試験

1997 年度 集合と位相 試験問題 (1998.3.3, 9:00-12:10)

注意：答案用紙 1 枚目表裏にそれぞれ問題 1 と 2, 2 枚目表裏にそれぞれ問題 3 と 4 を解答してください。足りない場合には他の面の余白を使って結構です。

解答の文の論理的なつながりや, 論証の中で使った定理, 命題などをできる限り明確になるように記述してください。この点が不十分な場合は大きく減点されることがあります。

以下の問題中では, $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ はふつうの位相をもつものとし, 区間 $[0,1), [0,1]$, 単位円周 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2=1\}$, 単位球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2=1\}$ 等はそれぞれ部分空間としての位相をもつものとする。

問題 1. 半開区間 $[0,1)$ から S^1 への写像 $f:[0,1) \to S^1$ を $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ でさだめる。

(1) 写像 f が連続であることを示せ.

(2) 写像 f は位相同型でないことを示せ。

問題 2. $X = C([0,1], \mathbb{R}) = \{f | f:[0,1] \to \mathbb{R}$ は連続関数 $\}$ とおく。X の部分集合 A, X 上の距離 d_∞, d_1 をそれぞれ

$$A = \{f \in X | f \text{ のグラフは折線で，折れ曲り点の } x \text{ 座標, } y \text{ 座標はともに有理数 } \}$$

$$d_\infty(f,g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|, \qquad d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

で定める。

(1) 集合 A は可算集合であることを示せ.

(2) 距離 d_∞ が定める X の位相に関して, A の X での閉包 $\bar{A}$ は X となることを示せ.

(3) X の恒等写像 $id_X : X \to X$ は, 距離空間 (X, d_1) から (X, d_∞) への写像として連続でないことを示せ。

問題 3. 集合 $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ 上の同値関係 $\sim$ を

「$(x,y) \sim (x',y')$ とは，*0* でない実数 $t \neq 0$ で $x' = tx, y' = ty$ を満たすものが存在すること」

により定める。

(1) 同値関係 $\sim$ の完全代表系を 1 つ求めよ。

(2) $\mathbb{R}^2$ の部分空間 X の商位相空間 $Y = X/\sim$ はコンパクト (=準コンパクト+分離) であることを示せ。

問題 4. $\mathbb{R}^2$ の一点コンパクト化は，*2* 次元球面 S^2 と同相であることを示せ。

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

集合と位相 試験問題略解

1.(1) 各成分 $\cos, \sin$ は連続だから $f : [0,1) \to \mathbb{R}^2$ は連続。S^1 の位相は部分空間としての位相だから連続。

(2) S^1 はコンパクトだが $[0,1)$ はコンパクトでないから同相でない.

2(1).

$$A_n = \{f \in A | f \text{ のグラフの折れ曲り点の } x \text{ 座標の } n \text{ 倍は整数で } y \text{ 座標は有理数 }\}$$

とおくと、$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ は可算集合の可算個の合併だから可算集合。

(2) $\bar{A} = X$ を示す。$f \in X, \epsilon > 0$ とし, $U_\epsilon(f) \cap A \neq \emptyset$ を示せばよい。f は一様連続だから $|x-y| \leq \frac{1}{n}$ なら $|f(x) - f(y)| < \epsilon/3$ となる自然数 n が存在する。整数 $0 \leq k \leq n$ にたいし、有理数 a_k を $|f(\frac{k}{n}) - a_k| < \epsilon/5$ を満たすようにとる。折線関数 $g \in A_n$ を $g(\frac{k}{n}) = a_k (k = 0, 1, \dots, n)$ により定める。$d_\infty(f,g) < \epsilon$ を示せばよい。これは $\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$ とすると

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(\frac{k}{n})| + |f(\frac{k}{n}) - g(\frac{k}{n})| + |g(\frac{k}{n}) - g(x)| < \frac{2}{5}\epsilon + |a_{k+1} - a_k|$$
$$|a_{k+1} - a_k| \leq |a_{k+1} - f(\frac{k+1}{n})| + |f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n})| + |f(\frac{k}{n}) - a_k| < \frac{3}{5}\epsilon$$

だからよい。

(3) X の点列 $(f_n)_n$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

と定義すると、これは d_1 では 0 に収束するが d_∞ では 0 に収束しない。したがって id_X は連続でない。

3(1). $\{(\cos t, \sin t) | 0 \leq t < \pi\}$.

(2). 包含写像 $S^1 \to X$ と標準全射 $X \to Y$ との合成は連続全射で S^1 はコンパクトだから Y も準コンパクト。

$$Y \to S^1 : \overline{(x,y)} \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2}(x^2 - y^2, 2xy)$$

は連続単射で S^1 は分離だから Y も分離。

4. $S^2 - \{(0,0,1)\}$ は $\mathbb{R}^2$ と全単射

$$(x,y,z) \mapsto (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$$

(逆写像は $(x,y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+1}(2x, 2y, x^2+y^2-1)$) により同相。$S^2$ はコンパクトだから $\mathbb{R}^2$ の一点コンパクト化は，S^2 と同相。

試験 A

1997 年度 4 学期 集合と位相 試験問題 (1998.3.3, 9:00-12:10, 1312 室)

注意：答案用紙 1 枚目表裏にそれぞれ問題 1 と 2, 2 枚目に問題 3 を解答してください。足りない場合には他の面の余白を使って結構です。

解答の文の論理的なつながりや, 論証の中で使った定理, 命題などをできる限り明示してください。この点が不十分な場合は大きく減点されることがあります。

以下の問題中では, $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ はふつうの位相を, 区間 $[0,1]$, 円周 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$, 球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ はそれぞれ部分空間としての位相をもつものとする。

問題 1. *disjoint union* $X = \mathbb{R}^2 \amalg \{\infty\}$ の位相および写像 $f : X \to S^2$ を次のように定める。

「$U \subset X$ が開集合であるとは, 次の条件 *(a), (b)* が両方とも満たされること

(a) $U \cap \mathbb{R}^2$ が $\mathbb{R}^2$ の開集合

(b) $\infty \in U$ なら $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > M\} \subset U$ となるような実数 M が存在する。」

$$f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
$$f(\infty) = (0,0,1)$$

(1) 写像 f が全単射であることを示せ。

(2) 位相空間 X は準コンパクトでないことを示せ。

(3) f の逆写像 g は連続でないことを示せ。

(4) 写像 f は連続であることを示せ。

(5) 位相空間 X は分離であることを示せ。

問題 2. 集合 $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ 上の同値関係 $\sim$ を次のように定める。

「$(x,y) \sim (x',y')$ とは, *0* でない実数 $t \neq 0$ で $x' = tx, y' = ty$ を満たすものが存在すること」

(1) 同値関係 $\sim$ の完全代表系を 1 つ求めよ。

(2) $\mathbb{R}^2$ の部分空間 X の同値関係 $\sim$ による商位相空間 $X/\sim$ を Y とする。写像

$$f : Y \to S^1; \quad f\left(\overline{(x,y)}\right) = \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \frac{2xy}{x^2+y^2} \right)$$

は同相写像であることを示せ。

問題 3. $X = C([0,1], \mathbb{R}) = \{f | f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は連続関数 $\}$ とおく。X の部分集合 A, X 上の距離 d をそれぞれ次のように定める。

$$A = \{f \in X | f \text{ のグラフは有限個の線分の合併で各線分の端点の } x \text{ 座標, } y \text{ 座標はともに有理数} \}$$

$$d(f,g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

(1) 集合 A は可算集合であることを示せ.

(2) 距離 d が定める X の位相に関して, A の X での閉包 $\bar{A}$ は X となることを示せ.

集合と位相 試験問題略解

1. (1) 写像 $g : S^2 \to X$

$$g(x,y,z) = \begin{cases} (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}) & (x,y,z) \neq (0,0,1) \\ \infty & (x,y,z) = (0,0,1) \end{cases}$$

は f の逆写像を与えるから f は全単射。

(2) X の開被覆 $\left(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > M\} \cup \{\infty\}\right)_{M \in \mathbb{R}}$ は有限な部分被覆をもたないから X は準コンパクトでない。

(3) $g : S^2 \to X$ は全射で S^2 はコンパクトだから，g が連続なら X は準コンパクトとなるが，これは (2) に反する。

(4) V を S^2 の開集合とし, その逆像 $U = f^{-1}(V)$ が X の開集合であることを示す。f の $\mathbb{R}^2$ への制限は各成分が有理式だから連続。したがって $U \cap \mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合。$\infty \in U$ すなわち $(0,0,1) \in V$ とすると, $\{(x,y,z) \in S^2 | 1 - z < \epsilon\} \subset V$ となる実数 $\epsilon > 0$ が存在する。$M = (2-\epsilon)/\epsilon$ とおけば $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > M\} \subset U$ となるから U は開集合。

(5) $f : X \to S^2$ は連続単射で S^2 は分離だから X は分離。

2(1). 例えば $\{(\cos t, \sin t) | 0 \leq t < \pi\}$.

(2). f は連続写像

$$X \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \frac{2xy}{x^2 + y^2}\right)$$

によりひきおこされるから連続。f の逆写像 g の開集合 $S^1 - \{(1,0)\}, S^1 - \{(0,1)\}$ への制限はそれぞれ

$$g(s,t) = \overline{(1+s,t)}, \quad \overline{(t, 1-s)}$$

で与えられ, 標準全射 $X \to Y$ は連続だから g も連続。よって f は同相写像。

3(1). $A_n = \{f \in A | f$ のグラフは n 個の線分の合併 $\}$ とおくと, $A_n \subset \mathbb{Q}^{2n}$ は可算集合で, $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ は可算集合の可算個の合併だから可算集合。

(2) $\bar{A} = X$ を示す。$f \in X, \epsilon > 0$ とし, $U_\epsilon(f) \cap A \neq \emptyset$ を示せばよい。f は一様連続だから $|x - y| \leq \frac{1}{n}$ なら $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{5}$ となる自然数 n が存在する。整数 $0 \leq k \leq n$ にたいし、有理数 a_k を $|f(\frac{k}{n}) - a_k| < \frac{\epsilon}{5}$ を満たすようにとる。関数 $g \in A$ を g のグラフが n 個の線分 $\overline{(\frac{k-1}{n}, a_{k-1})(\frac{k}{n}, a_k)}, (k = 1, \ldots, n)$ の合併となるように定める。$d(f,g) < \epsilon$ を示せばよい。これは $x \in [0,1]$ に対し $\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$ となる k をとると,

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(\frac{k}{n})| + |f(\frac{k}{n}) - g(\frac{k}{n})| + |g(\frac{k}{n}) - g(x)| < \frac{2}{5}\epsilon + |a_{k+1} - a_k|$$

$$|a_{k+1} - a_k| \leq |a_{k+1} - f(\frac{k+1}{n})| + |f(\frac{k+1}{n}) - f(\frac{k}{n})| + |f(\frac{k}{n}) - a_k| < \frac{3}{5}\epsilon$$

だからよい。

追試　1997 年度 4 学期 集合と位相 追試験問題 (1998.7.23, 13:30-15:30, 117 講義室)

注意：答案用紙 1 枚ごとに、問題を 1 問づつ解答してください。足りない場合には他の面の余白を使って結構です。

解答の文の論理的なつながりや, 論証の中で使った定理, 命題などをできる限り明示してください。この点が不十分な場合は大きく減点されることがあります。

以下の問題中では, $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ はふつうの位相を, 半開区間 $(0,1]$, 閉区間 $[0,1]$ はそれぞれ $\mathbb{R}$ の部分空間としての位相をもつものとする。

問題 1. *disjoint union* $X = \mathbb{R}^2 \amalg \{\infty\}$ の位相および写像 $f : X \to \mathbb{R}^2$ を次のように定める。

「$U \subset X$ が開集合であるとは, 次の条件 *(a), (b)* が両方とも満たされること

(a) $U \cap \mathbb{R}^2$ が $\mathbb{R}^2$ の開集合

(b) $\infty \in U$ なら $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| > M\} \subset U$ となるような実数 M が存在する。」

$$f(x,y) = \left(\frac{2w(x)}{w(x)^2 + y^2} - 1, \frac{2y}{w(x)^2 + y^2} \right) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

$$\text{ただし } w(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} + 3 \right) \quad x \neq 0, w(0) = 0,$$

$$f(\infty) = (-1, 0)$$

(1) 写像 f は単射であることを示し, その像 $Y = f(X)$ を求め, 図示せよ。

つぎの *(2)-(5)* の問いについて，そうなるならそのことを、そうならないならそうならないということを証明せよ。

(2) 位相空間 X は準コンパクトか？

(3) 位相空間 X は分離か？

(4) 写像 $f : X \to \mathbb{R}^2$ は連続か？

(5) f の像 $Y = f(X)$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間としての位相をもつものとする。$f : X \to Y$ は同相写像か？

問題 2. $X = \{f \mid f : (0,1] \to [-1,1]$ は連続関数 $\}$ とおく。X の部分集合 A, X 上の距離 d をそれぞれ次のように定める。

$$A = \{ f \in X \mid f \text{ のグラフは有限個の線分の合併で各線分の端点の } x \text{ 座標}, y \text{ 座標はともに有理数} \}$$

$$d(f,g) = \sup_{x \in (0,1]} |f(x) - g(x)|$$

(1) 集合 A は可算集合であることを示せ.

(2) 距離 d が定める X の位相に関して, A の X での閉包を $\bar{A}$ とおく. 関数 $f \in X$ が, $\bar{A}$ に属するための条件を, 極限 $\lim_{x\to 0} f(x)$ に関する条件として表せ.

(3) $\bar{A}$ に属さない関数 $f \in X$ の例を *1* つ挙げよ。