11/9. $\mathcal{A}^0(k) \subset \bigcup \Gamma\left((\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}) \times GL_2(\mathbb{A}_f)/GL_2(\mathbb{Q}), \omega^{\otimes k}\right)^K$

$K \subset GL_2(\mathbb{A}_f)$ open. cpt

cuspでの条件.

重さ $k \geq 2$ の正則保型形式の空間

$GL_2(\mathbb{A}_f)$ の表現　automorphic side.

$K = K_1(N) \longleftrightarrow \Gamma_1(N) \subset SL_2(\mathbb{Z})$

$\cap$

$GL_2(\hat{\mathbb{Z}})$　のとき $\mathcal{A}^0(k)^K = S_k(\Gamma_1(N))$

$\mathcal{A}^0(k) = \bigcup_K \mathcal{A}_0(k)^K$　smooth表現

$\mathcal{A}^0(k)^K$　有限次元　admissible

$\forall K \subset GL_2(\mathbb{A}_f)$

open cpt.

Peterson内積 $\Rightarrow$ $\mathcal{A}^0(k)$ semi-simple.

$$\mathcal{A}^0(k) = \bigoplus_{\pi : GL_2(\mathbb{A}_f)} \pi^{\oplus m_k(\pi)}$$

$\pi : GL_2(\mathbb{A}_f)$ の既約 adm. rep

$m_k(\pi) \neq 0 \Rightarrow 1$

multiplicity one theorem.

$\pi \subset \mathcal{A}^0(k)$ となる $GL_2(\mathbb{A}_f)$ の既約 adm 表現を

wt k の cuspidal 正則保型表現　automorphic side

$\updownarrow$ 1:1.

wt k の normalized eigen form

Global Langlands Corr for GL_2

$\updownarrow$ ← Serre 予想の帰結

(ρ_λ) $G_{\mathbb{Q}}$ の 2次元表現の compatible system　　Galois side

既約, odd　HT# $0, k-1$

G locally cpt 群 $(GL_2(\mathbb{A}_f), GL_2(\mathbb{Q}_p), \cdots)$

$\cup$

K open cpt subgp

$T(K) = \{ f : G \to \mathbb{C} \mid$ 両側 K-不変 + compact台 $\}$

$f(hgk) = f(g)\ \forall g \in G,\ h, k \in K$

Hecke algebra $= \mathbb{C}^{(K \backslash G / K)}$.

群環の類似　$K=1 \Rightarrow T(K) = \mathbb{C}[G]$

convolution で環（非可換かも）になる

$f, g \in T(K)$, $f * g(x) = \int_G f(xy^{-1}) g(y)\, dy$

G の Haar 測度で

K の vol が 1 となるもの.

V : G の adm. rep $\Rightarrow V^K$: 有限次元 $\mathbb{C}$-線形空間

$T(K)$-加群.

$f \in T(K)$, $v \in V^K$, $f \cdot v = \int_G f(x^{-1})\, xv\, dx$.

で作用.

(G の adm rep) $\longrightarrow$ ($T(K)$-加群で ℂ-線形空間)

として有限次元

$\cup$

(V は V^K で G上生成)

圏の同値(?)

W

$\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[K]} W$ の

$(\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[K]} W)^K = T(K) \otimes_{\mathbb{C}} W \to W$ の

核で生成される表現による商

$$G = GL_2(\mathbb{A}_f) = \prod' GL_2(\mathbb{Q}_p)$$

$$\overset{\cup}{K} \qquad = \prod \overset{\cup}{K_p}$$

K_p はほとんどすべてで $GL_2(\mathbb{Z}_p)$.

$$\underset{GL_2(\mathbb{A}_f)}{T(K)} = \bigotimes_p \underset{GL_2(\mathbb{Q}_p)}{T(K_p)}$$

$$T(GL_2(\mathbb{Z}_p)) = \mathbb{C}^{(GL_2(\mathbb{Z}_p)\backslash GL_2(\mathbb{Q}_p)/GL_2(\mathbb{Z}_p))}$$

$\mathbb{Q}_p^2 \supset L$ lattice

open cpt sub.

(L, L'), $L \otimes \mathbb{Q}_p = L' \otimes \mathbb{Q}_p$

$$= \mathbb{C}[T_p, S_p^{\pm 1}]$$

$T_p = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の両側剰余類

$S_p = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ 〃

既約 $T(GL_2(\mathbb{Z}_p))$-加群 $\mathbb{C}$上有限次元

はすべて $\mathbb{C}$上 1次元

その同型類 $\{ X^2 - \underset{\uparrow \atop T_p}{a}X + \underset{\uparrow \atop S_p}{b} \mid \underline{a, b} \in \mathbb{C},\ b \neq 0 \}$

で分類　　　　T_p　S_p の固有値.　　佐武 parameter.

global　　$\pi \subset \mathcal{A}^0(k)$

π　$GL_2(\mathbb{A}_f)$ の既約 adm rep

$= \bigotimes_p \pi_p$　, π_p　$GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約 adm rep'n

ほとんどすべての p で $\pi_p^{GL_2(\mathbb{Z}_p)} \neq 0$.

$= \varinjlim_S \left(\bigotimes_{p \in S} \pi_p \right)$　　$T(GL_2(\mathbb{Z}_p))$-加群として既約で　したがって1次元. f_p basis をきめる

S: 素数の有限集合　　transition.. f_p で $\otimes$ する.

$\pi_p^{GL_2(\mathbb{Z}_p)} \neq 0$ となる p に対しては 佐武 parameter a_p, b_p が定まる.

local　π_p　$GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約 adm rep'n.

の level (= conductor)

$\pi_p^{K_1(p^n)} \neq 0$ となる最小の n

$K_1(p^n) \subset GL_2(\mathbb{Z}_p)$

$GL_2(\mathbb{Z}_p) \to GL_2(\mathbb{Z}/p^n) \curvearrowright \mathbb{Z}_p^2/p^n\mathbb{Z}_p^2 \ni \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の stabilizer の逆像

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \bmod p^n$.

new vector (Deligne Sem LNM 349)

任意のπ_pに対し そのようなnが定まる.

$\dim \pi_p^{K_1(p^n)} = 1$

$T(K_1(p^n))$は可換(?)なので

既約性より

$\pi_p^{K_1(p^n)}$ の basis を new vector.

global π $GL_2(\mathbb{A}_f)$ の 重さk cuspidal auto rep'n

$= \otimes \pi_p$ $\pi_p \longrightarrow f_p$ conductor

ほとんどすべてで 0.

$N = \prod_p p^{f_p}$ とおく.

$\otimes T(K_p)$ $K = K_1(N) = \prod K_1(p^{f_p})$ となる.

$T_p \in T(K)$ sub module $\pi^{K_1(N)} = \otimes \pi_p^{K_1(p^n)} \ni f$ 1次元.

$\cap$

$\mathcal{A}^0(k)^{K_1(N)} = S_k(N) \ni T_p$ T_pの作用は同じもの.

fはT_pたちの同時固有vector

定数倍にnormilized

conductorの定義(最小性)より、$M|N$, $M<N$とすると

$\pi^{K_1(M)}=0$ $\pi\cap S_k(M)=0$ となるので

今のfを normalized eigen new form という。

{重さkの(既約)正則保形表現} $\xleftrightarrow{1:1}$ $\bigcup_N$ {重さk, level Nの normalized eigen new form}

$\pi \longmapsto \pi\cap S_k(N)=\mathbb{C}f$ となるf

fが生成する $GL_2(\mathbb{A}_f)$の表現 $\longleftarrow\!\shortmid$ f

局所Langlands for GL_2 $K/\mathbb{Q}_p$ 有限次拡大

局所類体論

$K^\times$の指標 $\xleftrightarrow{1:1}$ W_K^{ab}の指標

の2次元化

auto side　　Galois side

GL_1. $T(\mathcal{O}_K^\times)$の指標 $=\mathbb{C}[S^{\pm1}]$　不分岐 $\langle Fr\rangle=\mathbb{Z}$の指標

conductor

$\chi(1+m_K^n)=1$となる最小の$n\geq1$

ただし$\chi(\mathcal{O}_K^\times)=1$のときは0.

V: $I_p\subset G_K$のl進表現

$\mathrm{Art}\,V=\dim V-\dim V^{I_p}+\mathrm{Sw}\,V$

$\mathrm{Sw}\,V=\sum_{r\in\mathbb{Q}_{>0}} r(\dim V^{I_p^r}-\dim V^{I_p^{r+}})$ $\in\mathbb{N}$

$P_p\subset I_p$の分岐フィルトレーションに依存する.

$\mathrm{Sw}\, V = 0 \iff V$ への P_p の作用が自明

$\mathrm{Ar}\, V = 0 \iff V$ は不分岐.

χ の $K^\times$ の指標としての cond = χ の I_p の指標としての $\mathrm{Art}(\chi)$.

GL_2. auto side. 　　 可微数 Galois side.

$GL_2(K)$ の既約 adm rep'n $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ WD_K の 2次元 Frobenius semisimple 表現

(ρ', N) nilp

ρ' Weil群の表現.

ρ' が semi simple

$GL_2(O_K)$ 不変部分 $\neq 0$. $\longleftrightarrow$ 不分岐. ρ' が不分岐, $N=0$.

$\mathbb{Z} = \langle Fr \rangle$ の s.s 表現

既約 $\mathcal{T}(GL_2(O_K)) = \mathbb{C}[T, S^{\pm 1}]$-加群.

$\mathbb{C}$ 上有限次.

principal series	可約 $N=0$ 　 $\chi \oplus \chi'$
char $\otimes$ Steinberg (discrete series)	$N \neq 0$ 　 $WD(\chi \otimes (V_\ell E))$ (Tate curve) $= (\chi \oplus \chi \cdot \mathrm{cyclo}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$
super cuspidal (discrete series)	既約

$B \subset GL_2(K)$

上半三角

$\mathrm{Ind}(\chi_1, \chi_2') = \{ f : G \to \mathbb{C} \mid$ loc const

$f(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g) = \chi(a)\chi'(d)\omega_{-1}(d) f(g$

$\omega_{-1} = \omega_1^{-1}$, ω_1 cyclotomic char に対応する $K^\times$ の char

$$\text{Steinberg} = \mathrm{Ind}(1,1)/1$$

← 1次元部分空間

$$\pi \longleftrightarrow V$$

$$f\left(\begin{array}{l}\pi^{K_1(p^n)} \neq 0 \text{ となる}\\ \text{最小の } n\end{array}\right) = \mathrm{Ar}(V) = \underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\dim V} - \dim(\mathrm{Ker} N)^I + \mathrm{Sw}\, V$$

3. Serre予想

- 予想の定式化
- 予想の帰結
- 証明に使われるものの紹介

← $\ell \neq 2$ なら自動的

$$\left(\begin{array}{l}\bar\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{F}) \quad \text{(絶対)既約連続表現} \\ \qquad \mathbb{F} \text{ 有限体, } \mathrm{char}\, \mathbb{F} = \ell. \\ \bar\rho \text{ odd} \quad : \det \bar\rho(\text{comp } c_j) = -1.\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ $\bar\rho$ は $\underline{\text{modular}}$

$\exists$ normalized eigen form $f : T_k(N,\varepsilon)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}(f) \subset E$

$$\rho_{f,\lambda} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathcal{O}_\lambda)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_\lambda & \rightarrow & \mathbb{F}' \\ & \nearrow & \\ \mathbb{F} & & \end{array} \qquad \text{s.t. } \rho_{f,\lambda} \otimes \mathbb{F}' \cong \bar{\rho} \otimes \mathbb{F}'$$

qualitative.