10/19.

Weil-Deligne群の表現

$\mathbb{Q}_p$, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) = G_{\mathbb{Q}_p} \twoheadrightarrow G_{\mathbb{F}_p} \simeq \hat{\mathbb{Z}}$

$$\begin{array}{ccccc} & & \cup & & \cup \\ I_p & \subset & W_{\mathbb{Q}_p} & \to & \langle Fr_p \rangle \simeq \mathbb{Z} \end{array}$$

$W_{\mathbb{Q}_p}$の位相, I_pが open compact subgroup

$WD_{\mathbb{Q}_p} \doteqdot W_{\mathbb{Q}_p}$の表現 $\rho' = (\rho, N)$

ρ: $W_{\mathbb{Q}_p}$の連続表現

$\ker\rho \cap I_p \subset I_p$の開部分群

$N =$ (nilp) 自己準同型.

s.t. $\rho(\sigma) N \rho(\sigma)^{-1} = p^{n(\sigma)} N$

$n : W_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Z}$.

monodromy thm: $\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \to GL(V)$ (連続) ℓ進表現 とすると

(ρ', N) $WD_{\mathbb{Q}_p}$の表現で, $^\forall n \in \mathbb{Z}$, $\sigma \in I$に対し

$\rho(F^n\sigma) = \rho'(F^n\sigma)\exp(t_\ell(\sigma) N)$

をみたすものが定まる.

$t_\ell : I_p \to \mathbb{Z}_\ell(1) = \varprojlim \mu_{\ell^n} \cong \mathbb{Z}_\ell$

Strong compatibility　($p=\ell$ のときは除く．p-adic Hodge が必要)．
〃
Strictly

E 代数体　$\left(\rho_\lambda : G_{\mathbb{Q}} \to GL_{E_\lambda}(V_\lambda) \right)$　ℓ 進表現の系
(λ: E の有限素点)

各 p, λ　$\lambda \nmid p$ で WD の表現 $(\underbrace{\rho_\lambda|_{G_{\mathbb{Q}_p}}}_{W_{\mathbb{Q}_p}\text{の表現}}, N)$ が定まる

$$1 \to \underbrace{I/I\cap\ker\rho}_{\text{有限群}} \to W_{\mathbb{Q}_p}/_{\ker\rho\cap I} \to \mathbb{Z} \to 1$$

(ρ_λ) が strictly compatible とは　semisimplification
$\lambda, \lambda' \nmid p$ とすると，$(\rho_\lambda|_{G_{\mathbb{Q}_p}}^{ss}, N)$, $(\rho_{\lambda'}|_{G_{\mathbb{Q}_p}}^{ss}, N)$ は
両方とも $\overline{E}$ 上定義され，その同型類は E 上有理的
(同形類が $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$-不変) であり，$\overline{E}$ 上の表現として
同形．

(ρ_λ) が $H^*(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$　(X proper smooth $/\mathbb{Q}$)
のときは，$\rho_\lambda|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ は半単純 ?　(Tate 予想の帰結)
$*=0, 1$ の場合は OK　(Faltings)

Strong (= strict) compatibility を示すには，

- trace の等式　(good reduction のときは Weil 予想の帰結)

(一般のとき, weight spectral seq. の functoriality + Künneth 分解が代数的
(Tate 予想の一部)

$\dim \le 2$, elliptic or Hilbert modular form にともなう Galois 表現.

・N の比較 (good red ⇒ $N=0$ なので OK
一般のとき, weight monodromy 予想が示せれば, ρ' の方から従う).

w-m 予想 H^2 までは mod. form のときも OK.

weight-monodromy 予想

X : $\mathbb{Q}_p$ 上 proper smooth 多様体, $G_{\mathbb{Q}_p} \curvearrowright H^q(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_\ell)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad V$.

$\ell \ne p$ monodromy thm より
巾零準同形 N が定まる.

N から V の monodromy fil. が定まる.

$N^{n+1}=0$ とする. V の増大 fil $W_\bullet N$ を
- $W_n V = V \quad W_{-n-1} V = 0$
- $N(W_i V) \subset W_{i-2} V$ かつ
- $N^k : Gr_k^W V = W_k V / W_{k-1} V \to Gr_{-k}^W V$ が同形 $(k \ge 0)$

がただ1つ定まる.

$n=1$ のとき. $V \supset \mathrm{Ker}\, N \supset \mathrm{Im}\, N \supset 0$

$W_1 \quad W_0 \quad W_{-1} \quad W_{-2}$

$V = H^q$ のとき. $Gr_i^W V$ $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現

$+$

F : Fr のもちあげ

$F \curvearrowright Gr_i^W V$ の固有値

(Weil予想の帰結) 固有値代数的整数

複素数としての絶対値 $= p^{\frac{整数k}{2}}$ $= q+i$

W-m予想

ρ' が $W_\cdot$ を

決める.

2. modular form と Galois 表現

- modular form の定義

- Hecke operator

- modular form にともなう Galois表現

- 構成

- GL_2 (adele) の表現

- 局所 Langlands 対応との compatibility

reference : IHES サマースクール報告集用の原稿

modular form の定義

$N \geq 1$ レベル, $k \geq 2$ 重さ, $\varepsilon : (\mathbb{Z}/N)^\times \to \mathbb{C}^\times$ 指標

に対して,

$$S_k(N,\varepsilon) \subset M_k(N,\varepsilon) \leftarrow \text{modular forms}$$

cusp forms

有限次元 $\mathbb{C}$-vec. sp.

$\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ 合同部分群 ($\stackrel{\exists}{\because} N \geq 1$, $\Gamma(N) \subset \Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$)

$\Gamma(N) = \mathrm{Ker}(SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{Z}/N))$

$$\Gamma(N) \subset \Gamma_1(N) \subset \Gamma_0(N) \subset SL_2(\mathbb{Z})$$

$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \;\middle|\; d \equiv 1 \ (N) \right\}$

$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \ (N) \right\}$

$$\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/N)^\times$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto d \bmod N.$$

$$SL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,\tau > 0\}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

$f : H \to \mathbb{C}$ 正則関数

$$(\gamma_k^* f)(\tau) := \frac{1}{(c\tau + d)^k} f(\gamma\tau)$$

$f(\tau)\,dz^{\otimes k}$ を

$$SL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}\times\mathbb{C} \ni (\tau, z) \mapsto \left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right)$$

$$\gamma^*\left(f(\tau)\,dz^{\otimes k}\right) = \gamma_k^* f(\tau)\,dz^{\otimes k}$$

ω: $\mathbb{H}$上の complex line bundle, dz が基底.

$\Gamma(\mathbb{H}, \omega^{\otimes k}) = \Gamma(\mathbb{H}, \mathcal{O}_{\mathbb{H}})(dz)^{\otimes k}$ への作用

$S_k(\Gamma)$, $M_k(\Gamma)$ $\quad (\Gamma = \Gamma_0(N), \Gamma_1(N))$.

正則関数 $f: \mathbb{H}\to\mathbb{C}$ が level Γ, 重さ k の modular form (resp. cusp form) であるとは,

(1) ${}^\forall\gamma\in\Gamma$ に対し, $\gamma_k^* f = f$.

(2) $\gamma\in\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\in\Gamma$ に対し (1)より $f(\tau+1)=f(\tau)$ なので

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n, \quad q = \exp 2\pi i\tau \text{ とかける.}$$

このとき $n<0$ なら $a_n=0$ (resp. $n\leq 0$ なら $a_n=0$)

さらに, この条件が任意の $\gamma\in SL_2(\mathbb{Z})$ に対し $\gamma_k^* f$ についても成り立つ.

$$S_k(\Gamma_0(N)) \subset S_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{\varepsilon: (\mathbb{Z}/N)^\times\to\mathbb{C}^\times} S_k(N, \varepsilon)$$

$\quad //$

$S_k(N, 1)$.

$S_k(\Gamma_1(N))$ ↑ $\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N)$ 作用

$\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N) \cong (\mathbb{Z}/N)^\times \to \mathbb{C}^\times$ の指標.

$S_k(N,\varepsilon)$ ↑ レベル N, 重さ k, 指標 ε の cusp form の空間

2.2 Hecke 作用素.

- f: レベル N, 重さ k, 指標 ε の cusp form

$T_n \curvearrowright S_k(N, \varepsilon)$ Hecke operator

$n=1,2,\cdots$

$n=p$ が素数のとき

$$T_p f(\tau) = \sum_{i=0}^{p-1} f\left(\frac{\tau+i}{p}\right) + p^{k-1}\varepsilon(p) f(p\tau).$$

(ただし, $p|N \Rightarrow \varepsilon(p)=0$.).

T_pたちは互いに可換. $p|N$のとき U_pともいう.

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n n^{-s} = \prod_{p:\text{素数}} (1-T_p p^{-s} + \varepsilon(p) p^{k-1} p^{-2s})^{-1}$$

形式的に展開して, 右辺の n^{-s}の係数として T_nを定義する.

- $f \in S_k(N, \varepsilon)$ が normalized eigen form である

とは $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^n$ とおくと, $a_1(f)=1$であり,

すべての $n \in \mathbb{N}, \geq 1$ に対し, T_nの固有ベクトルであること.

$$\mathbb{T}(N,k,\varepsilon) = \mathbb{C}[T_1, T_2, \cdots] \subset \mathrm{End}(S_k(N,\varepsilon))$$

↑ Hecke環. $\quad$ ↑ $\mathbb{C}$上の有限次元環 (可換).

$$T_1(N,k,\varepsilon) \times S_k(N,\varepsilon) \to \mathbb{C}$$ 双線形形式

$$(T, f) \longmapsto a_1(Tf)$$

・q展開原理：↑が非退化

$a_1(T_n f) = a_n(f)$ なので

任意の n に対し，$a_1(T_n f)=0$ ならば $f=0$．

$S_k(N,\varepsilon) = \mathrm{Hom}(T_1(N), \mathbb{C})$ 同一視

$$\left\{\begin{array}{c}\text{normalized}\\ \text{eigen form}\end{array}\right\} \subset S_k(N,\varepsilon) \qquad \{\mathbb{C}\text{上の環準同型}\} \subset \mathrm{Hom}(T_1(N),\mathbb{C})$$

$$\left(f = \sum a_n q^n\right) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} (T_n \mapsto a_n)$$

$$T_n f = a_n f$$

・f : normalized eigen form

$E = \mathbb{Q}(f) \subset \mathbb{C}$

$\quad = \mathbb{Q}(a_n(f) : n = 1, 2, \cdots) \leftarrow \mathbb{Q}$ の有限次拡大

λ : E の有限素点，$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(E_\lambda)$ λ進表現

が f にともなう Galois 表現であるとは

$\boxed{\text{ほとんどすべての } p}$ で不分岐で, $\mathrm{Tr}\,\rho(\mathrm{Fr}_p) = a_p(f)$
がなりたつこと.

f: level N, $\lambda \mid \ell$ とするとき, $\boxed{\text{すべての } p \nmid N\ell}$ で

(指標を ε
重さ k) とすると

$\det(1 - \rho(\mathrm{Fr}_p)t) = 1 - a_p(f)t + \varepsilon(p)p^{k-1}t^2$

$= (1-\alpha t)(1-\beta t)$.

(Ramanujan予想 α, β の複素数値としての
絶対値は $p^{\frac{k-1}{2}}$.
Weil予想, + fにともなうGalois表現の
幾何的構成の帰結)

$f = \sum a_n q^n$, $L(f,s) = \sum a_n n^{-s}$ が
$\mathrm{Re}\, s > \frac{k-1}{2} + 1$ で絶対収束.