2010-1-18

$$\begin{tikzcd}
\Lambda[[X]] \arrow[r, two heads] & \bar{R}^{\square}_{\infty} \arrow[r, two heads] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & T_{\infty} \\
& \mathcal{O}[[\Delta_\infty]][[Y]] \arrow[u] \arrow[ur, "\text{単射}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\underbrace{\Lambda \text{ が整域}}_{\text{略}}$ かつ $\dim \Lambda[[X]] = \dim \mathcal{O}[[\Delta_\infty]][[Y]]$

$\Rightarrow \bar{R}^{\square}_{\infty} \simeq T_{\infty}$

$$\dim \Lambda[[X]] = 3\#\Sigma_p + [F:\mathbb{Q}] + \dim Sel_{S_n} + \sum_{v\in\Sigma_p} \dim \underbrace{H^0(G_v, ad)}_{\dim H^0(G_v, ad^0)+1} - \dim H^0(G_S, ad)$$

$\vee\!\|$

$$\dim \mathcal{O}[[\Delta_\infty]] = \#Q + 4\#\Sigma_p - \dim H^0(G_S, ad)$$

$S_n = Q_n \sqcup S$

$\#Q_n$ は一定

$=$ を示したい

$\therefore$

☆ $$\boxed{\underbrace{[F:\mathbb{Q}] + \dim Sel_{S_n} + \sum_{v\in\Sigma_p} \dim H^0(G_v, ad^0)}_{\text{左辺は } R^0 \text{ の大きさの上からの評価}} \geq \#Q}$$

両辺の差は?

$$\mathrm{Sel}_{S_n} = \mathrm{Ker}\left(H^1(G_{S_n}, ad^0) \to \bigoplus_{v \in \Sigma_p} H^1(G_v, ad^0)\right)$$

一般の Selmer 群 $\qquad S_n \supset \Sigma_p$

$G_S \curvearrowright M$ 有限 G_S 加群

各 $v \in S \cup \{v \mid \infty\}$ に対し.

$$\begin{array}{l} L_v \ (\text{local condition}) \\ \cap \\ H^1(G_v, M) \end{array}$$

$\mathcal{L} = (L_v)_v$

$$\mathrm{Sel}_{\mathcal{L}}(M) = \mathrm{Ker}\left(H^1(G_S, M) \to \bigoplus_{v \in S} H^1(G_v, M)/L_v \right)$$

ぬいたところに
制限すると
L_v に入る.

双対 Selmer 群

$M^*(1) = \mathrm{Hom}(M, \mu_\infty)$ $\qquad$ Kummer dual

$\uparrow$
1 の巾根

$\mathcal{L}^* = (L_v^\perp)_v$

local Tate duality

$$\begin{array}{ccccc} H^1(G_v, M) & \times & H^1(G_v, M^*(1)) & \longrightarrow & H^2(G_v, \mu_\infty) \\ \cup & & \cup & \uparrow & \cap \ \text{inv.} \\ L_v & & L_v^\perp & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

annihilator

perfect pairing.

$\mathrm{Sel}_{\mathcal{L}^*}(M^*(1))$: 双対 Selmer 群

Selmer 群の大きさはわからないが,

dualとの の大きさの比はわかる

—・—

$M = ad^0$ $\quad M^*(1) = ad^0(1)$ $\quad$ ad は selfdual

$$\mathrm{Sel}_{S_n^*} = \mathrm{Ker}\left(H^1(G_{S_n}, ad^0(1)) \to \bigoplus_{v \in S_n \setminus \Sigma_p} H^1(G_v, ad^0(1))\right)$$

$$\mathrm{Sel}_{S^*} = \mathrm{Ker}\left(H^1(G_S, ad^0(1)) \to \bigoplus_{v \in S \setminus \Sigma_p} H^1(G_v, ad^0(1))\right)$$

n なし

とすると.

$$\mathrm{Sel}_{S_n^*} = \ker\left(\mathrm{Ser}_{S^*} \longrightarrow \bigoplus_{v \in Q_n} H^1(G_v, ad^0(1)) \right)$$

$\left(S_n = Q_n \amalg S \quad \text{だったので} \right)$

Wilesの公式

$$\left\{ \begin{aligned} &\dim \mathrm{Sel}_{S_n} - \dim \mathrm{Sel}_{S_n^*} \\ &= \sum_{v \in S_n \cup S_\infty} \left(\dim L_v - \dim H^0(G_v, ad^0) \right) \\ &\quad + \dim H^0(G_S, ad^0) - \dim (G_S, ad^0(1)) \end{aligned} \right.$$

↑ 無限素点

$\boxed{\text{global term.}}$ キヨなし.

$H^0(G_S, ad^0) = 0$ $\because$ $\bar{\rho} : G_S \to GL_2(\mathbb{F})$ 絶対既約 Schur's lemma

$H^0(G_S, ad^0(1)) = 0$ $\because$ $\bar{\rho}|_{G_{F(\zeta_\ell)}}$ も絶対既約 + Schur.

仮定より

$\boxed{\text{local term.}}$

(ア) $v \in \Sigma_p$. のとき $L_v = 0$

(エ) $v \mid \infty$ のとき　　$p \neq 2$. としているので

$$L_v = H^1(G_v, ad^0) = 0$$

$$H^0(G_v, ad^0)$$

F: totally real

complex conj　$\Rightarrow$　$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

odd の仮定　　$V_{\mathbb{F}}$ の作用　　　ad^0

$\therefore \dim H^0 = 1.$

Galois fixed part

ちょうど

$[F:\mathbb{Q}]$ だけ出てくる

(オ) $v \in S \setminus \Sigma_p$ のとき　　$L_v = H^1(G_v, ad^0)$

$$\dim L_v - \dim H^0(G_v, ad^0)$$

$$= \dim H^2(G_v, ad^0)$$

$\left(\begin{array}{l} v \nmid l = p \\ \Sigma_p \supset \{v \mid p\} \end{array} \right.$

$$= \dim H^0(G_v, \underline{ad^0(1)})$$

Kummer dual

local Galois cohom の Euler 数の公式

local Tate duality

v では不分岐

Fr_v の固有値 α_v, β_v

moduli を fine にする素点

害がないための条件 $\dfrac{\alpha_v}{\beta_v}, \dfrac{\beta_v}{\alpha_v}, 1 \not\equiv \underset{N v}{\overset{\|}{q_v}} \mod \ell$

をみたすようにとっていた

$$V_{\mathbb{F}} : \begin{pmatrix} \alpha_v & 0 \\ 0 & \beta_v \end{pmatrix}$$

$$ad^0 : \begin{pmatrix} \alpha_v/\beta_v & & \\ & \beta_v/\alpha_v & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$ad^0(1) : \begin{pmatrix} \alpha_v/\beta_v\, q_v & & \\ & \beta_v/\alpha_v\, q_v & \\ & & 1 \cdot q_v \end{pmatrix}$$

どれも $\not\equiv 1 \mod \ell$.

$\Longrightarrow \quad H^0 = 0.$

(エ) $v \in Q_n$ のとき

$$\cdots = \dim H^0(G_v, ad^0(1))$$

となるところまでは $v \in S \setminus \Sigma_v$ と同じ.

$\boxed{\alpha_v \neq \beta_v \qquad q_v \equiv 1 \mod \ell^n}$ をみたす.

(#)

$$ad^0(1) = \begin{pmatrix} \mp 1 & & \\ & \mp 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim H^0 = 1.$$

各素点ごとに 1コずつ.

local term は以上.

以上をまとめると.

$$\dim Sel_{S_n} - \dim Sel_{S_n^*}$$

$$= - \sum_{v \in \Sigma_p} \dim H^0(G_v, ad^0) \qquad (ア)$$

$$- [F : Q] \qquad (イ)$$

$$+ \# Q \qquad (エ).$$

よって,

p 11-1

☆ の $\boxed{}$ について

$$\underline{\text{左辺} - \text{右辺} = \dim \mathrm{Sel}_{S_n^*}}$$

≥ 0 は dim であるから.

$= 0 \Leftrightarrow \mathrm{Sel}_{S_n^*} = 0$

がわかった.

ここが単射を示したい.

$$\mathrm{Sel}_{S_n^*} = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Sel}_{S^*} \longrightarrow \bigoplus_{v \in Q_n} H^1_f(G_v, ad^0(1))\right)$$

$H^1(\ )$ でなく

$H^1_f(\ )$ にしてよい

∵

$$G_{S_n} \twoheadrightarrow G_S$$

$$0 \to H^1(G_S, ad^0(1)) \to H^1(G_S, ad^0(1)) \to \bigoplus_{v \in Q_n} \frac{H^1(G_v, ad^0(1))}{H^1_f(G_v, ad^0(1))}$$

$$H^1_f(G_v, ad^0(1)) = \mathrm{Ker}\,(H^1(G_v, ad^0(1)) \to H^1(\underset{\text{inertia}}{I_v}, ad^0(1)))$$

$I_v = \mathrm{Ker}\,(G_v \to G_{k(v)})$

$$= H^1(G_{k(v)}, ad^0(1))$$

Hochschild-Serre s.s.

有限体. 巡回群の cohom

$\therefore \quad \dim H^1_f = \dim H^0(G_{k(v)}, ad^0(1)) = 1$

<u>Q_n のえらび方</u>

p11-7 (#) の条件をみたす有限素点 $v \notin S$ の有限集合で $\# Q_n = \dim Sel_{S^*}$

$$\left(\begin{array}{c} \| \\ \# Q \end{array} \right)$$

$$Sel_{S_n^*} \longrightarrow \bigoplus_{v \in Q_n} H^1_f(G_v, ad^0(1))$$

が同形となるようにとる。.

それが可能であることは Chebotarev density theorem.

(Taylor-Wiles のもとの証明と同じ)
省略

$$\mathcal{O}[[\Delta_\infty]] \longrightarrow R_\infty$$ のつくり方

$$\wr$$

$$\mathcal{O}[\Delta_n] \longrightarrow R_n$$ の定義

$$\Delta_n = \prod_{v \in Q_n} \Delta_v$$

$\Delta_v = k(v)^\times$ の ℓ 巾部分

位数 ℓ 巾の巡回群　　位数 ℓ^n でわりきれる.

$(q_v \equiv 1 \ (\ell^n))$

$v \in Q_n$

$$\begin{array}{ccc} G_v \to G_{S_n} & \longrightarrow & GL(V_{R_n}) \\ \downarrow & & \\ G_S & & \end{array}$$

V_{R_n} universal deformation

free R_n module rank 2

$v \in Q_n$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Ker} \arrow[d] \\
G_v \arrow[r] \arrow[d] & G_{S_n} \arrow[r] \arrow[d] & GL(V_{R_n}) \arrow[d, two heads] \\
G_{K(v)} \arrow[r] & G_S \arrow[r] & GL(V_R) \arrow[d] \\
\mathrm{Fr}_v \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] & & GL(V_{\mathbb{F}}) = GL_2(\mathbb{F})
\end{tikzcd}$$

Ker ---- pro $-\ell$ 群

$\mathrm{Fr}_v \mapsto$ 固有値 α_v, β_v

$$\begin{tikzcd}
 & G_v \arrow[r] \arrow[dr] & GL(V_{R_n}) & \\
1 \arrow[r] & I_{v,\ell} \arrow[r] & G \arrow[u] \arrow[r] & G_{K(v)} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{Z}_\ell(1) \cong I_{v,\ell}$

ここを factor する

G 商

I_v の pro $-\ell$ quotient

さらに G^{ab} を経由する

∵ $\mathrm{Fr}_v \curvearrowright V_R$ は対角化可能.

V_Rの適当なキテイをとって

$$Fr_v \sim \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_v & 0 \\ 0 & \tilde{\beta}_v \end{pmatrix}$$

$F \in G$ を Fr_v の lift とする

V_{R_n} のキテイをとって

$$F \sim \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_v & 0 \\ 0 & \tilde{\beta}_v \end{pmatrix}$$

$\sigma \in I_{v,\ell}$ generator

$q_v \equiv 1 \ (\ell^n)$

$$F\sigma F^{-1} = \sigma^{q_v} = \sigma \cdot \sigma^{q_v - 1}$$

$$\sigma = 1 + \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ 逐次近似

$F\sigma F^{-1} = \sigma$ でなければならない.

$\Downarrow$

σ も対角行列.

$\therefore$ G^{ab} を factor する

//

$I_{v,\ell} : \mathbb{Z}_\ell(1) \longrightarrow$ $k(v)^\times$ の ℓ巾部分 $= \Delta_v$

への制限は　　　これを経由する.

左上の成分

$\Delta_v \longrightarrow R_n^\times$

group hom.

この積　$\Delta_n \longrightarrow R_n^\times$

$\rightsquigarrow \mathcal{O}[\Delta_n] \longrightarrow R_n$

群環

Δ_n が 惰性群への制限だから

$$\boxed{R_n \otimes_{\mathcal{O}[\Delta_n]} \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} R}$$

$\overline{R_\infty} \simeq T_\infty$ から $\overline{R} \simeq T$

を出すときに用いる

なぜ総実代数体で？

$\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(E_\lambda)$ の modularity

Fact
$F/\mathbb{Q}$ 有限次可解総実拡大

$\rho|_{G_F} : G_F \to GL_2(E_\lambda)$ が modular

$\Rightarrow \rho$: modular

これは
automorphic repr. の話.

E/F 総実代数体の素数次巡回拡大

$$\begin{pmatrix} GL_2(\mathbb{A}_F) \text{ の保型表現} \end{pmatrix} \xrightarrow{1:1} \begin{pmatrix} GL_2(\mathbb{A}_E) \text{ の保型表現} \\ \text{で } Gal(E/F)\text{-不変} \end{pmatrix}$$

base change

Langlands 対応.

G_F の表現 $\dashrightarrow$ G_E の表現

制限
$G_F \supset G_E$

可解 ← 巡回拡大の反復

どういう利点があるか．

$v \nmid p \implies \rho|_{I_v}$ は unipotent と仮定できる

↑

v での惰性群

への制限．

局所体の絶対ガロア群は可解．

3階建

$$G_{k(v)} \simeq \hat{\mathbb{Z}}$$

$$I_v / P_v \simeq \prod_{v \nmid \ell} \mathbb{Z}(\ell)$$

} 可環．

$$P_v \simeq \text{pro-}p \text{ 群}$$

べき零

$\Rightarrow$ 可解

local に可解 ⟵ global に可解なものからもってこれる．

・ $v \mid p$ 　 $\rho|_{G_v}$ が potentially Barsotti-Tate

有限次拡大の Gal 群に
制限すると p-div group
が定める p 進表現である

の場合．potentially をはずすことができる
(Kisin)

志村・谷山予想の簡易化になっている．

(
ell. curve の modularity
BCDT
$p=3$ で Wild ramification
potentially BT のとき
大変だった．
)

Lifting theorem 来週以降.

Taylor の potential modularity.

$\begin{cases} \text{mod } l & \text{version} \\ l\text{-adic} & \text{〃} \end{cases}$ あり.

$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathbb{F})$ $\mathbb{F}$: 有限体

conti.

絶対既約 odd.

$\Rightarrow$ $F/\mathbb{Q}$ 有限次 総実 Galois 拡大 ....

s.t. $\bar{\rho}|_{G_F}$ は modular.

$\bar{\rho}(G_{\mathbb{Q}}) = \bar{\rho}(G_F)$ を課すこともできる.

一見 global に見えるが local な条件

<u>Cor</u> l-adic version (MLT を使う)

この原形となったのは (3,5)-trick.

$X(5) \longleftarrow X(5,3)$

$X(5)$ ~ genus 0 ⋮ たくさん有理点.

$X(5,3)$: full level, Γ_0

genus ≥ 2

有理点有限個.」