2008 年度第 4 学期 集合と位相 追試験問題

7 月 28 日 (火) 13:30-15:30 (120 分) 斎藤 毅

・問題用紙　1 枚、解答用紙　1 枚（4 ページ)、計算用紙 1 枚

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

注意：答だけを書くのではなく，それが確かに答になっている理由もくわしく書いて下さい。答があっていても，説明が不十分だと，減点されます。また,「明らか」という言葉は使わずに，説明して下さい．なるべく読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください．

$\mathbb{R}^n$ はふつうの位相により位相空間と考える．$\mathbb{N}$ は自然数全体の集合 $\{0, 1, 2, \dots\}$ を，$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合 $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ を表わす.

問題 1　（解答用紙の 1 ページめに記入してください）

(1)　X を位相空間とし，A を部分集合とする．A がコンパクトであるということの定義を，次のことばを必ず使って書け.（この小問は，答だけでよい.）

必ず使うことば：任意の，存在する，開集合，族，有限.

（講義での「コンパクト」の定義です．教科書では「準コンパクト」の定義になります.）

(2)　$\mathbb{R}$ の部分集合 A を，$A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N},\ n > 0\}$ で定める．A は (1) で与えた定義の条件をみたさないことを示し，したがって A はコンパクトでないことを示せ.

問題 2　（解答用紙の 2 ページめに記入してください）

可逆写像 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ を 1 つ与え，その逆写像を求めよ．それが確かに逆写像であることも証明せよ.

問題 3　（解答用紙の 3 ページめに記入してください）

$X = [0, 1] \times \{0, 1\}$ を $\mathbb{R}^2$ の部分空間とし，X の閉集合 $A = \{0\} \times \{0, 1\}$ を一点につぶして得られる空間を $\overline{X}$ とする．連続写像 $f\colon X \to \mathbb{R}$ を，$f(x, 0) = x,\ f(x, 1) = -x$ で定める.

f は，閉うめこみ（閉部分空間への同相写像）$\bar{f}\colon \overline{X} \to \mathbb{R}$ をひきおこすことを示せ.

問題 4　（解答用紙の 4 ページめに記入してください）

X を集合 $[0, 2\pi)$ とし，関数 $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ を，

$$d(x, y) = 2 \sin \left| \frac{x - y}{2} \right|$$

で定める.

(1)　d は X の距離であることを示せ.

(2)　等長写像 $f\colon X \to \mathbb{R}^2$ で，$f(0) = (1, 0),\ f(\pi) = (-1, 0)$ をみたすものを，1 つ求めよ.

(3)　距離空間 (X, d) は完備であることを示せ.

略解　**1** (1) $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ をみたす，X の開集合の任意の族 $(U_i)_{i\in I}$ に対し，I の有限部分集合 J で，$A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$ をみたすものが存在する．

(2) $\mathbb{R}$ の開集合の族 $(U_n)_{n>0}$ を，$U_n = (\frac{1}{2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}), \frac{1}{2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}))$ で定める．$\frac{1}{n} \in U_n$ だから，$A \subset \bigcup_{n>0} U_n$ である．$A \cap U_n = \{\frac{1}{n}\}$ だから，$I = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}$ の部分集合 J が $A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$ をみたすならば，$J = I$ であり，J は無限集合である．

2 自然数 n に対し，k を $k^2 \leq n$ をみたす最小の自然数とし，

$$f(n) = \begin{cases} (n-k^2-k, n-k^2) & k^2 \leq n \leq k^2+k \text{ のとき,} \\ (n-k^2-k, k^2+2k-n) & k^2+k \leq n \leq k^2+2k \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める．

$(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ に対し，$g(m,n) = m+(|m|+|n|)^2+(|m|+|n|)$ とおいて写像 $g\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を定めれば，g は f の逆写像である．

3 X はコンパクトで，$\mathbb{R}$ はハウスドルフだから，連続全単射 $\bar{f}$ は閉うめこみである．

4 (1) と (2) 単射 $f\colon X \to \mathbb{R}^2$ を，$f(x) = (\cos x, \sin x)$ で定める．$d(x,y) = d(f(x), f(y))$ だから，d は X の距離であり，f は等長写像である．

(3)　$f(X) = S^1$ はコンパクトだから，完備である．