \mathrm{Gal}(\overline{\kappa(v)}/\kappa(v))$ の表現をひきおこす。Nv 乗写像は $G_{\kappa(v)}$ の位相的生成元であるが、その逆元を幾何的 Frobenius とよび、Fr_v で表わす。すると

$$P_v(H^m(X), t) = \det(1 - Fr_v t : H^m(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell))$$

がなりたつ。

以下では、X がよい還元をもたない有限素点 v での Euler 因子 $P_v(H^m(X), t)$ を考える。このときは、多項式 $P_v(H^m(X), t)$ は、ℓ 進コホモロジーにより、

$$P_v(H^m(X), t) = \det(1 - Fr_v t : H^m(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)^{I_v})$$

と定義される。ここで $(\cdots)^{I_v}$ は、v での惰性群による固定部分を剰余体の絶対 Galois 群 $G_{\kappa(v)}$ の表現とみたものを表わす。この定義によれば、多項式 $P_v(H^m(X),t)$ は $\mathbb{Q}_\ell$ 係数であり、ℓ によるかもしれない。そこで、多項式 $P_v(H^m(X),t)$ について、次の予想は基本的である。

予想 1.([13] C_5) $P_v(H^m(X),t)$ は $\mathbb{Z}$ 係数であり、ℓ にはよらない。

予想 2.(同 C_6) $P_v(H^m(X),t)=\prod_i(1-\alpha_{m,i}t)$ と分解すると、$\alpha_{m,i}$ の複素絶対値は $Nv^{r_i/2}$ となるような整数 $0\leq r_i\leq m$ がある。

これらは一般には未解決である。予想 1 は $m\leq 1$ ならなりたつことが、Abel 多様体の Néron モデルを使って示されている [4]。予想 2 で、不等式 $0\leq r_i\leq m$ を $0\leq r_i\leq 2m$ でおきかえたものは、Weil 予想、alteration[6] と weight スペクトル系列 [9] を使って証明されている。不等式 $0\leq r_i\leq m$ は、局所体の絶対 Galois 群の ℓ 進コホモロジーへの作用に関する weight-monodromy 予想 [1] の帰結である。weight-monodromy 予想と weight スペクトル系列についてはあとで説明する。weight-monodromy 予想は、weight スペクトル系列を使って、$m\leq 2$ ならなりたつことが示せるので、この場合には予想 2 が証明されている。以下では、予想 1 が、weight スペクトル系列の性質を調べることにより、Tate 予想 [14],[15] の一部と weight-monodromy 予想から導けるということを解説する。また同じ方法により、予想 1 を $\dim X=2$ の場合には他の予想を仮定せずに証明できる。

このあとの内容は次のとおりである。まず次節では、ℓ 進コホモロジーの跡の ℓ 非依存性に関する主結果、定理 1、をのべる。3 節と 4 節でそれぞれ Tate 予想と weight-monodromy 予想を紹介し、定理 1 とこれらから、予想 1 を導く。5 節で weight スペクトル系列を紹介し、6 節で定理 1 の証明の方針を簡単に説明する。

2. ℓ 非依存性

一般に K を体とし、X_K を K 上の n 次元の完備非特異代数多様体とする。Γ を $X_K\times_K X_K$ の余次元 n の部分多様体とし、ℓ を K の標数とは異なる素数とすると、Γ のコホモロジー類は $H^m(X_{\bar K},\mathbb{Q}_\ell)$ の自己準同型を定める [2]。K が局所体であるとき、K の Weil 群 W_K とは、剰余体 F の絶対 Galois 群への標準全射 $G_K\to G_F$ による部分群 $\langle Fr_F\rangle\subset G_F$ の逆像のことをいう。このとき次がなりたつ。

定理 1. [11] K を局所体とし、ℓ を K の剰余体の標数とは違う素数とする。X,Γ を上のとおりとし、σ を K の Weil 群 W_K の元とする。このとき交代和

$$\sum_{m=0}^{2n}(-1)^m\mathrm{Tr}(\Gamma^*\circ\sigma_*:H^m(X_{\bar K},\mathbb{Q}_\ell))$$

は有理数であり、ℓ によらない。

定理 1 から、p を F の標数とすると、交代和は $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ にはいることがわかる。$\sigma=\mathrm{id}$ のとき、あるいは、X がよい還元をもつときは、これは Lefschetz 跡公式の帰結である [2] Cycle。$\Gamma^*=\mathrm{id}$ のときは、alteration を使って落合により示されていた [8]。σ が惰性群の pro-p 部分にはいっているときは、log Lefschetz 跡公式に帰着させて示されていた [7]。正標数の局所体での類似については、$\Gamma^*=\mathrm{id}$ のときに個々の項が有理数であ

り、ℓ によらないことを寺杣が示している [16]。定理 1 は、weight スペクトル系列の関手性を使って、Lefschetz 跡公式に帰着させて証明される [11]。証明の方針は、6 節で簡単にのべる。

3. Tate 予想

一般に k を体とし、ℓ を k の標数とは異なる素数とする。G_k の ℓ 進表現 V に対し、V に ℓ 進円分指標の i 乗をテンソル積して得られる表現を $V(i)$ で表わす。X_k を k 上の n 次元の完備非特異代数多様体とする。X_k の余次元 i の閉部分多様体 W のコホモロジー類 $[W] \in H^{2i}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(i))$ が定義される [2]Cycle。$Z^i(X_k)$ で、X_k の余次元 i の閉部分多様体で生成される自由 Abel 群を表わす。ℓ 進サイクル写像 $cl_\ell^i : Z^i(X_k) \to H^{2i}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)(i)$ を $W \mapsto [W]$ で定義し、$A^i(X_k) = Z^i(X_k)/\mathrm{Ker}\ cl_\ell^i$ とおく。

このとき次がなりたつと予想されている。

Tate 予想. [14],[15] k を有限体、代数体などの素体上有限生成な体とし、X_k を k 上完備非特異な多様体とし、$i \geq 0$ を自然数とする。ℓ を k の標数とは違う体とする。ℓ 進サイクル写像の核 Ker cl_ℓ^i は ℓ のとりかたによらず、それがひきおこす Galois 不変部分への写像

$$A^i(X_k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \to H^{2i}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{G_k}$$

は同型である。

Tate 予想から、Künneth 射影子が代数対応で与えられることが、次のようにして導かれる。一般に k を体とし、X_k を k 上の n 次元完備非特異多様体とする。ℓ を k の標数とは違う素数とし、$0 \leq m \leq 2n$ を自然数とする。Poincaré 双対性と Künneth 公式により、同型

$$\bigoplus_{m=0}^{2n} \mathrm{End}(H^m(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)) \to \bigoplus_{m=0}^{2n} H^m(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes H^{2n-m}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^{2n}(X_{\bar{k}} \times_{\bar{k}} X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(n))$$

が得られる。左はじの、第 m 成分は恒等写像でそれ以外は 0 という元の、右はじでの像を、第 m Künneth 射影子とよび p_m で表わす。これは Galois 群 G_k の作用で不変である。

k が有限体ならば、Weil 予想により、p_m は Frobenius 自己準同型の $\mathbb{Q}$ 係数の多項式である。したがって、これは ℓ 進サイクル写像 $cl_\ell^i : A^n(X_k \times_k X_k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to H^{2n}(X_{\bar{k}} \times_{\bar{k}} X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(n))$ の像にはいる。k が代数体の場合を考える。Tate 予想を仮定すれば、p_m は ℓ 進サイクル写像 $cl_\ell^i : A^n(X_k \times_k X_k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \to H^{2n}(X_{\bar{k}} \times_{\bar{k}} X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(n))$ の像にはいる。X_k が good reduction をもつ有限素点 v をとれば、可換図式

$$\begin{array}{ccc}
A^n(X_k \times_k X_k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \xrightarrow{cl} & H^{2n}(X_{\bar{k}} \times_{\bar{k}} X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(n)) \\
\downarrow & & \downarrow \simeq \\
A^n(X_v \times_{\kappa(v)} X_v) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \xrightarrow[cl]{} & H^{2n}(X_{\overline{\kappa(v)}} \times_{\overline{\kappa(v)}} X_{\overline{\kappa(v)}}, \mathbb{Q}_\ell(n))
\end{array}$$

より、$A^n(X_k \times_k X_k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の元 Γ_m で, 任意の ℓ に対し、その ℓ 進サイクル写像による $H^{2n}(X_{\bar{k}} \times_{\bar{k}} X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell(n))$ での像 p_m であるものが存在することがわかる。

定理1を X の局所体への係数拡大 X_K と Γ_m に適用すると、$\sigma \in W_K$ に対し、$\mathrm{Tr}(\sigma_* : H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$ は有理数であり、ℓ によらないことがわかる。さらに weight-monodromy 予想を仮定すると、予想1を導けることを次の節でみる。

4. weight-monodromy 予想

weight-monodromy 予想は Weil 予想を局所体上の多様体へ拡張したものと考えられる。

一般に、線型空間 V の巾零自己準同型 N に対し, V の部分空間の増大列 $M_i = \sum_{j-k=i}(\mathrm{Ker}\ N^{j+1} \cap \mathrm{Im}\ N^k) \subset V$ は, 次の条件 (1)-(3) をみたすただ1つのものである.

(1) 十分大きい i に対し $M_i = V, M_{-i} = 0$.

(2) $NM_i \subset M_{i-2}$.

(3) $i > 0$ に対し N^i がひきおこす線型写像 $N^i : Gr_i^M V = M_i/M_{i-1} \to Gr_{-i}^M V$ は同型.

たとえば $N^2 = 0$ のときは, $M_{-2} = 0, M_{-1} = \mathrm{Im}\ N, M_0 = \mathrm{Ker}\ N, M_1 = V$ である.

K を局所体とし、ℓ を K の剰余体の標数でない素数とする。V を G_K の ℓ 進表現とする。Grothendieck の monodromy 定理 [12] により、V の巾零自己準同型 N で, 惰性群 $I \subset G_K$ のある開正規部分群 J の任意の元 σ に対し、σ の V への作用が $\exp(t_\ell(\sigma)N)$ であるようなものがただ1つ定まる. ここで, $t_\ell : I \to \mathbb{Z}_\ell$ は, 標準全射 $I \to \varprojlim \mu_{\ell^n} : \sigma \mapsto (\sigma(\pi^{1/\ell^n})/\pi^{1/\ell^n})_n$ と非標準同型 $\varprojlim \mu_{\ell^n} \to \mathbb{Z}_\ell$ の合成である. V の巾零自己準同型 N に対し、上のように定まる V の部分空間 $M_i, i \in \mathbb{Z}$ は V の部分表現である。この部分表現の列 $(M_i)_i$ を V のモノドロミー・フィルトレイションという.

K を局所体とし、X を K 上完備な非特異代数多様体とする。ℓ を上のように K の剰余体の標数と異なる素数とすると、ℓ 進表現 $V = H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ のモノドロミー・フィルトレイション $(M_i)_i$ が定義される。

Weight-monodromy 予想 [1] K を局所体とし、X を K 上完備な非特異代数多様体とする。ℓ を K の剰余体の標数と違う素数とし、$(M_i)_i$ を $H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ のモノドロミー・フィルトレイションとする。q を剰余体 F の位数とし、$F \in G_K$ を幾何的Frobenius$Fr_F \in G_F$ のもちあげとする。このとき、F の $Gr_i^M H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用の固有値は代数的整数であり、その複素絶対値は $q^{(m+i)/2}$ である。

上にも述べたように、$m \leq 2$ なら weight-monodromy 予想は証明されている。正標数の局所体での類似については任意次元で証明されている [3],[5]。

前節の終わりで、定理1と Tate 予想から、$\sigma \in W_K$ に対し $\mathrm{Tr}(\sigma_* : H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$ は有理数で ℓ によらないことを導いた。さらに weight-monodromy 予想を仮定すると、Fr_F の任意のもちあげ $F \in W_K$ に対し、$\mathrm{Tr}(F_* : Gr_i^M H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$ が有理数で ℓ によらないことが従う。これから、初等的な線型代数により、$\mathrm{Tr}(F_* : \mathrm{Ker}(N : H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)))$ が有理数で ℓ によらないことが従う。$H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)^I = (\mathrm{Ker}(N : H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)))^{I/J}$ だから、これから予想1が従う。

5. weight スペクトル系列

局所体の整数環 O 上のスキーム X が狭義の準安定スキームであるとは、X の開被覆で $O[T_0, \dots, T_n]/(T_0 \cdots T_r - \pi), (0 \leq r \leq n)$ 上エタールなものがとれることをいう。

閉ファイバー $Y = X_O \times_O F$ の既約成分を $D_1, \dots, D_r$ とし、$Y^{(0)} = \coprod_i D_i, \cdots, Y^{(p)} = \coprod_{i_1<\cdots<i_p} D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_p}$ とおく。X の O 上の相対次元を n とすると、$Y^{(p)}$ は $n-p$ 次元の剰余体 F 上の smooth なスキームである。

局所体の整数環 O 上の完備な狭義の準安定スキーム X と、剰余体 F の標数とは違う素数 ℓ に対し、Rapoport-Zink は weight スペクトル系列

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{i \geq \max(0,-p)} H^{q-2i}(Y_{\bar{F}}^{(p+2i)}, \mathbb{Q}_\ell(-i)) \Rightarrow H^{p+q}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

を定義した [9]。絶対 Galois 群 G_K は、weight スペクトル系列に自然に作用する。weight スペクトル系列は、Weil 予想により、E_2-項で退化する。weight スペクトル系列が極限 $H^{p+q}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ に定めるフィルトレイション $(W_i)_i$ を weight フィルトレイションとよぶ。剰余体の幾何的 Frobenius Fr_F のもちあげ $F \in W_K$ の $Gr_i^W H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用の固有値は、Weil 予想より、代数的整数でその複素絶対値は $q^{(m+i)/2}$ である。したがって、weight-monodromy 予想は、weight フィルトレイション $(W_i)_i$ がモノドロミー・フィルトレイション $(M_i)_i$ と等しいことと同値である。また E_1-項の自然な同型 $E_1^{-p,q+2p} \to E_1^{p,q}, p > 0$ が E_2-項の同型をひきおこすこととも同値である。Rapoport-Zink は $(p,q) = (1,1)$ のときにこの同型を示すことにより、$n = m = 2$ に対する weight-monodromy 予想を示している。

6. 定理 1 の証明

定理 1 は次の定理に帰着させて証明される。

定理 2. [11] O を局所体の整数環とし、X を O 上 proper な狭義の準安定スキームとする。ℓ を剰余体 F の標数とは違う素数とする。さらに Γ を定理 1 のとおりとする。このとき weight スペクトル系列の自己準同型で E_∞-項には Γ^* で作用し、E_1 項には、$Y^{(p)} \times_F Y^{(p)}$ の余次元 $n-p$ の $\mathbb{Q}$ 係数の ℓ によらないある代数的サイクル $\Gamma^{(p)}$ による $\Gamma^{(p)*}$ として作用するものが存在する。

定理 2 の証明には、perverse 層を使った weight スペクトル系列の構成を用いる。

定理 1 の証明の方針について簡単に述べる。簡単のため X_K は整数環 O 上の狭義の準安定モデル X_O をもつと仮定する。σ の G_F での像が $Fr_F^r, r \geq 0$ であると仮定して、定理 2 を適用すると、定理 1 の交代和は

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \cdot \frac{q^{r(p+1)} - 1}{q^r - 1} \cdot \sum_{m=0}^{2(n-p)} (-1)^m \mathrm{Tr}(\Gamma^{(p)*} \circ F^{*r} : H^m(Y_{\bar{F}}^{(p)}, \mathbb{Q}_\ell))$$

と表わせる。ここで q は剰余体 F の位数であり、$F : Y^{(p)} \to Y^{(p)}$ は、q 乗 Frobenius 自己準同型を表わす。${}^t\Gamma_{F^r} \subset Y^{(p)} \times_F Y^{(p)}$ を F^r のグラフの転置とすると、Lefschetz 跡公式により、

$$\sum_{m=0}^{2(n-p)} (-1)^m \mathrm{Tr}(\Gamma^{(p)*} \circ F^{*r} : H^m(Y_{\bar{F}}^{(p)}, \mathbb{Q}_\ell)) = (\Gamma^{(p)}, {}^t\Gamma_{F^r})$$

である。右辺は交点数であり、ℓ によらない有理数だから定理 1 が示される。

詳細に興味をもたれた方はプレプリント [11] をごらんください。[10] にも関連する話題があります。

References

[1] P. Deligne, *Théorie de Hodge I,* Proc. ICM Nice (1971) Gauthier-Villars, Paris, 425-430.

[2] P.Deligne et al, Cohomologie étale, LNM 569, Springer 1977.

[3] P. Deligne, *La conjecture de Weil I,* Publ. Math. IHES 43 (1974) 273-308, *II,* ibid. 52 (1981) 137-251.

[4] A.Grothendieck, *Modèles de Néron et monodromie,* dans Groupes de monodromie en géométrie algébrique, SGA 7 I, LNM 288 Springer, (1972) 313-513.

[5] T.Ito, *Weight-monodromy conjecture over positive characteristic local fields,* 東京大学修士論文 (2001).

`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~itote2/papers/wmconj.dvi`

[6] A. J. de Jong, *Families of curves and alterations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 47 (1997), no. 2, 599–621.

[7] K.Kato and T. Saito, *Conductor formula of Bloch,* preprint, University of Tokyo, (2001).

`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~t-saito/pp/bloch.dvi`

[8] T.Ochiai, *l-independence of the trace of monodromy,* Math. Ann., 315 (1999), no. 2, 321-340.

[9] M.Rapoport and T.Zink, *Über die lokale Zetafunktion von Shimura varietäten, Monodromiefiltrations und verschwindende Zyklen in ungeicher Characteristik,* Inv. Math. 68 (1980) 21-101.

[10] 斎藤 毅, 数論幾何における Galois 表現, 数学 53(2001) 337-348.

[11] T.Saito, *Weight spectral sequences and independence of* ℓ, preprint, University of Tokyo, (2001).

`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~t-saito/pp/wm1.ps`

[12] J.-P. Serre, J. Tate, *Good reduction of abelian varieties*, Ann. of Math. **88** (1968), 492–517.

[13] J.-P. Serre, *Facteurs locaux des fonction zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures),* (1970) Oeuvres 87.

[14] J. Tate, *Algebraic cycles and poles of zeta functions,* Arith. alg. geom., Harper and Row, New York, (1965) 93-110.

[15] ——, *Conjectures on algebraic cycles in ℓ-adic cohomology,* Proc. Symp. in pure Math., AMS, 55 part I (1994) 71-83.

[16] T.Terasoma, *Monodromy weight filtration is independent of* l, preprint.
`http://gauss.ms.u-tokyo.ac.jp/paper/ind2.ps`