剰余体が完全でない局所体の分岐

斎藤 毅

剰余体が完全な局所体の拡大については古典的な分岐理論がある [4], [2]. 剰余体が完全という仮定をおとすと, 分岐のようすにはわからないことがまだまだ多い。A.Abbés 氏との共同研究により, 分岐群のフィルトレイションを定義することができたので, これを紹介する。詳細は [1] を参照してください. 同じような考えに基くフィルトレイションの定義が, 藤原 一宏氏により与えられている。彼の定義に示唆された部分が大きいことを記しておく。

1. 古典理論の復習.

ここでは K を剰余体 F が完全体であるような完備離散付値体とする。F の標数を p で表わし, G_K で K の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ を表わす. G_K には分岐群のフィルトレイションとよばれる閉正規部分群の減少族 $(G^v)_{v\in\mathbf{Q},\geq 0}$ が定義されている. これの定義はここでは省略する. 分岐群のフィルトレイションのおもな性質を復習しておく. $v \in \mathbf{R}, \geq 0$ に対し, $G^v = \bigcap_{v'\leq v} G^v, G^{v+} = \overline{\bigcup_{v'\geq v} G^{v'}}$ とおく.

1. K^{ur} を K の最大不分岐拡大とし, K^{tr} を K の最大馴分岐拡大とする. 剰余体 F が有限ならば, $K^{ur} = K(\zeta_m, p \not| m)$ である. K の素元を π とすると, 一般に $K^{tr} = K^{ur}(\pi^{1/m}, p \not| m)$ である. K^{ur}, K^{tr} と対応する G_K の閉正規部分群をそれぞれ惰性群, 暴惰性群とよび I, P で表わす. 商群 G_K/I は剰余体 F の絶対 Galois 群 G_F と, I/P は $\varprojlim_{p\not| n}\mu_n(\bar{F})$ とそれぞれ標準的に同一視される. P は pro-p 群である.

このとき $I = G^0, P = G^{0+}$ である. また $\bigcap_{v>0} G^v = 1$ である.

2. $v > 0$ を正の有理数とすると, 部分商 G^v/G^{v+} は Abel 群でかつ p 倍すると 0 である. $v > 0$ が無理数ならば $G^v = G^{v+}$ である.

3. ℓ を p とことなる素数とする. ℓ 進表現 $\rho : G_K \to GL_{\mathbf{Q}_\ell}(V)$ の Swan 導手を $\mathrm{Sw}(V) = \sum_{v>0} v\cdot\dim(V^{G^{v+}}/V^{G^v})$ で定める. このとき $\mathrm{Sw}(V)$ は整数である. $\mathrm{Sw}(V) = 0$ であるためには V への P の作用が自明であることが必要十分である.

4. K の剰余体 F が有限体であるとする. このとき局所類体論の相互写像 $K^\times \to G_K^{ab}$ は, 同型 $O_K^\times \to \mathrm{Im} I$ をひきおこす. 正の有理数 $v > 0$ に対し, G_K^v の G_K^{ab} への像は, n を $n-1 < v \leq n$ をみたす整数とすると, $1 + m_K^n \subset O_K^\times$ の像と一致する.

5. C を体 F 上の射影非特異代数曲線とし, $\mathcal{F}$ を C の密な開部分スキーム上のスムース ℓ 進層とする. 点 $v \in C-U$ に対し, K_v を C の関数体の v が定める付値に関する完備化とする. $\mathcal{F}$ が定める G_{K_v} の ℓ 進表現の Swan 導手を $\mathrm{Sw}_v\mathcal{F}$ で表す. このとき $\mathcal{F}$ の Euler 数 $\chi_c(U_{\bar{F}}, \mathcal{F}) = \sum_{q=0}^2 \dim H_c^q(U_{\bar{F}}, \mathcal{F})$ について, Grothendieck-Ogg-Shafarevich の公式

$$\chi_c(U_{\bar{F}}, \mathcal{F}) = \chi_c(U_{\bar{F}}, \mathbf{Q})\cdot \mathrm{rank}\ \mathcal{F} - \sum_{v\in C-U} \deg v \cdot \mathrm{Sw}_v\mathcal{F}$$

がなりたつ.

6.　L を K の有限次分離拡大とする．連続関数 $\psi_{L/K}: \mathbf{R}_{\geq 0} \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ で, $G_K^v \cap G_L = G_L^{\psi_{L/K}(v)}$ が任意の $v \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ についてなりたつようなものが存在する．$\psi_{L/K}$ のグラフは折れ線で下に凸である．L/K の分岐指数 $e_{L/K}$ が p でわれなければ, $\psi_{L/K}(v) = e_{L/K} \cdot v$ である．

これから F が完全体という仮定ぬきでフィルトレイション $(G^v)_{v\in\mathbf{Q},\geq 0}$ を定義する．このフィルトレイションについて, 上の各性質は次のようになっている．

1. そのままでなりたつ．

2. なりたつことが期待されるが, まだ示されていない．無理数 v については $G^v = G^{v+}$ であることがわかっている．

3. わかっていない．

4. 高次元局所類体論について同じようなことがなりたつことが期待されるが, わかっていない．一般に G_K^{ab} には加藤によりフィルトレイションが定義されている [3]．これは, $(G^v)_{v\in\mathbf{Q},\geq 0}$ の定義を修正したものが誘導するものと一致することが期待される．しかし, これもわかっていない．

5. 高次元の多様体上の ℓ 進層について同じような式が得られることが期待されるが, これも全くわかっていない．

6. なりたたない．ただし, $e_{L/K}$ が p でわれず, 剰余体の拡大が分離なときには, $(G^v)_{v\in\mathbf{Q},\geq 0}$ の定義を修正したものについてこれがなりたつことがわかっている．

2. フィルトレイションの定義

以下 K は剰余体 F が完全とは限らない完備離散付値体とする．

まず絶対 Galois 群 G_K にフィルトレイションを定義するには, ファイバー関手にフィルトレイションを定義すればよいということを説明する．ファイバー関手

$$F: (K\text{ 上の有限エタール環}) \longrightarrow (G_K\text{ の連続な作用つきの有限集合})$$

とは, 有限エタール環 L に対し, $F(L) = \mathrm{Hom}_K(L, \bar{K}) = \{K\text{ 上の環の準同型 } L \to \bar{K}\}$ を対応させるものである．N を G_K の閉正規部分群とすると, F の商関手 F_N が $F_N(L) = F(L)/N$ とおくことにより定まる．逆に F_N から次のようにして N を復元できる．

補題 $F \to F'$ を関手の射で次の 2 条件をみたすものとする．

(1) 任意の L について $F(L) \to F'(L)$ は全射．

(2) $F(L) \to F(L')$ が全射であるような任意の射 $L' \to L$ に対し, 図式

$$\begin{array}{ccc} F(L) & \longrightarrow & F(L') \\ \downarrow & & \downarrow \\ F'(L) & \longrightarrow & F'(L') \end{array}$$

において $F'(L')$ は余ファイバー積．

このとき

$$N = \bigcap_{L: F(L) \to F'(L)\text{ は同型}} \mathrm{Ker}(G_K \to \mathrm{Aut}F(L))$$

とおくと, 関手 F' は商関手 F_N と標準同型である．

この補題により, G_K にフィルトレイション $(G^v)_{v\in\mathbf{Q},\geq 0}$ を定義するには, ファイバー関手 F について, 補題の条件 (1),(2) をみたす関手の射の族 $(F \to F^v)_{v\in\mathbf{Q},\geq 0}$ を定義すればよいことがわかる．

関手の射の族 $(F \to F^v)_{v\in \mathbf{Q},\geq 0}$ を定義する．まず K 上の有限エタール環 L に対し，

$$F(L) = \mathrm{Hom}_{O_K}(O_L, O_{\bar{K}}) = \varprojlim{}_v \mathrm{Hom}_{O_K}(O_L, O_{\bar{K}}/m^v)$$

であることに注意する．ここで m^v は $O_{\bar{K}}$ のイデアル $\{a \in O_{\bar{K}} | \mathrm{ord}_K a \geq v\}$ であり，付値 ord_K は K の素元の付値が 1 となるものである．すると $F^v(L) = \mathrm{Hom}_{O_K}(O_L, O_{\bar{K}}/m^v)$ とおけばよいように思えるが，この右辺は無限集合なので，標準射 $F(L) \to F^v(L)$ は全射になりえない．そこで右辺に幾何的な構造をもたせ，右辺そのもののかわりに，右辺の連結成分のなす集合 $\pi_0(\mathrm{Hom}_{O_K}(O_L, O_{\bar{K}}/m^v))$ として $F^v(L)$ を定義したい．これは，リジッド幾何の概念を使って次のようにしてできる．

記号をいくつか導入する．$X = \mathrm{Spec}\ O_L$ とおく．$F(L)$ は X の $O_{\bar{K}}$ 値点の集合 $X(O_{\bar{K}})$ と等しい．O_L の O_K 上の生成系 $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ をとり，環の全射 $O_K[X_1, \ldots, X_n] \to O_L$ を定める．$P = \mathrm{Spec}\ O_K[X_1, \ldots, X_n]$ とおくと，これは閉埋め込み $X \to P$ を定める．$P(O_{\bar{K}})$ は半径 1 の閉球の下部集合である．次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
F(L) = X(O_{\bar{K}}) \arrow[r] & \mathcal{X}_Z^v \arrow[r] \arrow[d] & P(O_{\bar{K}}) \arrow[d] \\
& X(O_{\bar{K}}/m^v) \arrow[r] & P(O_{\bar{K}}/m^v).
\end{tikzcd}$$

ここで $\mathcal{X}_Z^v$ はファイバー積として定義し，それが下部集合であるようなアフィノイド多様体と同一視する．たての射 $P(O_{\bar{K}}) \to P(O_{\bar{K}}/m^v)$ のファイバーは閉球だから，もし連結成分の集合 $\pi_0(X(O_{\bar{K}}/m^v))$ が定義できるとすると，それはアフィノイド多様体 $\mathcal{X}_Z^v$ の連結成分の集合 $\pi_0(\mathcal{X}_Z^v)$ と標準的に同一視できるはずである．この集合 $\pi_0(\mathcal{X}_Z^v)$ は実際 L と v だけで定まり，生成系 Z のとりかたにはよらないことが示せる．そこで $F^v(L) = \pi_0(\mathcal{X}_Z^{v+1})$ とおき，関手 F^v を定める ($+1$ に注意)．上の図式の射 $F(L) \to \mathcal{X}_Z^v$ は，関手の射 $F \to F^v$ をひきおこす．このようにして，関手の射の族 $(F \to F^v)_{v\in \mathbf{Q},\geq 0}$ が定義される．

この関手の射の族 $(F \to F^v)_{v\in \mathbf{Q},\geq 0}$ が Galois 群のフィルトレイションを定めることを示すには，これが補題の二条件をみたすことを確かめればよい．このために，全射 $O_K[X_1, \ldots, X_n] \to O_L$ の核 I_Z の生成系 $(f_1, \ldots, f_n)$ をとる．環 O_L は完全交叉なので，O_L の生成系と I_Z の生成系の元の個数を同じにとれることに注意しておく．$f_1, \ldots, f_n \in O_K[X_1, \ldots, X_n]$ は，　射 $f : P \to \mathbf{A}^n$ を定める．図式

$$\begin{tikzcd}
X(O_{\bar{K}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X}_Z^v \arrow[r] \arrow[d] & P(O_{\bar{K}}) \arrow[d, "f"] \\
\{0\} \arrow[r] & (m_{\bar{K}}^v)^n \arrow[r] & O_{\bar{K}}^n = \mathbf{A}^n(O_{\bar{K}})
\end{tikzcd}$$

において，二つの四角はともにカルテシアンである．関手の射 $F \to F^v$ が補題の条件 (1) をみたすことを示すには，図式の真ん中たての射 $\mathcal{X}_Z^v \to (m_{\bar{K}}^v)^n$ が開かつ閉写像であることを示せば十分である．これは射 $f : P \to \mathbf{A}^n$ の $\mathbf{A}^n$ の原点における完備化が，有限平坦であることから導かれる．詳細は省略する．補題の条件 (2) も同じような方法で示される．剰余体 F が完全な場合には，ここで定義したフィルトレイション $(G^v)_{v\in \mathbf{Q},\geq 0}$ は，古典的なものと一致する．

3. log フィルトレイション

上で定義したフィルトレイションよりも，log 構造まで加味して定義したフィルトレイション $(G_{\log}^v)_{v\in \mathbf{Q},\geq 0}$ の方が良い性質をもつと期待される．これが，第 1 節の終わりでのべた性質 4,6 をみ

たすために必要な修正である. $(G^v)_{v\in\mathbf{Q},\geq 0}$ と $(G^v_{\log})_{v\in\mathbf{Q},\geq 0}$ は, $G^{v-1}\supset G^v_{\log}\supset G^v$ をみたす. 剰余体 F が完全な場合には, $G^v_{\log}=G^v$ である. フィルトレイション $(G^v_{\log})_{v\in\mathbf{Q},\geq 0}$ を定義するには, 上と同様に補題の条件 (1),(2) をみたす関手の射の族 $(F\to F^v_{\log})_{v\in\mathbf{Q},\geq 0}$ を定義すればよい. 以下 $F\to F^v_{\log}$ の定義を簡単に説明する.

K の有限次拡大 L や分離閉包 $\bar{K}$ の整数環 $O_L, O_{\bar{K}}$ は自然な log 構造をもつ. $O_{\bar{K}}$ の log 構造は商環 $O_{\bar{K}}/m^v$ の log 構造をひきおこす. 以下これらの環はこの log 構造をもつものとし, $X=\mathrm{Spec}\ O_L$ を log スキームと考える. $F(L)$ は log スキーム X の $O_{\bar{K}}$ 値点の集合 $X(O_{\bar{K}})$ と等しい. P を O_K 上 log スムースな log スキームとし, $X\to P$ を exact な閉埋め込みとする. 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc} F(L)=X(O_{\bar{K}}) & \longrightarrow & \mathcal{X}^v_{\log} & \longrightarrow & P(O_{\bar{K}}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & X(O_{\bar{K}}/m^v) & \longrightarrow & P(O_{\bar{K}}/m^v). \end{array}$$

ここで $\mathcal{X}^v_{\log}$ はファイバー積として定義し, それが下部集合であるようなアフィノイド多様体と同一視する. たての射 $P(O_{\bar{K}})\to P(O_{\bar{K}}/m^v)$ のファイバーは連結であることが示せる. 第 2 節と同様に, 連結成分の集合 $\pi_0(X(O_{\bar{K}}/m^v))$ が定義できるとすると, それはアフィノイド多様体 $\mathcal{X}^v_{\log}$ の連結成分の集合 $\pi_0(\mathcal{X}^v_{\log})$ と標準的に同一視できるはずである. この集合 $\pi_0(\mathcal{X}^v_{\log})$ は実際 L と v だけで定まり, 閉埋め込み $X\to P$ のとりかたにはよらないことが示せる. そこで $F^v_{\log}(L)=\pi_0(\mathcal{X}^v_{\log})$ とおき, 関手 $F^v_{\log}$ を定める. 上の図式の射 $F(L)\to\mathcal{X}^v_{\log}$ は, 関手の射 $F\to F^v_{\log}$ をひきおこす. このようにして, 関手の射の族 $(F\to F^v_{\log})_{v\in\mathbf{Q},\geq 0}$ が定義される. これが補題の条件 (1),(2) をみたすことも上と同様に示せる. 詳細は省略する.

References

[1] A. ABBES-T. SAITO, *Ramification of local fields with imperfect residue fields I*, preprint, Univ. of Tokyo, 2000.

[2] P. DELIGNE, *Les corps locaux de caractéristique p limites de corps locaux de caractéristique* 0, in *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Travaux en Cours, Hermann Paris, 1984.

[3] K. KATO, *Swan conductors for characters of degree one in the imperfect residue field case*, Contemporary Math. **83** (1989), 101-131.

[4] J.–P. SERRE, Corps locaux, Hermann Paris, 1968.