2010-2-1

Lifting theorem

$$\left\{\begin{array}{l} \rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathcal{O}_\lambda) \quad \ell\text{-adic rep} \\ F/\mathbb{Q} \text{ 総実 Galois 拡大 } \rho|G_F \text{ modular とする} \\ \Rightarrow \exists (\rho_\mu)_\mu \quad \underbrace{G_{\mathbb{Q}} \text{ の}}_{\text{の表現}} \text{ compatible system} \quad \text{s.t. } \rho = \rho_\lambda \end{array}\right.$$

∵ $1 = \sum_i n_i \operatorname{Ind}_{G_{F_i}}^{G_{\mathbb{Q}}} 1$ as Virtual rep
(⟺ trace が等しい.)
$n_i \in \mathbb{Z}$

F/F_i 可解 $n_i \in \mathbb{Z}$

$$\rho = \sum n_i \operatorname{Ind}_{G_{F_i}}^{G_{\mathbb{Q}}} \rho|G_{F_i}$$

solvable base change ができる

∴ $\rho|G_F$ modular $\Rightarrow \rho|G_{F_i}$ modular
$\Rightarrow$ compatible system の member

∴ $\exists\ (\rho_{F_i,\mu})_\mu$ compatible system s.t.
$\rho|G_{F_i} = \rho_{F_i,\lambda}$

$\therefore$

$$\rho_\mu = \sum n_i \operatorname{Ind}_{G_{F_i}}^{G_{\mathbb{Q}}} \rho_{F_i,\mu} \qquad \underline{\text{virtual}} \text{ repn of } G_{\mathbb{Q}}$$

と表せる。これが本当に表現であることを見たい。

$$(\rho_\mu, \rho_\mu) = (\rho, \rho) = 1 \qquad \text{キヤク}$$

$\Rightarrow$ ρ_μ は 既約表現 またはその $\underline{-1}$ 倍.

degree を見ると

$$\deg \rho_\mu = \deg \rho = 2 \geq 0 \qquad \therefore -1 \text{ 倍はありえない.}$$

$\therefore$ ρ_μ は $G_{\mathbb{Q}}$ の 2次元表現.

<u>compatible system であること</u>

F/F' solvable とする.

$(\rho_\mu|G_{F'})|G_F = \rho_\mu|G_F$ は modular, compatible system.

solvable base change $\Rightarrow$ $\rho_\mu|G_{F'}$ modular, 〃

p: 素数 $\qquad D_p \subset \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ 分解群

F' : D_p に対応する拡大

F' の素点 $\exists v$ $\qquad F'_v \cong \mathbb{Q}_p$

$\Rightarrow$ compatible $\qquad$ ▨

Hecke 加群の構成

patching　　　Hecke 加群をつくる.

$$\overline{R} \longrightarrow T \curvearrowright M$$

Galois表現をつくる　　　M …有限生成 $\mathcal{O}$ 加群

Tの役割 2つある　　universal defomation space

① $\overline{R} \longrightarrow T$　保型形式に伴う Galois表現の構成とその大域·局所整合性

/$\mathbb{Q}$　modular form, modular curve

/F : Hibert modular form に伴う

Jacquet-Langlands 対応を用いる

$GL_2(F)$ の modular form $\longleftrightarrow$ $D^\times$ の modular form

…Hibert modular variety

D : quaternion alg / F

いろいろとりうる

…Shimura curve (1次元)

(↑ modular curve とよく似ている)

② $T \curvearrowright M$

∵ Hecke 加群

Jaquet - Langlands - 清水対応

D $\qquad$ $D^\times$ の modular form

有限個の点

rem

- $\mathcal{O}[\Delta]$-free ‥‥ ②では非常に簡単 (位相幾何なし)
- ① 現在唯一数論幾何が使われている部分.

以下 ② の話.

$[F:\mathbb{Q}]$ 偶数

D/F quaternion algebra を次のようにとる

- すべての有限素点で split
  i.e. $D \otimes F_v \simeq M_2(F_v)$ 行列環
- 〃 無限素点で ramify
  $D \otimes F_v \simeq \mathbb{H}$

reciprocity. 唯一つ存在.

split しない素点の数 $\longleftrightarrow$ Shimura var の次元

$$\therefore \ (D \otimes \mathbb{A}_F^f)^\times \simeq GL_2(\mathbb{A}_F^f)$$

finite adele

character

fin. order

$$\chi : \mathbb{A}_F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times \qquad \chi = N_{F/\mathbb{Q}}^{k-2} \cdot \varepsilon \quad \text{fix}$$

weight k char ε の Hilbert modular cusp form の空間

$$S_{k,\varepsilon} \hookrightarrow \varinjlim_{\substack{K \subset GL_2(\mathbb{A}_F^f) \\ \text{open cpt subgroup}}} \Gamma\Big(\underbrace{GL_2(F)\backslash (GL_2(\mathbb{A}_F^f)/K \times X)}_{}, \omega^{\otimes k}\Big)^{\varepsilon}$$

Hilbert modular var $/\mathbb{C}$

$$X = \prod_{v|\infty} (\mathbb{C} - \mathbb{R})$$

cusp の条件

$GL_2(\mathbb{A}_F^f)$ の admissible repn $/\mathbb{C}$

JL 対応の GL_2 side

〃 D の方.

$$S^D_{k,\varepsilon} = \lim_{\substack{K \subset (D\otimes \mathbb{A}^f_F)^\times \\ \text{open cpt subgroup}}} \Gamma\big(\underbrace{D^\times \backslash (D\otimes \mathbb{A}^f_F)/K}_{\text{有限集合}}, W\big)^\varepsilon$$

$$W = \bigotimes_{v|\infty} \mathrm{Sym}^{k-2} V_v$$

V_v: $D^\times \subset (D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^\times$ の表現

$$(D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^\times = \prod_{v|\infty} GL_2(\mathbb{C})$$

各 v 成分の自然な表現が V_v.

$S^D_{k,\varepsilon}$ 　 $(D\otimes \mathbb{A}^f_F)^\times$ の adm rep $/\mathbb{C}$.

J-L 対応

$$\exists\ \begin{array}{ccc} S_{k,\varepsilon} & \simeq & S^D_{k,\varepsilon} \\ \circlearrowright & & \circlearrowright \\ GL_2(\mathbb{A}^f_F) & \simeq & (D\otimes \mathbb{A}_F)^\times \\ \cup \text{ open cpt} & & \cup \\ K & \longleftrightarrow & K^D \end{array}$$

(有限集合は compact)

$$S_{k,\varepsilon}^K \simeq S^{D,K}_{k,\varepsilon}$$

K-fixed part
有限次元

$T(K) \simeq T(K^D)$ 加群の同型

① ②

$\mathbb{C}$-vect space を $\mathbb{Q}$ 加群になおす必要あり.

有限生成

$\downarrow$

$S^{D,K}_{k,\varepsilon} \xRightarrow{\text{修正}}$

$\rho : D^\times \longrightarrow GL(W)$

$$S^{D,K}_{k,\varepsilon} = \left\{ f : (D \otimes \mathbb{A}^f_F)^\times \longrightarrow W \;\middle|\; f(gtzk) = \rho(g)\,\chi(z)\,f(t) \right\}$$

ε-part

$D^\times$ K

$(D \otimes \mathbb{A}^f_F)^\times$ $\quad \mathbb{A}^{f\,\times}_F \subset (D \otimes \mathbb{A}^f_F)^\times$

center

$\rho(g) \leftarrow$ 分母があるかも global なので

$\mathbb{Q}$-mod にする obstr.

∴ これの E_λ 構造は定義できるが, $\mathcal{O}_\lambda$ は無理

$f \in S^{D,K}_{k,\varepsilon}$ のかわりに

$$f_1 \in \qquad f_1(t) := \rho(t_\ell)^{-1} f(t)$$

t の ℓ-part

$$\begin{array}{ccc} (D\otimes \mathbb{A}_F^f)^\times & \longrightarrow & (D\otimes \mathbb{Q}_\ell)^\times \\ \Psi & & \Psi \\ t & \longmapsto & t_\ell \end{array}$$

とすると $\mathcal{O}_\lambda$ 構造が入る.

次のことと似ている

$\boxed{\text{よりみち}}$

<u>代数的　量指標</u>にともなう ℓ 進表現

(虚数乗法論)　　　(cf Serre の本)

F, E 代数体　　S : F の素点の有限集合　$S_\infty \subset S$

$$\chi : \bigoplus_{v \notin S} \mathbb{Z} \longrightarrow E^\times$$

に対し、

$$\chi_{alg} : F^\times \longrightarrow E^\times \quad \text{algebraic な準同型.}$$

s.t. $\quad a \in F^\times \quad a \gg 0$　(totally positive すべての実素点で >0)

かつ $a \equiv 1 \bmod \exists N > 0$

$(v | N \Rightarrow v \in S)$

a が生成する pr. ideal

$$\Longrightarrow \quad \chi((a)) = \chi_{alg}(a)$$

<u>例</u> $F=\mathbb{Q}$, $S=\{\infty\}$ $E=\mathbb{Q}$

$p \longmapsto p$ $\chi_{alg}=\mathrm{id}$ $N=1$

・∞ を考えると $F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times$ の $(E\otimes\mathbb{R})^\times$ 値の指標

・有限素点 $v|l$ を考えると G_F^{ab} の l進指標

$\chi_{alg}=1$ なら類体論そのもの.

(像が有限集合).

一般には像が無限.

$$0 \to \bigoplus_{v\nmid S} \mathbb{Z} \to \mathrm{coker}$$

$$\bigoplus_{v\nmid S} \mathbb{Z} \to \mathbb{A}_F^\times/K \times (F\otimes\mathbb{R})^\times_{>0} \longrightarrow \bigoplus_{\substack{v|S\\ \nmid\infty}} F_v^\times/K_v \times \bigoplus_{v\,実} F_v^\times/F_{v>0}^\times \to 0$$

$$(F\otimes\mathbb{R})^\times_{>0} \to \mathrm{coker}$$

open cpt $K \subset (\mathbb{A}_F^f)^\times$

Nに対応

exact

近似定理

$$F^\times \to (F\otimes\mathbb{R})^\times_{>0}, \qquad F^\times \to \bigoplus_{\substack{v|S\\ \nmid\infty}} F_v^\times/K_v \times \bigoplus_{v\,実} F_v^\times/F_{v>0}^\times$$

$$0 \to \left\{ a\in F^\times \;\middle|\; \begin{matrix} a\gg 0 \\ a\equiv 1\ (N)\end{matrix} \right\} \to F^\times$$

$$\left\{ a\in F^\times \;\middle|\; \begin{matrix} a\gg 0 \\ a\equiv 1\ (N)\end{matrix} \right\} \to \bigoplus_{v\nmid S} \mathbb{Z}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & \\
 & \bigcirc \arrow[u] \arrow[r, "\simeq"] & \bigcirc \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & \displaystyle\bigoplus_{v \nmid S} \mathbb{Z} \arrow[u] \arrow[r] & \mathbb{A}_F^\times / K \times (F \otimes \mathbb{R})^\times_{>0} \arrow[u] \arrow[r] & \displaystyle\bigoplus_{\substack{v \mid S \\ v \nmid \infty}} F_v^\times / K_v^\times \oplus \bigoplus_{v:\text{実}} F_v^\times / F^\times_{v>0} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \left\{ a \in F^\times \,\middle|\, \begin{array}{l} a \gg 0 \\ a \equiv 1 \ (N) \end{array} \right\} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d, dash, dotted] & F^\times \arrow[u] \arrow[ur] & 0 \\
 & \text{あ} & &
\end{tikzcd}$$

あ を

$$\begin{array}{c} (E \otimes \mathbb{R})^\times \\ \uparrow \chi \times \chi_{alg}^{-1} \\ \oplus\, \mathbb{Z} \times (F \times \mathbb{R})^\times \\ \uparrow \mathrm{diag} \\ \left\{ a \in F^\times \,\middle|\, \begin{array}{l} a \gg 0 \\ a \equiv 1\ (N) \end{array} \right\} \end{array}$$

とすると. 指標が誘導される.

$$\mathbb{A}_F^\times \longrightarrow (F \otimes \mathbb{R})^\times \xrightarrow{\chi_{alg,\infty}} (E \otimes \mathbb{R})^\times$$

$$\chi \cdot \chi_{alg,\infty}^{-1} : \mathbb{A}_F^\times / F^\times \longrightarrow (E \otimes \mathbb{R})^\times$$

$$\mathbb{A}_F^\times \longrightarrow (F \otimes \mathbb{Q}_\ell)^\times \xrightarrow{\chi_{alg,\ell}} (E \otimes \mathbb{Q}_\ell)^\times$$

$$\chi \cdot \chi_{alg,\ell}^{-1} : \mathbb{A}_F^\times / \underset{\cdot (F \otimes \mathbb{R})^\times_{>0}}{F^\times} \longrightarrow (E \otimes \mathbb{Q}_\ell)^\times$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{A}_F^\times / F^\times \cdot (F \otimes \mathbb{R})^\times_{>0} \\ \wr\!\wr \text{ --- 類体論} \\ G_F^{ab} \end{array}$$

$\boxed{\text{よりみち}}$ 終

$$f_1(gtzk) = \rho(\cancel{g}\, t_\ell z_\ell k_\ell)^{-1} f(gtzk)$$

$$f(gtzk) = \cancel{\rho(g)}\, \chi(z) f(t)$$

$$= \chi(z)\, \rho(z_\ell)^{-1} \underbrace{\rho(t_\ell)^{-1} f(t)}$$

$$= \chi(z)\, \rho(z_\ell)^{-1} f_1(t)$$

$$S^{D,K}_{k,\varepsilon}{}' := \left\{ f : (D\otimes \mathbb{A}_F^f)^\times \to W \;\middle|\; f_1(gtzk) = \underbrace{\chi(z)\, \rho(z_\ell)^{-1} \rho(k_\ell)^{-1}}_{\psi(z)} f_1(t) \right\}$$

$k_\ell \subset K_\ell$

$$\psi : \mathbb{A}_F^{f,\times} \to E_\lambda^\times$$

W: E_λ 線型空間 $\supset W_{\mathcal{O}}$ $\mathcal{O}$ lattice, K_ℓ-stable

をとることで $S^{D,K}_{k,\varepsilon}$ の $\mathcal{O}$-lattice が定義される

$\curvearrowleft$ $T(K)_{\mathcal{O}}$ - module

その局所化として T, M を定義

f はこの上の関数 なので有限ﾖ成

$$D^\times \backslash (D \otimes \mathbb{A}_F^f)^\times / K \cdot \mathbb{A}_F^\times \quad : \text{有限集合}$$

$$\begin{array}{c} \text{\rotatebox{90}{$\subset$}} \\ \{t_1, \cdots, t_n\} \quad \text{代表系} \end{array}$$

$t \in (D \otimes \mathbb{A}_F^f)^\times$

$$tzk \sim t \qquad tzk = gt \quad g \in D^\times$$

$$H(t) := (t^{-1} D t \cap K \mathbb{A}_F^\times) / F^\times \quad \text{は有限アーベル群}$$

fixed part.

$$S_{k,\varepsilon,\mathcal{O}}^{D,K} = \bigoplus_{i=1}^{n} W^{H(t_i)}$$

$\mathcal{O}$-lattice

$H(t)$ の位数が l と素となるようにとれる.

($S \supset \Sigma_p$

補助的な害のない素点をもちこむ

ことによって)

$\longrightarrow$ projector がつくれる

$$W^{H(x_i)} \subset W$$

直和因子.

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{O}[\Delta]$ -free