11/30 Serre weight

$\bar\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{F})$　$\mathbb{F}$: finite. $\ell = \mathrm{char}\,\mathbb{F}$.

連続絶対既約, odd.

$N(\bar\rho)$, $\varepsilon(\bar\rho)$, $k(\bar\rho)$.

$N(\bar\rho)$: ℓと素, $\bar\rho|_{I_p}, p\neq\ell$

$\varepsilon(\bar\rho)$: $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{F}^\times$, $\det\bar\rho|_{I_p}, p\neq\ell$

$k(\bar\rho)$: $\bar\rho|_{I_p}$, $p=\ell$

できまる.

$k \bmod (p-1)$ は $\det\bar\rho|_{I_p}$ できまる.

$p\neq\ell$　$\bar\rho|_{I_p}$ の conductor $\geq \det\bar\rho|_{I_p}$ の conductor.

$$\mathrm{Art}_p(\bar\rho|_{I_p}) = \sum_{\substack{r\in\mathbb{Q}\\ >0}} r \times (\bar\rho|_{I_p} \text{ の slope } r \text{ 部分の次元})$$

V　　$V^{G_{\mathbb{Q}_p}^{r+}}/V^{G_{\mathbb{Q}_p}^{r}}$

$$\Rightarrow \mathrm{Art} \geq \max(r ; \text{st } V^{G_{\mathbb{Q}_p}^{r}} \subsetneq V).$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \ \vee\!|$

$$\mathrm{Art}\det\bar\rho = \max(r ; \text{s.t. } \det\bar\rho(G_{\mathbb{Q}_p}^{r}) \neq 1)$$

$p=\ell$. $2 \leq k(\bar\rho) \leq p^2-1$ $(p\neq 2)$ の定義

$\bar\rho|_{I_p}$ の分類　$\psi_n : I/p \simeq \hat{\mathbb{Z}}'(1) = \varprojlim_{p\nmid m} \mu_m \to \mu_{p^n-1} = \mathbb{F}$

1) $\bar\rho|_{I_p} \simeq \psi_2^{a+pb} \oplus \psi_2^{b+pa}$　$0 \leq a < b \leq p-1$.

$\psi_2^{p+1} = \psi_1$

admissible filtered φ-mod.

Gal表現　　$G_{\mathbb{Q}_p}$ から I_p へ制限

fil mod　　$\mathbb{F}_p$ から $\bar{\mathbb{F}}_p$ へ係数拡大.

$M(h, i)$　$i = (a, b)$　　$i : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n = 2$

$M \to V(M)$　　$\dim_k M = \dim_{\mathbb{F}_p} V(M)$

2) $\psi_1 = \chi$ mod p cyclotomic

$$\bar{\rho}|_{I_p} \simeq \chi^a \oplus \chi^b \qquad 0 \leq a, b < p-1.$$

3) $0 \to \chi^{\beta} \to \bar{\rho}|_{I_p} \to \chi^{\alpha} \to 0$　　ext は non-trivial.

- $2 \leq k(\bar{\rho}) \leq p-1$ となるための必要条件. ← mod p の p進Hodge.

$k \leq p-1$.　$H^1(\text{mod. curve}, \mathrm{Sym}^{k-2})$　$k-1$次元の質の依存 $k-1 \leq p-1$.

1) 条件は $a = 0$.　そのとき $b = k-1$ だから, $k(\bar{\rho}) = b+1$
$2 \leq \quad \leq$

2) 条件は $0 = a < b$　そのとき $b = k-1$　　$k(\bar{\rho}) = b+1$
$2 \leq \cdots \leq p+1$

3) $\{\alpha, \beta\} = \{0, k-1\}$

$$\mathrm{Ext}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\chi^{\alpha}, \chi^{\beta}) = \mathrm{Ext}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(1, \chi^{\beta-\alpha}),\quad i = \beta - \alpha$$

χ^i の表現空間 $\mathbb{F}_p(i)$

$$= H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(i)).$$

$$\chi(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(i)) = \dim H^0 - \dim H^1 + \dim H^2$$

Tate duality

$$H^2 \cong H^0(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(1-i))$$

$$= -\dim \mathbb{F}_p(i) = -1$$

Tate.

$p \neq 2$.

$$\dim H^1 = 1 + \underbrace{\dim H^0}_{\begin{cases} 1 & i=0 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}} + \underbrace{\dim H^0(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(1-i))}_{\begin{cases} 1 & i=1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}}$$

$$= \begin{cases} 2 & i = 0, 1 \\ 1 & \text{それ以外} \end{cases}$$

mod $p-1$ で.

$$0 \to H^1(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \to H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p) \to \text{分岐} \to 1$$

$H^1(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$: 1次元; $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p)$: 2次元

$H^1_f(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(i))$

$$0 \to \mathbb{Z}_p^\times / (\mathbb{Z}_p^\times)^p \to H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(1)) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 1$$

$\mathbb{Z}_p^\times / (\mathbb{Z}_p^\times)^p$: 1次元 $(p \neq 2)$

$$H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(1)) = \mathbb{Q}_p^\times / (\mathbb{Q}_p^\times)^p$$

$$\text{"}H^1_f(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(i))\text{"} = \mathrm{Im}\left(\mathrm{Ext}^1_{MF^a_{\mathbb{Q}_p}}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p(i)) \to H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(i)\right.$$

$$\dim H^0 - \dim H^1_f = \underbrace{\dim \mathbb{F}_p(i)}_{1} - \underbrace{\dim \mathrm{Fil}^1(\mathbb{F}_p(i))}_{\{1, 0\}}$$

$$\dim H^1_f = \begin{cases} 1 & i \geq 0 \\ 0 & i < 0. \end{cases}$$

	$\dim H^1$	$\dim H^1_f$
$i=0$	2	1
$i=1$	2	1
$i<0$	1	0
$i>1$	1	1

3) $\bar{\rho}|_{I_p} = \begin{pmatrix} \chi^\beta & * \\ 0 & \chi^\alpha \end{pmatrix}$ non trivial ext.

条件は $\alpha = 0$ $\quad \beta = k-1$, $k \geq 3$ ならいつもOK

$\beta < p-1$

$3 \leq k \leq p-1$.

$k=2$ のとき

$[\bar{\rho}] \in H^1_f(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(1))$ が条件

$\beta = 0$ $\quad (k=1)$ はだめ.

$\alpha = 0$ のとき $\quad \beta \geq 2$ なら $k = \beta + 1$ とおく. $3 \leq k \leq p-1$

$\beta = 1$ のとき $\in H^1_f$ のとき finite, flat, peu ramifié

$k=2$,

そうでないとき $\quad k = p+1$ とお

$\beta = 0$ のとき $\quad k = p$ とおく.

— 一般の場合. θ-cycle.

$\bar{\rho}$ を円分指標の中で twist.

χ mod p 円分指標 $\quad \bar{\rho} \otimes \chi$

$$\overset{\shortparallel}{\psi_2^{1+p}}$$

1) $(a, b) \mapsto (a+1, b+1)$

2) $(a, b) \mapsto (a+1, b+1)$

3) $(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha+1, \beta+1)$.

$\chi \otimes f$ k をαごとに N をふやす. $\quad f = \sum a_n q^n$

$$\chi \cdot f = \sum \chi(n) a_n q^n$$

θf $\quad k$ を $p+1$ ふやす. N はかわらない.

$$\theta f = q \frac{d}{dq} f = \sum a_n n q^n$$

$$\chi(n) \equiv n \mod p.$$

1) $\quad a, b$ のとき, $\quad k = 1 + pa + b$ とおく.

2) $\quad$ 〃 $\quad$ 〃 $\quad$ ただし

$a = b = 0$ のときは $k = p$ とおく.

3) $\bar{\rho}\big|_{I_p} = \begin{pmatrix} \chi^\beta & * \\ 0 & \chi^\alpha \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} 0 \leq \alpha < p-1 \\ 1 \leq \beta \leq p-1 \end{array}$ とおく.

$$a = \max(\alpha, \beta), \quad b = \overset{\min}{\cancel{\sup}}(\alpha, \beta).$$

$k = 1 + pa + b$ とおく. ただし

$\beta = \alpha + 1$ で $\chi^{-\alpha}\bar{\rho}$ が peu ramifié でないとき (très ram

さらに $+p-1$

$2 \leq k \leq p^2-1$ — 一般

$2 \leq k \leq p+1 \iff$ 1), 2) $a=0$ or 3) $\alpha=0$.

注意 $p=2,3$ $\bar{\rho}$ が $\mathrm{Ind}_{G_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}}^{G_{\mathbb{Q}}} \varphi$, $\mathrm{Ind}_{G_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}}^{G_{\mathbb{Q}}} \varphi$

のときには修正要？

Katz の mod form を使って修正

$k=1$ も許す. (Edixhoven)

Serre予想の帰結.

・compatible system の modularity ⇒ 志村・谷山 (⇒ F.L.T.)

数論的 Artin予想.

F 代数体, $\rho: G_F \to GL_n(\mathbb{C})$ 既約連続表現, $\neq 1$

$L(\rho, s)$ は全 s 平面の整関数に解析接続

(Artin予想)

$F=\mathbb{Q}$, $n=2$, ρ: odd のとき Serre予想から従う.

Prop Serre予想がなりたつとし, (ρ_λ) ℓ進表現の strict compatible system, 2次元, odd, 既約 Hodge-Tate weight $(0, k-1)$ とし, $k \geq 2$ とすると, wt k の eigen new form f で $(\rho_\lambda) = (\rho_{\lambda, f})$ となるものがある.

- 応用 $E/\mathbb{Q}$ 楕円曲線 $(T_\ell E)_\ell$

Propの証明

ほとんどすべての λ で $\bar{\rho}_\lambda = \rho_\lambda \bmod \lambda$ が既約なことを示す

$L = \{$ そうでない $\lambda\}$　L が無限として矛盾を示す.

$$\bar{\rho}_\lambda^{s.s.} = \chi_\lambda \oplus \chi'_\lambda$$

N　(ρ_λ) の conductor　$L \cap \{p \mid p \mid N\} = \phi$ とする.

$\bar{\rho}_\lambda$　$N\ell$ $(\lambda \mid \ell)$ 以外で不分岐

$\bar{\rho}_\lambda^{s.s.}$　$\bar{\rho}_\lambda^{s.s}|_{I_\ell} = 1 \oplus \chi^{k-1}$

mod ℓ 円分指標.

$\bar{\rho}_\lambda^{s.s} = \chi_\lambda \oplus \chi''_\lambda \chi^{k-1}$

χ_λ, χ''_λ の conductor の積 $= \bar{\rho}_\lambda$ の conductor

は ρ_λ の conductor をわりきる

$\Vert$

N

$(\mathbb{Z}/N)^\times$ の指標

なので,　$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to E^\times$

χ''

適当に拡大.

$\{\lambda \in L \mid \chi_\lambda \equiv \chi \bmod \lambda,\ \chi''_\lambda \equiv \chi'' \bmod \lambda\}$

が無限.

このとき, ほとんどすべての p で

$$Tr(\rho_\lambda(\varphi_p)) \equiv \chi(p) + \chi''(p)\, p^{k-1} \bmod \lambda.$$

したがって, $Tr(\rho_\lambda(\varphi_p)) = \chi(p) + \chi'(p) p^{k-1}$ で ρ_λ の既約性に反する.

$\lambda \notin L$ をとると、$\bar{\rho}_\lambda \equiv \rho_{f,\lambda}$ となる

level N, weight k の modular form f がある。

$S_k(\Gamma_1(N))$

$\exists f$ s.t. $\{\lambda \notin L \mid \bar{\rho}_\lambda \equiv \bar{\rho}_{f,\lambda}\}$ が無限。

$Tr(\rho_\lambda(\varphi_p)) \equiv a_p(f) \mod \lambda$ が

無限個の λ についてなりたつ。$Tr(\rho_\lambda(\varphi_p)) = a_p(f)$

よって $\rho_\lambda = \rho_{\lambda,f}$ //.