2010-1-25

Lifting theorem

$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{F})$　　連続表現　　$\mathbb{F}$: 有限体

odd　　$ch = \ell$

$\bar{\rho}|G_{\mathbb{Q}(\zeta_\ell)}$ abs irred

(level N wt k)

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} G_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\exists \rho"] \arrow[dr, "\bar{\rho}"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\circlearrowright"] & GL_2(\mathcal{O}_\lambda) \arrow[d] \\ & GL_2(\mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda) \end{tikzcd} \quad \text{s.t.}$$

$\bar{\rho} = \rho \bmod \lambda$

$GL_2(\mathcal{O}_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda) \supset GL_2(\mathbb{F})$　有限次拡大

$\mathcal{O}_\lambda \subset E_\lambda$　整数環

$E_\lambda \mid \mathbb{Q}_\ell$　有限次拡大

Serre予想の証明の一部として出てきた.

Serre 予想

「$\overline{\rho}$: modular」

$\exists f \rightsquigarrow (\rho_{f,\lambda})$ compatible system

ρ_λ l-adic representation

証明の順

Taylor の potential modularity

$\exists F$ 総実 Galois 拡大

$\overline{\rho}|_{G_F}$ modular

($\exists$ Hilbert modular form に対応する automorphic repr)

$(\rho_{\pi,\lambda})$

$\rho_{\pi,\lambda}$: l-adic repr.

開部分群への制限については OK.

($F=\mathbb{Q}$ なら終わり)

どうやったらここにもどれるかが Lifting thm.

まずここに帰り道を見つける.

どうやって？

$R=T$ をつかう

$\bar{R}_Q$　分岐条件と det を指定した $\bar{\rho}$ の
　　普遍変形環（枠なし）

fix
$\mathcal{O} \subset E$
　　　$|$ 有限次拡大
　　$\mathbb{Q}_\ell$
　　　剰余体 $\mathbb{F}$.

Lifting theorem は次を主張

$\exists\ \bar{R}_Q \longrightarrow \mathcal{O}'$　　$\mathcal{O}'$ は E の有限次拡大 E' の整数環

$\updownarrow$ 1:1　　　　　$\boxed{\bar{R}_Q \otimes_{\mathcal{O}} E \neq 0}$

$\bar{\rho}$ の変形 $V_{\mathcal{O}'}$ の同型類
　　⋮
　　rank 2 自由 $\mathcal{O}'$ 加群　$G_{\mathbb{Q}}$ が作用

$\bar{R}_Q$　完備局所ネーター環　$\mathcal{O}$ 上の環

これを示せばよい

示すべきこと.

1. $\dim \overline{R}_Q \geqq 1$

変形環がある程度大きい

Spec $\overline{R}_Q$

generic fiber 上にも

Spec $\mathcal{O}$

2点 ch ℓ 0 の点.

2. $\overline{R}_Q$ $\mathcal{O}$ 加群として有限生成

ある程度小さい

2 かつ $\dim \overline{R}_Q \underset{\mathcal{O}}{\otimes} E = 0$ とすると $\overline{R}_Q$ は

有限となり, 1 に反する.

(de Jong)

2. (の方が deep)

potential modularity + $R=T$ をつかう

$F/\mathbb{Q}$ 総実 $\bar{\rho}|G_F$ modular

$R=T$

$\bar{R}_F$ $\bar{\rho}|G_F$ の $\underline{\text{分岐条件と det}}$ を指定した

(枠なし) 普遍変形環

$\bar{R}_{\mathbb{Q}}$ のをひき継ぐ

(制限)

compatible になっている

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{Q}} & \supset & G_F \\ \cup & & \cup \\ G_{\mathbb{Q}_p} & \supset & G_{F_v} \end{array}$$

$V_{\bar{R}_{\mathbb{Q}}}$ universal deformation : $G_{\mathbb{Q}}$ の表現

$V_{\overline{R}_Q}|_{G_F}$　　$\overline{\rho}|_{G_F}$ の $\overline{R}_Q$ への制限

$\overline{R}_F$ の universality $\Rightarrow$ $\overline{R}_F \to \overline{R}_Q$
$\mathcal{O}$上の ring hom

ここで pot mod + R=T をつかう

$\overline{\rho}_F$: modular　　$\overline{R}_F \xrightarrow{\sim} T_F$ 同型

∴ $\mathcal{O}$加群として有限生成

$\overline{R}_Q$ が $\overline{R}_F$-mod として有限生成 を示せばよい.

complete
loc. Nöther ring
剰余体 $\mathbb{F}$

ファイバー

$\overline{R}_Q \otimes_{\overline{R}_F} \mathbb{F}$: $\underbrace{\mathbb{F}\text{上有限次元}}$ vector space として

環としての K rull dim
$=0$ を言えばよい

◎ A : $\bar{R}_{\mathbb{Q}} \underset{\bar{R}_{\mathbb{F}}}{\otimes} \mathbb{F}$ の商環かつ整域 $\Rightarrow$ A は $\mathbb{F}$ の有限次拡大

$\bar{R}_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ 上 $\mathrm{Tr}\,\rho^{univ}(\sigma)$ $(\sigma \in G_{\mathbb{Q}})$ で

位相的に生成されていた.

$$\begin{array}{ccc} \bar{\rho}|_{G_F} : G_F & \longrightarrow & GL_2(\mathbb{F}) \\ \cap\ \text{open} & & \downarrow \\ \rho_A : G_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & GL_2(A) \end{array}$$

像は有限.

任意の $\sigma \in G_A$ に対し. $\rho_A(\sigma)$ 位数有限.

$\therefore$ $\mathrm{Tr}\,\rho_A(\sigma)$ は $\mathbb{F}$ 上 代数的.

A は $\mathbb{F}$ 上 代数的 なもので 位相的に 生成されるから 有限個

A は $\mathbb{F}$ の有限次拡大. ▨

これを用いることで 2. が示された

1. $\dim \overline{R}_{\mathbb{Q}} \geqq 1$ について

今まで次元は $\mathbb{Q}$ 上の次元を表していた

dim

今までの記号にあわせると $\dim \overline{R}_{\mathbb{Q}} \geqq 0$ ということ.

$$\Lambda[[X]] \twoheadrightarrow \overline{R}^{\square} \simeq \overline{R}[[Y]]$$

$$\overline{R} \to \overline{R}^{\square}$$

formally smooth

添字 $\mathbb{Q}$ は suppress.

($\mathbb{Q}$ しか出てこないし 他でも同様

$$\dim \overline{R}^{\square} = \dim \overline{R} + \# Y$$

global cancel

$$4\#\Sigma_p - \dim H^0(G_S, \mathrm{ad}\rho)$$

わく

0なし

$$\dim \Lambda[[X]] = 4\#\Sigma_p + \underbrace{[F:\mathbb{Q}]}_{=1} + \dim \mathrm{Sel}_S + \sum_{v \in \Sigma_p} H^0(G_v, \mathrm{ad}^0\rho) - \dim H^0(G_S, \mathrm{ad}\rho)$$

Wilesの公式

$\dim \mathrm{Sel}_{S^*}$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda[[X]]/\underset{\substack{\shortparallel \\ \ker}}{J} & \xrightarrow{\sim} & R^{\square} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda[[X]]/J\text{の像} & \xrightarrow{\sim} & \overline{R}^{\square} \end{array}$$

det の条件だけのこし、分岐条件を忘れる

← こちらでやる.

$$\# \mathrm{rel} = \dim J/\mathfrak{m}J$$

$\mathfrak{m}$：$\Lambda[[X]]$ の極大イデアル

示したいこと

$$\dim \overline{R} \underset{\sim\sim}{\geq 0}$$

$$\dim \overline{R}^{\square} \geq \dim \Lambda[[X]] - \# \mathrm{rel}$$

（各 rel を入れることで $\overline{R}^{\square}$ の次元が1つさがるか変わらないか.）

$$\Longleftrightarrow \dim \mathrm{Sel}_{S^*} \geq \# \mathrm{rel}$$

$$H^*(G_S, M) = H^*(C(G_S, M))$$

Galois cohom　　　　cochain complex

cochain cpx の double complex

$$H_c^*(G_S, M) := H^*\left(C(G_S, M) \longrightarrow \bigoplus_{v \in \Sigma_p} C(G_v, M)\right)$$

cpt supp.

普通の複体の cohomology をとる

⇝ long exact seq

$$\to H_c^k(G_S, M) \longrightarrow H^k(G_S, M) \longrightarrow \sum_{v \in \Sigma_p} H^k(G_v, M) \to$$

$$\to H_c^{k+1}(G_S, M) \longrightarrow$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Sel}_S \longrightarrow H^1(G_S, ad^0) \longrightarrow \bigoplus_{v \in \Sigma_p} H^1(G_v, ad^0) \to$$

$$\to H_c^2 \longrightarrow H^2(\quad) \longrightarrow \bigoplus H^2(\quad) \to$$

$$\to H_c^3 \longrightarrow 0 \quad (\ell \neq 2)$$

$\updownarrow$ dual

$H^0(G_S, ad^0(1)) = 0$　　$\bar\rho|_{G_{\mathbb{Q}(\zeta_\ell)}}$: abs. irred

$\therefore$

$$\left(\begin{array}{l} \dim H^2_c - \dim \mathrm{Sel}_S \\ + \underbrace{\dim H^0}_{=0} \\ - \sum_{v \in \Sigma_p} \dim H^0(G_v) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{l} \dim H^2(G_S) - \dim H^1(G_S) + \dim H^0 \\ - \sum_{v \in \Sigma_p} \left(\dim H^2(G_v) - \dim H^1(G_v) + \dim H^0(G_v) \right) \end{array}\right)$$

$p = \ell$

$$\text{右辺} = \chi(G_S, ad^0) - \sum_{v \in \Sigma_p} \chi(G_v, ad^0)$$

$$= -\cancel{\dim ad^0} + \underbrace{\dim (ad^0)^{G_{\mathbb{R}}}}_{\sum_{v|\infty} \dim (ad^0)^{G_{F_v}}} - (-\cancel{\dim ad^0})$$

実

1 次元

eigval $(-1, -1, 1)$

$v | p = \ell$ の contribution

(Euler 数の公式 local / global 類体論)

$$\therefore \boxed{\dim \mathrm{Sel}_{S^*} = \dim H^2_c(G_S, ad^0)}$$ がわかった

示すべきこと: $\dim H^2_c \geq \# \mathrm{rel}$

$$L[[X]] \twoheadrightarrow R^{\square} \simeq L[[X]]/J$$

(*) $$0 \to J/mJ \to L[[X]]/mJ \to R^{\square} \to 0$$

exact

$$1 \to ad \otimes J/mJ \to GL_2(L[[X]]/mJ) \to GL_2(R^{\square}) \to 1$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \text{univ def} \\ G_S \end{array}$$

キテイをとって

$\rightsquigarrow$ $H^2(G_S, ad \otimes J/mJ)$ に class が def される

H^2_c でない　ad^0 でない

□ を考える　det を指定.

$\rightsquigarrow$ $H^2_c(G_S, ad^0 \otimes J/mJ) \ni C$ が定まる.

$$\begin{array}{c} \wr\wr \\ H^2_c(G_S, ad^0) \otimes J/mJ \end{array}$$

Contraction により

C は $(J/mJ)^* \longrightarrow H^2_c(G_S, ad^0)$ を定める.

これが単射であることをいえばよい.

$u: J/mJ \longrightarrow \mathbb{F}$ 線型形式

$u_*(C) \in H^2_c$ なら $u=0$ をいいたい.
$\overset{\|}{0}$

(*) を u で push すると.

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow R_u \overset{\text{def}}{\longrightarrow} R^\square \longrightarrow 0$$

H^2_c でなく.

$u_*(C)=0$ とする. $H^2(G_S, ad^0)$ の元として 0.

C の def より　trivial extension

$$\begin{tikzcd} GL_2(R_u) \arrow[r] & GL_2(R^\square) \\ & G_S \arrow[u, "\text{univ}"'] \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

det を保つ表現
として lift する.

$$H^1 \longrightarrow H^1_{loc} \longrightarrow H^2_c \longrightarrow H^2 \longrightarrow$$

H^2_c の元として 0 $\Rightarrow$ 枠がつく.

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} R_u \arrow[r] & R^{\square} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

section がある. $R_u = R^{\square} \oplus \mathbb{F}$

自明な拡大

$L[[X]] \longrightarrow R^{\square}$ の定義は

接空間に同型を引きおこすように

定義

$\Rightarrow$ $L[[X]] \longrightarrow R_u$ は全射でない

$\Leftrightarrow$ $u = 0$

$\blacksquare$

Lifting theorem

(compatible system version)

$\rho : G_S \longrightarrow GL_2(\mathcal{O}_\lambda)$ ladic rep.

総実Galois拡大 $F/\mathbb{Q}$

$\rho_\lambda | G_F$ は modular とする.

$\Rightarrow \exists (\rho_\mu)_\mu$ compatible system で $\rho_\lambda = \rho$ となるものが存在する

Brauer induction

Artin L-関数の関数等式と解析接続

taylor : potential modularity

l進表現の L 関数 〜〜

その system 版.

1コ上がればみんな上がる

もし $F/\mathbb{Q}$ が solvable なら、ρ の modularity がいきなりわかる.

$$
\begin{tikzcd}
\rho \arrow[d, dash] & f \\
\rho|G_F \sim \pi \arrow[ur, "\text{solvable base change (descent) 前回}"'] & \\
\text{Gal}(F/\mathbb{Q}) \ \text{不変} \arrow[u] \arrow[u, bend right] &
\end{tikzcd}
$$

G : 有限群　　1 : G の自明指標

このとき G の $\underline{\text{部分群の族 } H_i}$ 整数 n_i の族が存在して

$$1 = \sum n_i \underbrace{\mathrm{Ind}_{H_i}^{G} 1}$$

指標の等式　　誘導表現

可解 もしくは hyperelementary
p群 ∝ cyclic

ref. Curtis-Reiner
Methods of repr. theory
p 382 Th 15d0