

2010-2-1

Lifting theorem

$\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(\mathcal{O}_\lambda)$ l -adic rep
 F/\mathbb{Q} 総実 Galois 拡大 $\rho|_{G_F}$ modular とする
 $\Rightarrow \exists (\rho_\mu)_\mu$ $G_{\mathbb{Q}}$ の compatible system の表現 s.t. $\rho = \rho_\lambda$

$\textcircled{!}$ $1 = \sum_i n_i \text{Ind}_{G_{F_i}}^{G_{\mathbb{Q}}} 1$ as Virtual rep
 (\Leftrightarrow trace 相等 (n.))
 $n_i \in \mathbb{Z}$
 F/F_i 可解 $n_i \in \mathbb{Z}$

$\rho = \sum n_i \text{Ind}_{G_{F_i}}^{G_{\mathbb{Q}}} \rho|_{G_{F_i}}$
 solvable base change $\rho|_{G_{F_i}}$ あり得る

$\therefore \rho|_{G_F}$ modular $\Rightarrow \rho|_{G_{F_i}}$ modular
 $\Rightarrow \uparrow$ compatible system の member

$\therefore \exists (\rho_{F_i, \mu})_\mu$ compatible system s.t.
 $\rho|_{G_{F_i}} = \rho_{F_i, \lambda}$

∴

$$\rho_\mu = \sum n_i \operatorname{Ind}_{G_{F_i}}^{G_{\mathbb{Q}}} \rho_{F_i, \mu} \quad \text{virtual repn of } G_{\mathbb{Q}}$$

と表せる. = 何か本当に表現であることを見た...

$$(\rho_\mu, \rho_\mu) = (\rho, \rho) = 1 \quad \neq 0$$

⇒ ρ_μ は 既約表現 かつ は その -1 倍.

degree を見ると

$$\deg \rho_\mu = \deg \rho = 2 \geq 0 \quad \therefore -1 \text{ 倍はありえない.}$$

∴ ρ_μ は $G_{\mathbb{Q}}$ の 2次元表現.

compatible system であること

F/F' solvable とする.

$(\rho_\mu|_{G_{F'}})|_{G_F} = \rho_\mu|_{G_F}$ は modular, compatible system.

solvable base change ⇒ $\rho_\mu|_{G_{F'}}$ modular, "

p : 素数 $D_p \subset \operatorname{Gal}(F/\mathbb{Q})$ 分解群

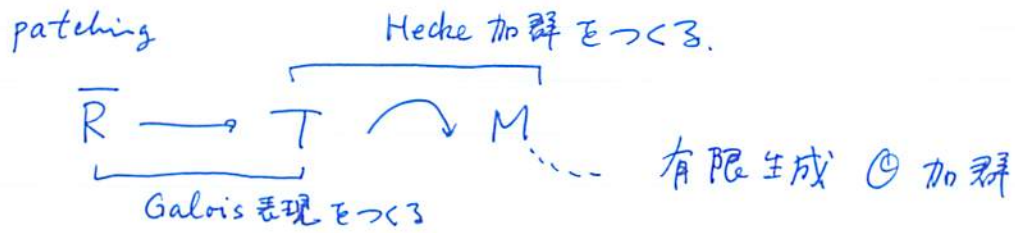
F' : D_p に対応する拡大

F' の素点 v $F_v' \cong \mathbb{Q}_p$

⇒ compatible



Hecke 加群の構成



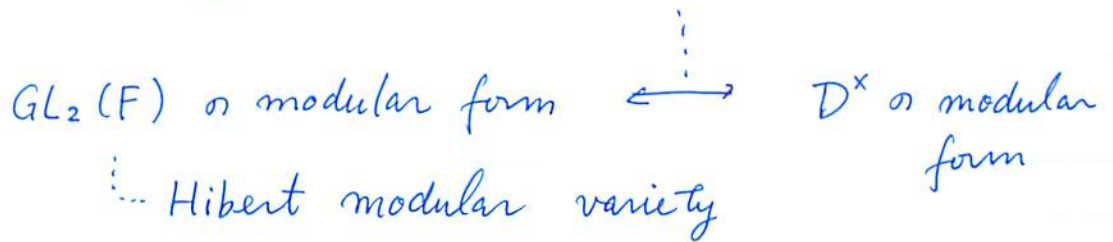
T の役割 2つある universal deformation space

① $\overline{R} \rightarrow T$ 係数形式に伴う Galois 表現の構成とその大域・局所整合性

\mathbb{Q} modular form, modular curve

\mathbb{F} : Hilbert modular form (に伴う)

Jacquet-Langlands 対応 を用いる



D : quaternion alg / \mathbb{F}

↑
u3u3 とくろ

Shimura curve (1次元)

(modular curve とよく似ている)

② $T \rightsquigarrow M$

∴ Hecke 加群

Jaguet - Langlands - 清水 対応

 D D^\times の modular form

有限個の点

rem

- $\mathcal{O}[\Delta]$ -free ... ②では非常に簡単 (位相幾何学)
- ① 現在唯一 数論幾何 が使われている部分.

以下 ② の話.

 $[F:\mathbb{Q}]$ 偶数 D/F quaternion algebra を次のようにとる

- s 個の有限素点で split / 行列環
i.e. $D \otimes F_v \simeq M_2(F_v)$
- " 無限素点で ramify
 $D \otimes F_v \simeq \mathbb{H}$

reciprocity. 唯一 \rightarrow 存在.split (ない) 素点の数 \leftrightarrow Shimura var
の次元

$$\dots (D \otimes A_F^f)^\times \simeq GL_2(A_F^f)$$

finite adèle

character

$$\chi : A_F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

fin. order

$$\chi = N_{F/\mathbb{Q}}^{k-2} \cdot \varepsilon \quad \text{fix}$$

weight k char ε の Hilbert modular ^{cuspidal} form の空間

$$S_{k, \varepsilon} \hookrightarrow \varinjlim_{K \subset GL_2(A_F^f)} \Gamma \left(GL_2(F) \backslash \left(GL_2(A_F^f) / K \times X \right), \omega^{\otimes k} \right)^\varepsilon$$

open cpt subgroup

Hilbert modular
var / \mathbb{C}

$$X = \prod_{v \neq \infty} (\mathbb{C} - \mathbb{R})$$

cuspidal 条件

$GL_2(A_F^f)$ の admissible repn / \mathbb{C}

↖ JL 対応の GL_2 side

↘ " D の方.

$$S_{K, \epsilon}^D = \lim_{K \subset (D \otimes A_F^f)^*} \Gamma \left(\underbrace{D^* \setminus (D \otimes A_F^f) / K}_K, W \right)^\epsilon$$

open cpt subgroup
有限集合.

$$W = \bigotimes_{v/\infty} \text{Sym}^{k-2} V_v$$

\uparrow
 $D^* \subset (D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^*$ の表現

$$(D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^* = \prod_{v/\infty} GL_2(\mathbb{C})$$

各 v 成分の自然な表現が V_v .

$$S_{K, \epsilon}^D \quad (D \otimes A_F^f)^* \text{ の adm rep } / \mathbb{C}$$

J-L 対応

$$\exists S_{K, \epsilon} \quad \simeq \quad \sum_{K, \epsilon}^D$$

\cup ↻

$$GL_2(A_F^f) \simeq (D \otimes A_F^f)^*$$

$$\begin{array}{ccc} \cup & & \cup \\ K & \longleftrightarrow & K^D \end{array}$$

(有限集合は compact)
↓

$$S_{K, \epsilon}^K \simeq S_{K, \epsilon}^{D, K}$$

K -fixed part
有限次元

$T(K) \simeq T(K^D)$ 加群の同型

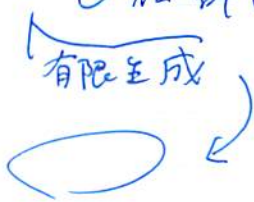
①

②

\mathbb{Q} -vect space E \mathbb{Q} 加群に なる必要あり.

$S_{k, \epsilon}^{D, K}$

\Rightarrow 修正



$\rho: D^x \rightarrow GL(W)$

$S_{k, \epsilon}^{D, K} = \left\{ f: (D \otimes A_F^f)^x \rightarrow W \mid \begin{array}{l} f(gtzk) = \rho(g) X(z) f(x) \\ \vdots \\ \epsilon\text{-part} \end{array} \right\}$

$D^x \rightarrow (D \otimes A_F^f)^x$
 $K \rightarrow (D \otimes A_F^f)^x$

$(D \otimes A_F^f)^x \supset A_F^{f \times} \subset (D \otimes A_F^f)^x$
 center

$\rho(g)$ ← 分母があるかも global での \mathbb{Q} -mod に する obstr.

\therefore 2つの E_λ 構造は定義できるか, \mathbb{Q}_λ は無理

$f \in S_{k, E}^{D, K}$ のかわりに

$$f_1 \in E \quad f_1(t) := \rho(t_l)^{-1} f(t)$$

↑
t の l-part

$$\begin{array}{ccc} (D \otimes A_F^f)^x & \longrightarrow & (D \otimes Q_l)^x \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ t & \longmapsto & t_l \end{array}$$

とすると \mathcal{O}_λ 構造が入る.

↙ 次の二つと似ている

ゆりみち

代数的 量指標 にともなう l 進表現

(虚数乗法論)

(cf Serre の本)

F, E 代数体 $S: F$ の素点の有限集合 $S_\infty \subset S$

$$\chi: \bigoplus_{v \in S} \mathbb{Z} \longrightarrow E^\times$$

に対し、

$$\chi_{\text{alg}}: F^\times \longrightarrow E^\times \quad \text{algebraic な準同型.}$$

s.t. $a \in F^\times \quad a \gg 0$

かつ $a \equiv 1 \pmod{\exists N > 0}$ (totally positive
すなわちの実素点 $v > 0$)
($v|N \Rightarrow v \in S$)

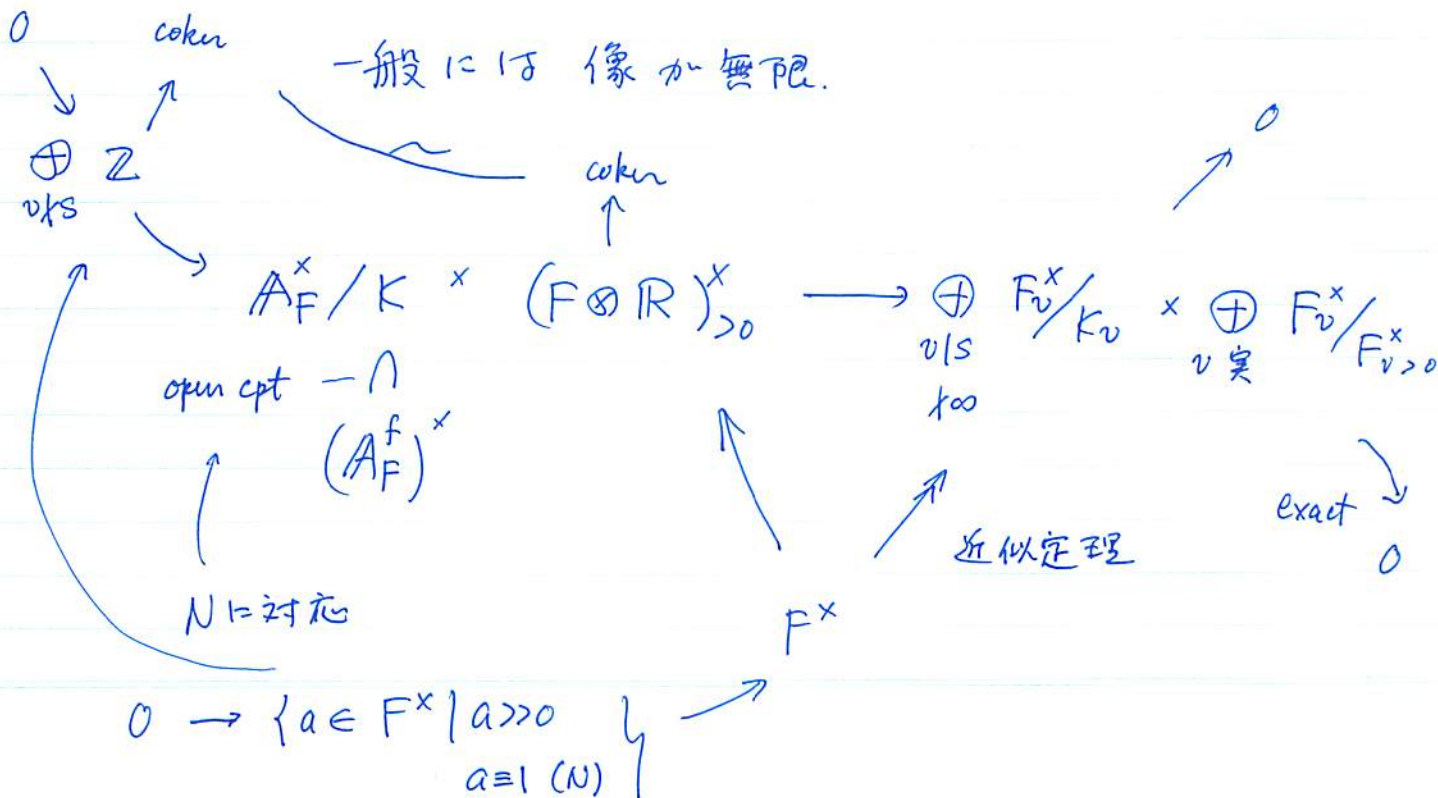
$\Rightarrow X((a)) = X_{alg}(a)$ a が生成する pr. ideal

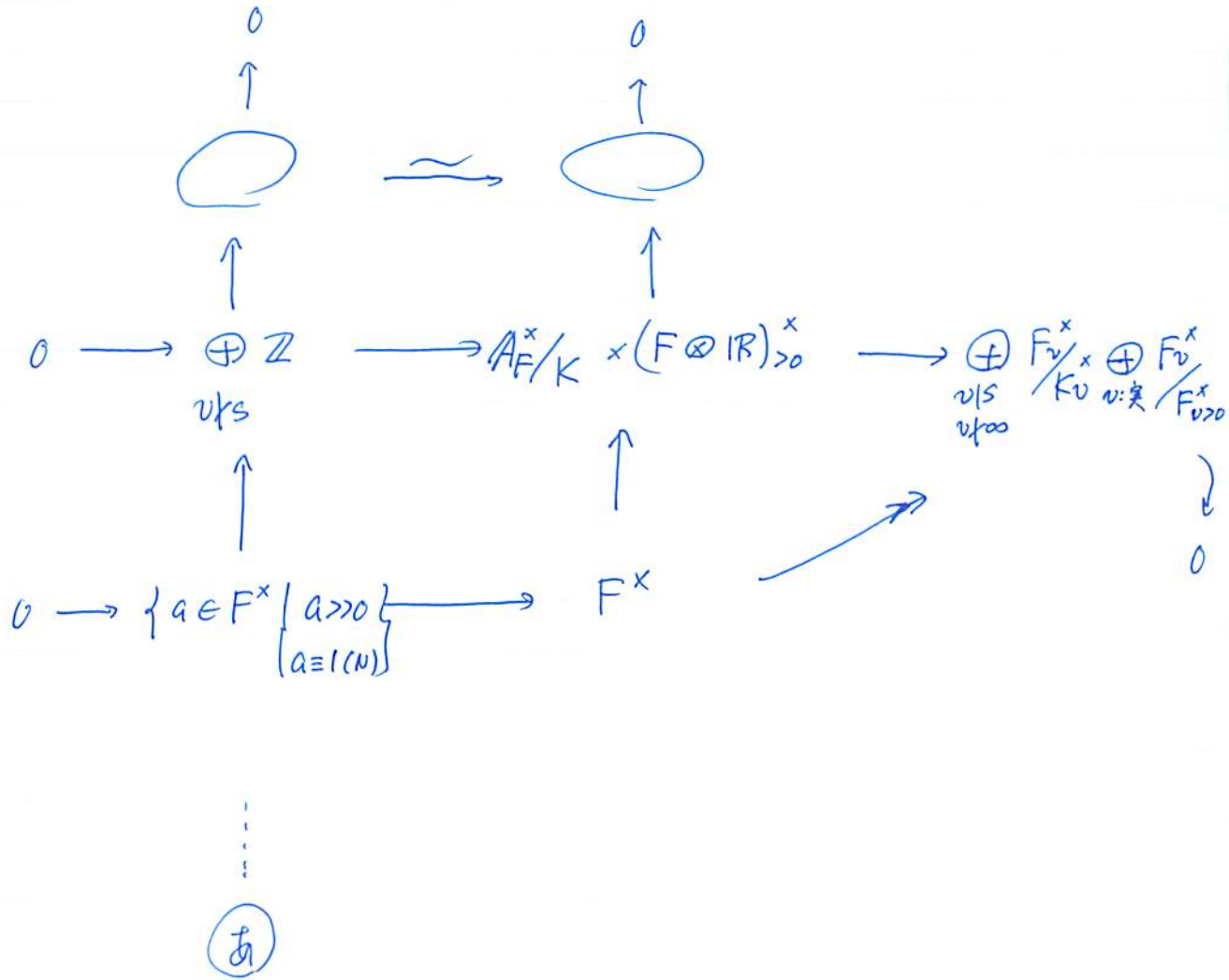
例 $F = \mathbb{Q}, S = \{00\}, E = \mathbb{Q}$
 $p \mapsto p \quad X_{alg} = id \quad N=1$

• ∞ を考えると A_F^x / F^x の $(E \otimes \mathbb{R})^x$ 値の指標

• 有限素点 $v|l$ を考えると G_F^{ab} の l 進指標

$X_{alg} = 1$ なら類体論そのもの。
 (像が有限集合)





$$\textcircled{a} \quad (E \otimes \mathbb{R})^\times$$

$$\downarrow \chi \times \chi_{\text{alg}}^{-1}$$

$$\oplus \mathbb{Z} \times (F \times \mathbb{R})^\times$$

$$\uparrow \text{diag}$$

$$\left\{ a \in F^\times \mid \begin{array}{l} a \gg 0 \\ a \equiv 1 \pmod{N} \end{array} \right\}$$

とすると、指標が誘導される。

$$A_F^\times \rightarrow (F \otimes \mathbb{R})^\times \xrightarrow{\chi_{\text{alg}, \infty}} (E \otimes \mathbb{R})^\times$$

$$\chi \cdot \chi_{\text{alg}, \infty}^{-1} : A_F^\times / F^\times \rightarrow (E \otimes \mathbb{R})^\times$$

$$A_F^\times \rightarrow (F \otimes \mathbb{Q}_\ell)^\times \xrightarrow{\chi_{\text{alg}, \ell}} (E \otimes \mathbb{Q}_\ell)^\times$$

$$\chi \cdot \chi_{\text{alg}, \ell}^{-1} : A_F^\times / F^\times \rightarrow (E \otimes \mathbb{Q}_\ell)^\times$$

$\cdot (F \otimes \mathbb{R})_{>0}^\times$

\parallel — 類体論

G_F^{ab}

よけみ 終

$$\begin{aligned}
 f_1(gtzk) &= \rho(\cancel{g}tzk)^{-1} f(\cancel{g}tzk) \\
 &\quad \parallel \\
 &\quad \rho(\cancel{g})\chi(z)f(t) \\
 &= \chi(z)\rho(z_k)^{-1} \underbrace{\rho(t_k)^{-1}f(t)} \\
 &= \chi(z)\rho(z_k)^{-1}f_1(t)
 \end{aligned}$$

$$S_{k,\varepsilon}^{D,K'} := \left\{ f: (D \otimes A_F^f)^\times \rightarrow W \mid \begin{array}{l} f_1(gtzk) \\ = \underbrace{\chi(z)\rho(z_k)^{-1}\rho(k_k)^{-1}f_1(t)}_{\parallel} \\ \psi(z) \end{array} \right\}$$

$k_k \subset K_k$

$$\psi: A_F^{f,\chi} \rightarrow E_\lambda^\chi$$

$W: E_\lambda$ 線型空間 $\supset W_\mathcal{O}$ \mathcal{O} -lattice, K_k -stable

$\varepsilon \varepsilon^2 = \varepsilon^2$ $S_{k,\varepsilon}^{D,K'}$ の \mathcal{O} -lattice が定義される

\uparrow $T(K)_\mathcal{O}$ -module

その局所化として T, M を定義

f は \mathbb{C} の上の関数 \rightarrow \mathbb{C} の有限生成

$$D^x \setminus (D \otimes A_F^f)^x / K \cdot A_F^x : \text{有限集合}$$

$\{ \tau_1, \dots, \tau_n \}$ 代表系

$$t \in (D \otimes A_F^f)^x$$

$$t z k \sim t \quad t z k = g t \quad g \in D^x$$

$$H(t) := (t^{-1} D t \cap K A_F^x) / F^x \quad \text{は有限アベル群}$$

\searrow fixed part.

$$S_{K, E, \mathcal{O}} = \bigoplus_{i=1}^n W^{H(t_i)}$$

\uparrow
 \mathcal{O} -lattice

$H(t)$ の位数が l と素となるようにとれる.

$$\left(\begin{array}{l} S = \Sigma_p \\ \vdots \\ \text{補助的な害のない素点} \\ \text{をもちこむ} \\ \text{=とによって} \end{array} \right)$$

→ projector \rightarrow $\langle u \rangle$

$$W^{H(t_i)} \subset W$$

直和因子.

$\rightsquigarrow \mathcal{O}[\Delta]$ - free