2008年度第4学期 **集合と位相 期末試験問題**

3月5日 (木) 9:00-12:00 (180分) 斎藤 毅

・問題用紙　1枚、解答用紙　1枚（4ページ)、計算用紙1枚

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

注意：答だけを書くのではなく，それが確かに答になっている理由もくわしく書いて下さい。答があっていても，説明が不十分だと，減点されます。また,「明らか」という言葉は使わずに，説明して下さい．なるべく読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

$\mathbb{R}^n$ はふつうの位相により位相空間と考える．$\mathbb{N}$ は自然数全体の集合 $\{0,1,2,\ldots\}$ を表わす. 開うめこみとは，開部分空間への同相写像のことである.

問題1　（解答用紙の1ページめに記入してください）

(1)　X を位相空間とし，A を部分集合とする．A がコンパクトであるということの定義を，次のことばを必ず使って書け.（この小問は，答だけでよい.）

必ず使うことば：任意の，存在する，開集合，族，有限.

（講義での「コンパクト」の定義です．教科書では「準コンパクト」の定義になります.）

以下，$X=\mathbb{R}$ とし，部分集合 A を $A=\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N},\ n>0\}\cup\{0\}$ で定める.

(2)　A は (1) で与えた定義の条件をみたし，したがってコンパクトであることを示せ.

(3)　A の巾集合の部分集合 $\mathcal{U}=\{U\in P(A)\mid A$ の部分空間としての位相に関して，U は 0 の開近傍$\}$ は，可算であることを示せ.

問題2　（解答用紙の2ページめに記入してください）

$S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\}$ と $D^2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leq 1\}$ を，$\mathbb{R}^2$ の閉部分空間とする．$X=S^1\times[0,1]$ を積空間とし，X の開集合 U と閉集合 A を，それぞれ $U=S^1\times[0,1)$ と $A=S^1\times\{0\}$ で定める．X の部分集合 A を一点につぶして得られる空間を $\overline{X}$ で表わし，U の部分集合 A を一点につぶして得られる空間を $\overline{U}$ で表わす.

(1)　連続写像 $f\colon X\to\mathbb{R}^2$ を，$f((x,y),t)=(tx,ty)$ で定める．f は同相写像 $\bar{f}\colon\overline{X}\to D^2$ をひきおこすことを示せ.

(2)　f の U への制限 $g\colon U\to\mathbb{R}^2$ は，開うめこみ $\bar{g}\colon\overline{U}\to\mathbb{R}^2$ をひきおこすことを示せ.

問題3　（解答用紙の3ページめに記入してください）

集合 $X=\{$ 開区間 $(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}\cup\{\emptyset\}$ の距離 d を,

$$d(A,B)=\frac{1}{2}\times\begin{cases}((A\cup B\text{ の長さ})-(A\cap B\text{ の長さ})) & A\cap B\neq\emptyset\text{ のとき}\\ ((A\text{ の長さ})+(B\text{ の長さ})) & A\cap B=\emptyset\text{ のとき}\end{cases}$$

で定める．$f\colon\mathbb{R}\times(0,\infty)\to X$ を，対 (x,s) を開区間 $(x-s,x+s)$ にうつす写像とする.

(1)　$(x,s)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$ と実数 $r>0$ に対し，r 近傍の逆像 $f^{-1}(U_r(f(x,s)))$ を図示せよ.

(2)　$\mathbb{R}\times(0,\infty)$ を $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間と考える．f は開うめこみであることを示せ.

(3)　X の点列 (A_n) がコーシー列なら，数列 $d(A_n,\emptyset)$ もコーシー列であることを示せ.

(4)　距離空間 (X,d) は完備であることを示せ.

問題4　（解答用紙の4ページめに記入してください）

3次正方行列の空間 $M(3,\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^9$ と同一視し，$SO(3,\mathbb{R})=\{A\in M(3,\mathbb{R})\mid {}^t\!AA=I,\ \det A=1\}$ を，$M(3,\mathbb{R})$ の部分空間と考える．$SO(3,\mathbb{R})$ は連結であることを示せ.

略解　**1** (1) $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ をみたす，X の開集合の任意の族 $(U_i)_{i\in I}$ に対し，I の有限部分集合 J で，$A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$ をみたすものが存在する．

(2) $\mathbb{R}$ の開集合の族 $(U_i)_{i\in I}$ が $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ をみたすとする．$0 \in U_{i_0}$ をみたす $i_0 \in I$ が存在し，$U_r(0) \subset U_{i_0}$ をみたす実数 $r > 0$ が存在する．n を $m < \frac{1}{r}$ をみたす最大の自然数 m とし，$k = 1, \dots, n$ に対し，$\frac{1}{k} \in U_{i_k}$ をみたす $i_k \in I$ をとれば，$A \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$ であり，$J = \{i_0, i_1, \dots, i_n\}$ は I の有限部分集合である．

(3) 写像 $f\colon \mathcal{U} \to P(A)$ を $f(U) = A \setminus U$ で定めると，f は単射であり，像は $F(A) = \{S \in P(A) \mid S$ は有限集合$\}$ の部分集合である．A は可算だから，$F(A)$ も可算である．したがって，$\mathcal{U}$ も可算である．

2 (1) $X = S^1 \times [0,1]$ はコンパクトで，D^2 はハウスドルフだから，連続全単射 $\bar{f}\colon \overline{X} \to D^2$ は同相写像である．

(2) $q\colon X \to \overline{X}$, $q_0\colon U \to \overline{U}$ を商写像とし，$i\colon \overline{U} \to \overline{X}$ を包含写像とする．V を $\overline{U}$ の開集合とすると，$q^{-1}(i(V)) = q_0^{-1}(V)$ は X の開集合だから，$i(V)$ は $\overline{X}$ の開集合である．よって，連続単射 $i\colon \overline{U} \to \overline{X}$ は，開写像であり，開うめこみである．(1) より $\bar{f}$ は同相写像だから，$\bar{g}$ はうめこみである．$g(U) = U_1(0,0)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合だから，$\bar{g}$ は開うめこみである．

3 (1) $|x-y| < s+t$ のときは，

$$2 \cdot d(f(x,s), f(y,t)) = 2\max(2s, 2t, s+t+|x-y|) - (2s+2t) = 2\max(|s-t|, |x-y|)$$

である．$|x-y| \geq s+t$ のときは，$2 \cdot d(f(x,s), f(y,t)) = 2s+2t$ である．よって，

$$f^{-1}(U_r(f(x,s))) = \begin{cases} U_r(x) \times U_r(s) & r \leq s \text{ のとき} \\ (U_r(x) \times U_r(s)) \cup (\mathbb{R} \times (0, r-s)) & r > s \text{ のとき} \end{cases}$$

である．

(2) $r < s$ ならば $f^{-1}(U_r(f(x,s))) = U_r(x) \times U_r(s)$ かつ $f(U_r(x) \times U_r(s)) = U_r(f(x,s))$ だから，単射 f は連続開写像であり，開うめこみである．

(3) $|d(A,\emptyset) - d(B,\emptyset)| \leq d(A,B)$ だから，(A_n) が X のコーシー列なら，$d(A_n,\emptyset)$ もコーシー列である．

(4) (A_n) を X のコーシー列とし，$s_n = d(A_n, \emptyset)$, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ とする．$s = 0$ ならば，(A_n) は $\emptyset$ に収束する．

　$s > 0$ とする．n_0 を $m, m' \geq n$ なら $s_m \geq \frac{s}{2}$ かつ $d(A_m, A_{m'}) \leq \frac{s}{2}$ となる最小の自然数 n とする．$m \geq n_0$ なら $A_m = f(x_m, s_m)$ とおく．$m, m' \geq n_0$ なら $s_m + s'_m \geq s$ だから，$d(A_m, A_{m'}) = \max(|x_m - x_{m'}|, |s_m - s_{m'}|)$ である．よって，(x_n) もコーシー列であり，(A_n) は $f(\lim_{n\to\infty} x_n, s)$ に収束する．

4 $A \in SO(3,\mathbb{R})$ とすると，1 は A の固有値である．x を長さ 1 の固有ベクトルとし，x, y, z を正規直交基底，P を x, y, z をならべて得られる直交行列とする．基底 x, y, z に関する A の行列表示 ${}^tPAP$ は，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$，$B \in SO(2,\mathbb{R})$ である．連続写像 $f_P\colon SO(2,\mathbb{R}) \to SO(3,\mathbb{R})$ を，$f_P(X) = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} {}^tP$ で定める．$SO(2,\mathbb{R})$ は S^1 と同相だから弧状連結であり，$I, A \in f_P(SO(2,\mathbb{R}))$ は $SO(3,\mathbb{R})$ の同じ連結成分の元である．A は $SO(3,\mathbb{R})$ の任意の元だから，$SO(3,\mathbb{R})$ は連結である．