10/26

- /$\mathbb{C}$ Eichler 志村同形, Jacobian
  Hecke 作用素
- /$\mathbb{Q}$ moduli 解釈, 構成, 合同関係式
- $GL_2(\mathbb{A}_f)$の表現, local Langlands との compatibility
- $\Gamma = \Gamma_1(N)$ $\quad S_k(\Gamma) \subset \Gamma(H, \omega^{\otimes k})^{\Gamma}$

cusp form の空間 　cuspでの条件 　global section 　Γ不変部分

∘ 幾何的解釈 　$\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ 指数有限

$\Gamma = \Gamma_1(N)$

$$\begin{array}{ccc} Y_1(N) = \Gamma \backslash H = Y_\Gamma & \text{Riemann面} \subset X_1(N) \\ \downarrow \text{有限被覆} & \downarrow \text{有限被覆} \\ Y_1(1) = SL_2(\mathbb{Z}) \backslash H \xrightarrow[\simeq]{j\text{-inv}} \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} (= \mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^1 \end{array}$$

$Y_1(N)$の smooth cpt 化

modular curve

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \neq 0} \frac{1}{(n+m\tau)^{2k}} \quad (k \geq 2) \quad \text{Eisenstein series}$$

$g_2 = 60 G_4, \quad g_3 = 140 G_6$ 　τの関数

$$j(\tau) = \frac{12^3 g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}$$

$k=2$. H上 a line bundle $\omega^{\otimes 2} \xrightarrow{\simeq} \Omega^1$

$(dz)^{\otimes 2} \mapsto d\tau$

$SL_2(\mathbb{Z})$-equivariant.

$N \geq 5$

$$S_2(\Gamma) \quad \Gamma(H, \omega^{\otimes 2})^{\Gamma}$$

$$\underbrace{\Gamma(\underset{\text{cpt}}{X_1(N)}, \Omega^1)}_{\text{有限次元}} \subset \Gamma(Y_1(N), \Omega^{1\,an})$$

Hecke operator $p \nmid N$ 素数

$\Gamma = \Gamma_1(N)$ $\quad \Gamma_p = \Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p) \subset \Gamma$ 指数 $p+1$

$N \geq 5$

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma_p \backslash H = Y_{\Gamma_p} & \tau \mapsto p\tau \\ \swarrow & \swarrow s & \searrow \\ \Gamma \backslash H = Y_\Gamma & & Y_\Gamma \end{array}$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_p$

cpt化

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\Gamma_p}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \underset{\Gamma_1(N)}{\begin{pmatrix} a & pb \\ \frac{c}{p} & d \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dfrac{p\tau + 0}{0 + 1} = p\tau$

$$\begin{array}{ccc} & X_1(N, p) & \\ s \swarrow & & \searrow t \\ X_1(N) & & X_1(N) \end{array}$$

$$T_p : S_2(\Gamma) \longrightarrow S_2(\Gamma)$$

$$\Gamma(X_1(N), \Omega^1) \xrightarrow{\tau^*} \Gamma(X_1(N,p), \Omega^1) \xrightarrow{s_*} \Gamma(X_1(N), \Omega^1)$$

$$T_p = s_* \circ \tau^* \ H^1(X_1(N), \mathbb{Z}) \to H^1(X_1(N), \mathbb{Z})$$

$$\mathbb{T}_2(\Gamma)_{\mathbb{Z}} \subset \mathrm{End}(H^1(X_1(N), \mathbb{Z}))$$

$T_n,\ n \geq 1,\ \langle d \rangle\ (d, N) = 1$ で生成される部分環

$\mathbb{Z}$上有限な可換環

$H^1(X_1(N), \mathbb{Z})$: $\mathbb{T}_2(\Gamma)_{\mathbb{Z}}$-加群.

・Eichler–志村 同形

複素構造で共役になる

$$H^1(X_1(N); \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} \simeq \Gamma(X_1(N), \Omega^1) \oplus \overline{\Gamma(X_1(N), \Omega^1)}$$

$\Gamma(X_1(N), \Omega^1) = S_2(\Gamma)$

Hodge分解

Hecke作用素の作用と compatible

$$\mathbb{T}_2(\Gamma)_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{T}_2(\Gamma)_{\mathbb{C}} \subset \mathrm{End}(S_2(\Gamma))$$ であり

Hodge分解は $\mathbb{T}_2(\Gamma)_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$-加群としての同形

Eichler 志村 同形

$$\begin{array}{ccc} T_2(\Gamma) \times S_2(\Gamma) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (T, f) & \longmapsto & a_1(Tf) \end{array}$$ 非退化

$S_2(\Gamma)^*$ 自由 $T_2(\Gamma)$-加群, 階数 1

Poincaré duality + E-S 同形 + fpqc descent

$\Rightarrow$ $H^1(X_1(N), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ は

自由 $T_2(\Gamma)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ 加群. 階数 2

f normalized eigen form

$$\begin{tikzcd}
 & f : T_2(\Gamma)_{\mathbb{C}} \arrow[r] & \mathbb{C} & \text{環の準同形} \\
\mathbb{Q}\text{上 finite} \arrow[r] & T_2(\Gamma)_{\mathbb{Q}} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r] & \mathbb{Q}(f) \arrow[u, phantom, "\cup"] & \leftarrow \mathbb{Q}\text{の有限次拡大.} \\
\mathbb{Z}\text{上 finite} \arrow[r] & T_2(\Gamma)_{\mathbb{Z}} \arrow[u, phantom, "\cup"] & a_n(f) \arrow[u, phantom, "\in"] & \leftarrow \text{代数的整数.} \\
 & T_n \arrow[u, phantom, "\in"] \arrow[ur, mapsto] & &
\end{tikzcd}$$

$E = \mathbb{Q}(f)$, λ : Eの有限素点

$H^1(X_1(N), \mathbb{Z}) \otimes E_\lambda$ $\hookleftarrow$ 2次元の E_λ 線形空間.

$T_2(\Gamma)_{\mathbb{Z}} \nearrow$ fが定める

環準同形

・ X cpt Riemann面. genus g

$$\mathrm{Jac}(X) = \Gamma(X, \Omega^1)^{(*)} / \mathrm{Im}\, H^1(X, \mathbb{Z})^{(*)}$$

$\mathbb{C}$-vec. sp の dual　free $\mathbb{Z}$-mod の $\mathbb{Z}$ dual

g次元 $\mathbb{C}$線形空間　　階数 $2g$ 自由 $\mathbb{Z}$-加群.

lattice.

compact cx torus　$\mathbb{C}$上のAbel多様体.

$$[\gamma] \in H^1(X, \mathbb{Z})^* = H_1(X, \mathbb{Z})$$

は 線形形式 $\omega \mapsto \int_\gamma \omega$ を与える.

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_\ell := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(\varprojlim \mathrm{Jac}X[\ell^n], \mathbb{Q}_\ell)$$

・Galois 作用. ⇐ $\mathrm{Jac}(X_1(\Gamma))$ を $\mathbb{Q}$上の多様体として定義

⇐ $X_1(\Gamma)$ を 〃

⇐ moduli 解釈.

Γ が H 左作用 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$

${}^t\Gamma$ が H 右作用 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \tau = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$

Reference Deligne Formes modulaires et représentations de GL(2)

Spr. LNM 349 p55-105.

$\Gamma\backslash H = Y_1(N) = H/{}^t\Gamma$

$P_N \subset \mathbb{Z}^2/N\mathbb{Z}^2$ の位数Nの元全体の集合

P_N $GL_2(\mathbb{Z})$が自然に左から $GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$

を通して作用

inv で右から作用. $SL_2(\mathbb{Z})$ に制限.

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ の stabilizer ${}^t\Gamma$ $P_N \leftrightarrow {}^t\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})$

同一視.

$$\Gamma\backslash H = (H\times P_N)/SL_2(\mathbb{Z}).$$

$\tilde{R}^{\pm} = \{\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ 像は lattice$\} = \{(\omega_1,\omega_2)\in(\mathbb{C}^\times)^2 \mid \frac{\omega_1}{\omega_2}\notin\mathbb{R}\}$

$GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ の自然な作用で $\cup$

$\cup$ $\mathbb{C}^\times \subset GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$-torsor $\{\ {}'' \mid \mathrm{Im}\frac{\omega_1}{\omega_2}>0\}$

$\cong GL_2(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccc} (\omega_1,\omega_2) & \in & \tilde{R} \\ \big\downarrow \ \mathbb{C}^\times\text{-torsor} & & \downarrow \\ \omega_1/\omega_2 & \in & H \end{array}$$

$SL_2(\mathbb{Z})$の作用と compatible.

$\tilde{R}^{\pm}$ $GL_2(\mathbb{Z})$の自然な右作用.

$$(\omega_1\ \omega_2)\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix} = (a\omega_1+b\omega_2,\ c\omega_1+d\omega_2).$$

$$\Gamma\backslash H = \left(\mathbb{C}^\times\backslash\tilde{R}^{\pm}\times P_N\right)/GL_2(\mathbb{Z}).$$

$$\Gamma\backslash H = \left(\mathbb{C}^\times\backslash \tilde{R}^{+} \times P_N\right)/GL_2(\mathbb{Z})$$

moduli 解釈

$$\mathbb{C}^\times\backslash\{(\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C},\ P \in \mathbb{Z}^2/N\mathbb{Z}^2)\}/GL_2(\mathbb{Z})$$

lattice　位数がN

1:1

1:1

$\{(E, p) \mid E$ は $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線, p 位数 N の点$\}/\mathrm{isom}.$

$\{(E, p, \mathrm{Lie}\,E \simeq \mathbb{C}, H_1(E, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2\}/\mathrm{isom}$

$\mathrm{Lie}\,E$　E の原点での接空間，1次元 $\mathbb{C}$-線形空間

$\| \ \Gamma(E, \Omega^1)^*$

$H_1(E, \mathbb{Z})$ 自由 $\mathbb{Z}$ 加群 rk 2　$\mathrm{Lie}\,E \supset H_1(E, \mathbb{Z})$ lattice

$$\exp : \mathrm{Lie}\,E / H_1(E, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} E$$

S 複素解析空間　$\{S \to Y_1(N)$, 複素解析空間の射$\}$

$N \geq 4$

$\updownarrow$

$\{S$ 上の楕円曲線の族 E と $E \to S$ の切断 P で，$NP = 0$ であり，すべての $s \in S$ で $P_s \in E_s$ の位数がちょうど N の対 $(E, P)\}/\mathrm{isom}$

$N \geq 4$. $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ 上の functor

$$\mathcal{M}_1(N) : (Sch/\mathbb{Z}[\tfrac{1}{N}]) \longrightarrow (Sets) \quad \text{反変}$$

$$S \longmapsto \mathcal{M}_1(N)(S)$$

を $\mathcal{M}_1(N)(S) = \left\{ \begin{array}{l} S\text{上の楕円曲線 } E \text{ と } E \to S \text{ の切断 } P : S \to E \text{ で} \\ NP = 0 \text{ かつすべての幾何的点 } \bar{s} \to S \text{ に対し} \\ P_{\bar{s}} \in E(\bar{s}) \text{ の位数がちょうど } N \text{ であるものの} \\ \text{対 } (E, P) \end{array} \right\} \Big/ \text{isom}$

で定める.

$\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ 上の affine smooth curve $Y_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]}$ で

$\mathcal{M}_1(N)$ は表現される.

$N=4$ のときは直接構成

$N=3$ $\quad \mathcal{M}(N)$ に対し $Y(N)$ を構成 (直接)

これをもとにして

- 被覆
- はりあわせ
- 商

して一般に構成.

$N \geq 5$. $\exists\, X_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \supset \cancel{\ } Y_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]}$ finite étale divisor の compliment.

$X_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]}$: proper smooth curve $/\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$

$$\begin{array}{ccc} Y_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} & \xrightarrow{j} & \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \\ \cap & & \cap \\ \text{Normalization} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \end{array}$$

S scheme. $X \to S$ proper smooth curve

s section geom. fiber 連結.

genus $g \geq 0$

T/S sch

$$\mathrm{Pic}^0_{X/S}(T) = \ker\left(s^* \oplus \deg ; \mathrm{Pic}(X \times_S T) \to \mathrm{Pic}(T) \oplus \mathbb{Z}(T)\right)$$

$\mathbb{Z}$値局所定数関数

$\mathrm{Pic}(-) = -$ 上の可逆層の同形類群.

$\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ は S 上の Abelian scheme で表現可能

$\mathrm{Jac}_{X/S}$

Busch-Lütkebohmert-Raynaud

Néron model.

$$H^1(X_1(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_\ell \qquad J_1(N) = \mathrm{Jac}_{X_1(N)_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}}$$

$\mathbb{Q}$ 上の Abel 多様体.

$$= \mathrm{Hom}\left(\varprojlim J_1(N)[\ell^n](\bar{\mathbb{Q}}), \mathbb{Q}_\ell\right)$$

$\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ 上の Abel. sc

$G_\mathbb{Q}$ 作用

$J_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]}$ の gen fi

$p \nmid N\ell$ で不分岐

$\otimes_{T_\ell(\Gamma)_{\mathbb{Q}_\ell}} E_\lambda$ すると, E_λ-係数の 2次元 λ進表現.

f