

2010-1-25

Lifting theorem

$$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(\mathbb{F})$$

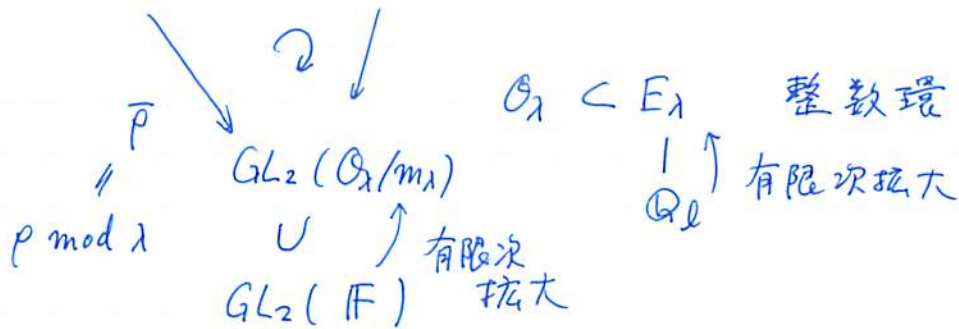
連続表現
odd

\mathbb{F} : 有限体
 $ch = l$

$\bar{\rho} | G_{\mathbb{Q}(\zeta_l)}$ abs irred

(level N wt k)

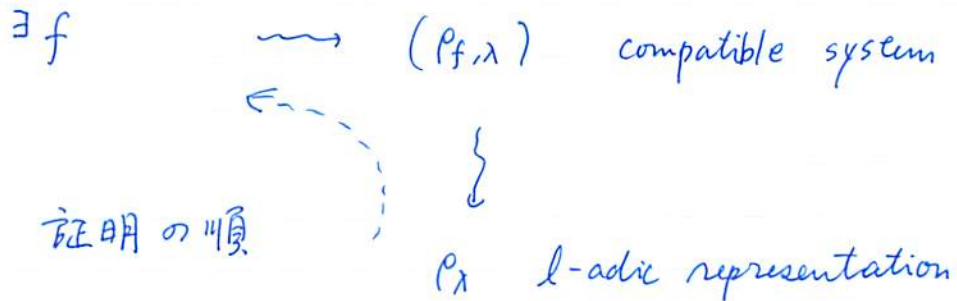
$$\Rightarrow G_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\exists \rho} GL_2(\mathcal{O}_{\lambda}) \text{ s.t.}$$



Serre 予想の証明の一部として出てきた.

Serre 予想

「 $\bar{\rho}$: modular」



Taylor の potential modularity

$\exists F$ 総実 Galois 拡大

$\bar{\rho}/G_F$ modular

(\exists Hilbert modular form に対応する automorphic repr)

$\rho_{\pi,\lambda}$

$\rho_{\pi,\lambda}$: l -adic repr.

閉部分群 Λ の制限
については OK.

($F=Q$ なら
終わり)

どうやって
= にもとめるか
か Lifting. thm.

まず = にも
帰り道 を
見つける。

どうやって?

$R=T$ について

\bar{R}_Q 分岐条件と \det を指定した $\bar{\rho}$ の
普通変形環 (枠なし)

fix $\mathcal{O} \subset E$
| 有限次拡大
 \mathcal{O}_ℓ
剰余体 \mathbb{F} .

Lifting theorem は 次の主張

$$\exists \bar{R}_Q \longrightarrow \mathcal{O}'$$

\mathcal{O}' は E の有限次拡大 E' の
整数環

$$\uparrow 1:1$$

$\bar{\rho}$ の変形 $V_{\mathcal{O}'}$ の同型類

$$\left[\begin{array}{c} \bar{R}_Q \otimes E \neq 0 \\ \mathcal{O} \end{array} \right]$$

rank 2 自由 \mathcal{O}' 加群 G_Q が作用

\bar{R}_Q 完備局所ネーター環 \mathcal{O} 上の環

これを示せばよい

示すべきこと.

$$1. \dim \bar{R}_Q \cong 1$$

変形環がある程度大きい

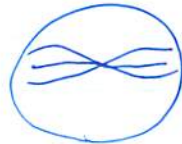


$$\star \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Q}$$

2点 dh l 0 の点.

$$2. \bar{R}_Q \text{ } \mathbb{Q} \text{ 加群 として有限生成}$$

ある程度小さい



$$\star \rightarrow$$

$$2 \text{ から } \dim \bar{R}_Q \otimes_{\mathbb{Q}} E = 0 \text{ とすると } \bar{R}_Q \text{ は}$$

有限となり, $\mathbb{1}$ に反する.

(de Jong)

2. (の方が deep)

potential modularity + $R=T$ をつかう

F/\mathbb{Q} 総実 $\bar{\rho}|_{G_F}$ modular

$$R=T$$

\bar{R}_F $\bar{\rho}|_{G_F}$ の 分岐条件と det を指定して
(存在し) 普遍変形環 \uparrow

$\bar{R}_\mathbb{Q}$ のを \mathbb{Q} へ継ぐ
(制限)

compatible に \mathbb{Q} へ \mathbb{Z} へ

$$G_\mathbb{Q} \supset G_F$$

$$U \quad U$$

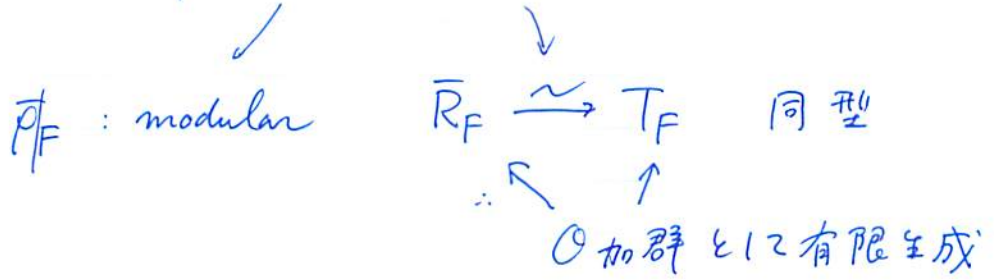
$$G_{\mathbb{Q}_p} \supset G_{F_v}$$

$V_{\bar{R}_\mathbb{Q}}$ universal deformation : $G_\mathbb{Q}$ の表現

$\forall \bar{R}_Q \mid G_F$ $\bar{P} \mid G_F$ の \bar{R}_Q への制限

\bar{R}_F の universality $\Rightarrow \bar{R}_F \rightarrow \bar{R}_Q$
 \mathbb{Q} 上の ring hom

\Rightarrow pot mod + $R=T$ だろうか



\bar{R}_Q が \bar{R}_F -mod と 12 有限生成 を示せばよい.

\uparrow
complete
loc. Noether ring

剰余体 \mathbb{F}

フイバー \downarrow vector space と 12

$\bar{R}_Q \otimes_{\bar{R}_F} \mathbb{F}$

: \mathbb{F} 上有限次元

\leftarrow 環 と 12 の Krull dim = 0 と言えばよい

② $A : \begin{matrix} \bar{R}_Q \\ \bar{R}_F \end{matrix} \otimes F$ の高環かつ整域 $\Rightarrow A$ は F の有限次拡大

\bar{R}_Q は \mathbb{Q} 上 $\text{Tr } \rho^{\text{min}}(\sigma)$ ($\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$) で

位相的に生成されている。

$$\begin{array}{ccc} \bar{\rho}|_{G_F} : G_F \longrightarrow GL_2(F) & \text{像は有限.} \\ \cap \text{ open} & \downarrow \\ \rho_A : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(A) \end{array}$$

任意の $\sigma \in G_A$ に対し. $\rho_A(\sigma)$ 位数有限.

$\therefore \text{Tr } \rho_A(\sigma)$ は F 上代数的.

A は F 上代数的なもので生成されるから

位相的に
有限個

A は F の有限次拡大. \square

これをやることで 2. が示された

1. $\dim \bar{R}_{\mathbb{Q}} \geq 1$ について

↑
今までの次元は \mathbb{Q} 上の次元を表している = \dim

今までの記号に合わせると $\dim \bar{R}_{\mathbb{Q}} \geq 0$ ということ。

$$\mathbb{Z}[[X]] \longrightarrow \bar{R}^{\square} \simeq \bar{R}[[Y]]$$

↑
 \bar{R}

formally smooth

添字 \mathbb{Q} は suppress.

(\mathbb{Q} しか出てこない)
他でも同様

$$\dim \bar{R}^{\square} = \dim \bar{R} + \#Y$$

global cancel

$$4\#\Sigma_p - \dim H^0(G_S, \text{ad } \rho)$$

↑
0 じゃない

$$\dim \mathbb{Z}[[X]] = 4\#\Sigma_p + \underbrace{[F:\mathbb{Q}] + \dim \text{Sel}_S}_{= 1}$$

$$+ \sum_{v \in \Sigma_p} H^0(G_v, \text{ad } \rho)$$

Wiles の 公式
 $\dim \text{Sel}_S +$

$$- \dim H^0(G_S, \text{ad } \rho)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{L}[[X]] / \underset{\substack{\text{"} \\ \text{ker}}}{J} & \xrightarrow{\sim} & R^{\square} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \overline{L}[[X]] / J \text{ の像} & \xrightarrow{\sim} & \overline{R}^{\square}
 \end{array}$$

det の条件 T への 21、
分岐条件を忘れる

\leftarrow = 53 でやる。

$$\# \text{rel} = \dim \underset{\substack{\vdots \\ L[[X]] \text{ の 極大 行-アノ}}}{J/mJ}$$

示したいこと

$$\dim \overline{R} \geq \underline{m}$$

$$\dim \overline{R}^{\square} \geq \dim \overline{L}[[X]] - \# \text{rel}$$

(各 rel を入れることで
 \overline{R}^{\square} の次元が 1 つ下がるか
 変わらないか)

$$\Leftrightarrow \dim \text{Sel}_{S^*} \geq \# \text{rel}$$

$$H^*(G_s, M) = H^*(C(G_s, M))$$

Galois cohom

↑
cochain complex

cochain cpx の
double complex

$$H_c^*(G_s, M) := H^*(C(G_s, M) \rightarrow \bigoplus_{v \in \Sigma_p} C(G_v, M))$$

↑
cpt
supp.

普通の複体の cohomology など

→ long exact seq

$$\hookrightarrow H_c^k(G_s, M) \rightarrow H^k(G_s, M) \rightarrow \sum_{v \in \Sigma_p} H^k(G_v, M)$$

$$\hookrightarrow H_c^{k+1}(G_s, M) \rightarrow$$

$$0 \rightarrow \text{Sel}_s \rightarrow H^1(G_s, \text{ad}^0) \rightarrow \bigoplus_{v \in \Sigma_p} H^1(G_v, \text{ad}^0)$$

$$\hookrightarrow H_c^2 \rightarrow H^2(\quad) \rightarrow \bigoplus H^2(\quad)$$

$$\hookrightarrow H_c^3 \rightarrow 0 \quad (l \neq 2)$$

↓ dual

$$H^0(G_s, \text{ad}^0(1)) = 0$$

$\bar{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}}(S_0)}$: abs. irred

1.

$$\left(\begin{array}{l} \dim H_c^2 - \dim \text{Sels} \\ + \dim H^0 \\ - \sum_{v \in \Sigma_p} \dim H^0(G_v) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \dim H^2(G_S) - \dim H^1(G_S) + \dim H^0 \\ - \sum_{v \in \Sigma_p} \left(\dim H^2(G_v) - \dim H^1(G_v) \right) \\ + \dim H^0(G_v) \end{array} \right)$$

$p=l$

$$\text{右辺} = \chi(G_S, ad^0) - \sum_{v \in \Sigma_p} \chi(G_v, ad^0)$$

$$= \left(\begin{array}{l} \text{Euler 数の} \\ \text{公式} \\ \text{local / global} \\ \text{類体論} \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} - \cancel{\dim ad^0} + \dim (ad^0)^{G_{\mathbb{R}}} \\ - (-\cancel{\dim ad^0}) \end{array} \right)$$

\swarrow 実
 \swarrow 1次元 equal $(-1, -1, 1)$
 \uparrow $v|p=l$ の contribution

$$\sum_{v|oo} \dim (ad^0)^{G_{F_v}}$$

$$\therefore \boxed{\dim \text{Sels}^* = \dim H_c^2(G_S, ad^0)}$$

$p \neq l \rightarrow \tau_2$

$$\text{不可逆性: } \dim H_c^2 \geq \# \text{rel}$$

$$L[[X]] \twoheadrightarrow R^0 \simeq L[[X]]/J$$

$$(*) \quad 0 \rightarrow J/mJ \rightarrow L[[X]]/mJ \rightarrow R^0 \rightarrow 0$$

exact

$$1 \rightarrow \text{ad} \otimes J/mJ \rightarrow GL_2(L[[X]]/mJ) \rightarrow GL_2(R^0) \rightarrow 1$$

\uparrow univ def
 G_S 非平凡性

$$\rightsquigarrow H^2(G_S, \text{ad} \otimes J/mJ) \text{ 12 class の def } \exists \text{ した}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_C^2 \text{ 条件} \\ \text{ad}^0 \text{ 条件} \end{array} \right.$$

□ \exists 条件 \det \exists 指定.

$$\rightsquigarrow H_C^2(G_S, \text{ad}^0 \otimes J/mJ) \ni C \text{ 決定する.}$$

SI

$$H_C^2(G_S, \text{ad}^0) \otimes J/mJ$$

Contraction (2.5)

C は $(\mathfrak{J}/m\mathfrak{J})^* \longrightarrow H_C^2(G_S, ad^0)$ を定める.

これが単射であることはいえはよい.

$u: \mathfrak{J}/m\mathfrak{J} \longrightarrow \mathbb{F}$ 線型形式

$u_*(C) \in H_C^2$ ならば $u=0$ である. $u \neq 0$ ならば $u_*(C) = 0$.

(*) $\exists u$ を push すると.

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow R_u \xrightarrow{\text{def}} R^\square \longrightarrow 0$$

H_C^2 ではない.

$u_*(C) = 0$ とする. $H^2(G_S, ad^0)$ の $\bar{\pi}$ とは 0 .

C の def により

trivial extension

$$GL_2(R_u) \longrightarrow GL_2(R^\square)$$

$$\begin{array}{ccc} & \nwarrow & \uparrow \text{univ} \\ & \text{---} & G_S \end{array}$$

det を保つ表現
として lift する.

$$H^1 \rightarrow H_{loc}^1 \rightarrow H_c^2 \rightarrow H^2 \rightarrow$$

H_c^2 の元は $1 \neq 0 \Rightarrow$ 枠がつか.

$$\Rightarrow \quad R_u \rightarrow R^0$$



section がある. $R_u = R^0 \oplus \mathbb{F}$
 自明な拡大

$L[[X]] \rightarrow R^0$ の定義は

接空間に同型を引きおこすように
定義

$$\Rightarrow L[[X]] \rightarrow R_u \text{ は全射でない}$$

$$\Leftrightarrow u = 0$$



Lifting theorem

(compatible system version)

$$\rho : G_S \longrightarrow GL_2(\mathbb{Q}_\lambda) \quad \text{badic rep.}$$

総実 Galois 拡大 F/\mathbb{Q} $\rho_\lambda |_{G_F}$ は modular とする.

$\Rightarrow \exists (\rho_\mu)_\mu$ compatible system $\rho_\lambda = \rho$
 となるものが存在する

Brumer induction

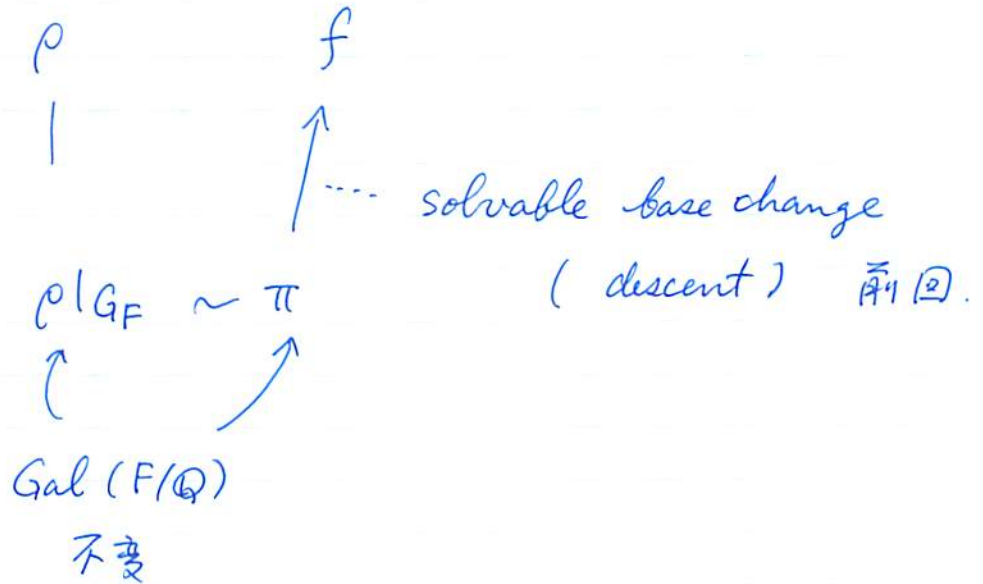
Artin L-関数の 関数等式と解析接続

Taylor : potential modularity

進表現の L 関数 $\sim \sim$
 その system 片取.

1) 上かればみんな上がる

もし F/\mathbb{Q} が solvable なら, ρ の modularity
 がいさなりわかる.



G : 有限群 1 : G の自明指標

このとき G の 部分群の族 H_i 整数 n_i の族
 が存在して

$$1 = \sum n_i \text{Ind}_{H_i}^G 1$$

\uparrow \uparrow
 指標の等式 誘導表現

ref. Curtis-Reiner

Methods of repr. theory
 p 382 Th 15d0

可解 \neq 可解
 hyper-elementary
 p 群 \times cyclic