斎藤　毅「**微積分**」東京大学出版会

微積分は世界へつながる扉です。数学を専門にするならもちろんですが、そうでなくても数学を使おうとするなら文系、理系にかかわらず、微積分なしですますことはできません。高校では1変数の関数だけでしたが、大学の微積分では多変数関数も扱えるようになって、世界がいちだんと広がります。

大学の微積分では、論理がしめる比重の大きいことにとまどうかもしれません。微積分は英語ではcalculusという計算とも訳されることばです。高校までなら、計算が正しくできれば数学ができるといえたでしょう。大学の微積分が計算だけですまないのは、それが連続関数とは何か、実数とは何かという、もっと基本的な問題にも答えるものだからです。微積分でそんなことまでやらなくてもいいのでは、と思われるでしょうか？

数学の辞書には、だいたい正しいということばはありません。正しいとされることはどんなときにもなりたたなければならず、1つでもあてはまらない場合があればそれは正しいこととはいえません。高校の教科書では関数の極限を、限りなく近づく、ということばを使って説明します。このようなあいまいなことばでは、上の規準をみたす厳密な論証はできません。

極限の概念をめぐる果てしない試行錯誤の末に人類がようやく手にしたのが、イプシロン・デルタ論法による連続関数の厳密な定義だったのです。それにしても、数学者がそこまで厳密さにこだわるのはどうしてなのでしょう。

現代からふりかえってみると、19世紀の数学者を悩ませた大問題は、関数の各点ごとでの局所的（ローカル）な性質からどうすれば定義域全体にわたる大域的（グローバル）な性質を導きだせるのかというものでした。連続関数の定義を手にした数学者は、その積分の定義も同時に手に入れたと考えました。ところがそこには、局所と大域を隔てる深い断絶を見落とすという根本的

な欠陥がありました。微積分の基礎づけに厳密な論理が欠かせないことは、このような問題を解決していくなかでだんだんと深くそして広く理解されていったのです。

この欠陥を埋めるには、実数とは何かを明確にすることが必要でした。$\sqrt{2}$ は高校で学んだとおり有理数ではありません。円周率 π や自然対数の底 e も実はそうです。といっても、このような有理数ではない数が実数としては存在するとはどういう意味なのでしょう。

$\sqrt{2}$ が有理数ではないことに気づいた古代ギリシャの数学者はこの問題に悩まされました。これを解決したエウドクソスの理論は、古代ギリシャ数学を体系的に集大成したユークリッド「原論」の核心にあります。１９世紀の末にこの問題を現代的な形に解決したデデキントは、その理論をそのままとりこむことができたのです。

局所と大域をめぐるこうした問題を解決していくなかからコンパクト性とよばれる現代の数学のもっとも重要な概念も姿を現してきたのでした。厳密さへのこだわりは、数学の新しい世界へつながる扉でもあったのです。「微積分」の中でコンパクト性までは解説できなかったので、それは「集合と位相」(東京大学出版会)にゆずりました。局所と大域をめぐる問題は、現在では微積分に限らず数学のどこにでもでてきます。

微積分の教科書には名著とよばれるものが、高木貞治「解析概論」(岩波書店)、小平邦彦「解析入門 I・II」(岩波書店)、杉浦光夫「解析入門 I・II」(東京大学出版会) をはじめいくつもあります。その二番煎じを書いても意味がないので、自分だったらこんな教科書で勉強したかったという本をコンパクトに書きました。ここで紹介した微積分の基礎をめぐる基本的な問題にも、現代的な視点からのこたえを用意してあります。