10 回目

$R = T$

F: 総実　　$S \supset \Sigma_p = \Sigma \amalg \{v \mid p\}$

$\bar{\rho} : G_S \longrightarrow GL_2(\mathbb{F})$　絶対既約, odd

有限体 $ch = p$　　$\bar{\rho}|_{G_{F(\zeta_p)}}$ も絶対既約

R : def ring　det fix.

保型形式

$\overset{(-)}{R} \longrightarrow T \subset \mathrm{End}(M)$

小　　大　Hecke環

$L \longrightarrow R^{\square} \xleftarrow{\text{わく}} R$

$S_n = S \amalg \underline{Q_n}$

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} L[\![X]\!] & \twoheadrightarrow & R_n^{\square} \simeq R_n[\![Y]\!] & & & & \\ & & \uparrow & & & & \\ \mathcal{O}[\Delta_n] & \longrightarrow & R_n & \twoheadrightarrow & T_n & \hookrightarrow & \mathrm{End}(M_n) \end{array}}$$

あとで

位数 p 巾有限 Abel 群

$\overset{\text{大}}{\mathcal{O}[\Delta_n]} \longrightarrow T_n$ 単射　　$M_n \neq 0$ 自由 $\mathcal{O}[\Delta_n]$-加群

原証明 : modular curve の H^1. 位相幾何

現在　: 有限集合の H^0　簡単

$\# X$　　$R_n^{\square}$ の L 上の位相的生成元の個数

$$= \dim \mathrm{Sel}_{S_n} + \sum_{v \in \Sigma_p} \dim H^0(G_v, ad) - \dim H^0(G_S, ad)$$

nによらない様にとれる　　nによらない　　0なし

$ad = \mathrm{End}(V_{\mathbb{F}})$　　$= \mathbb{F}^2$　$\bar{\rho}$の表現空間

$\cup$

$ad^0 = (\mathrm{Trace} = 0)$

$$\mathrm{Sel}_{S_n} = \mathrm{Ker}\left(H^1(G_{S_n}, ad^0) \longrightarrow \bigoplus_{v \in \Sigma_p} H^1(G_v, ad^0) \right)$$

$R_n^{\square} \simeq R_n[\![Y]\!]$　$R_n^{\square}$ と R_n の違い：

各 $v \in \Sigma_p$ で $V_A \simeq A^2$ で $V_{\mathbb{F}} \simeq \mathbb{F}^2$ と compatible / global な同型

$1 + M_2(m_A)$　$\# Y = 4 \cdot \Sigma_p - \dim H^0(G_S, ad)$ $\boxed{n\text{によらない}}$

Taylor-Wiles の patching

図式 □ の n に関する "逆極限" をとる.

逆系になっていないのでとれない.

□ の極大 ideal の巾で割った有限商を考える.

各 n から出てくるものの元の個数が有界

この有限商は部分列にうつれば逆系をなすようにできる.

(部屋わり + Axiom of Choice)

$$\begin{array}{ccccccc}
L[\![X]\!] & \longrightarrow & R_\infty^{\square} & \simeq & R_\infty[\![Y]\!] & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
\mathcal{O}[\![\Delta_\infty]\!] & \longrightarrow & R_\infty & \twoheadrightarrow & T_\infty & \longrightarrow & \mathrm{End}(M_\infty)
\end{array}$$

$\Delta_n = \prod_{v \in Q_n} \Delta_v$ ← 位数 p^{n_v} の巡回群　$n_v \geq n$

$\Delta_\infty \simeq \mathbb{Z}_p^{\# Q}$

$\# Q_n$ はnによらず一定

$\# Q$ と書く

$\mathcal{O}[\![\Delta_\infty]\!] \simeq \mathcal{O}[\![\mathbb{Z}_p^{\# Q}]\!]$

$= \varprojlim \mathcal{O}[\mathbb{Z}/p^n{}^{\# Q}] \simeq \mathcal{O}[\![T]\!]$ Q]

$$R_\infty \otimes_{\mathcal{O}[[\Delta_\infty]]} \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} R$$

augmentation

$$T_\infty \otimes \quad " \quad \xrightarrow{\sim} T$$

$$\left(\begin{array}{ccc} R_n \otimes_{\mathcal{O}[\Delta_n]} \mathcal{O} & \xrightarrow{\sim} & R \\ G_{S_n} & \longrightarrow & G_S \end{array} \right)$$

各 $v \in \Sigma_p$ での分岐条件

$\Sigma_p = \Sigma \amalg \{v \mid p\}$

- $v \notin \Sigma_p$ なら $\bar{\rho}$ は不分岐
- $v \in \Sigma$: $\bar{\rho}|_{I_v}$ は unipotent $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

 vでの惰性群

R, L の定義をするとき $\bar{\rho}$ の defo. ρ に対し $\rho|_{I_v}$ は unip という条件をつける

$v \mid p$ $\left(\begin{array}{ll} \cdot\ k = 2 & \text{pst} \\ \cdot\ 2 \leq k \leq p+1 & \text{cristalline} \end{array} \right.$

に応じて分岐条件を課す

$2 \leq k \leq p$ cristalline F_v : 絶対不分岐 (=pが素元)

$\rho|_{G_v}$ が Fontaine-Lafaille 理論で扱える.

分解群

($k = p+1$ cristalline ordinary)

$k=2$ semistable $\left\{ \begin{array}{l} \text{Barsotti-Tate} \quad \text{p-div. grp. の finite flat gp. sch. からくる.} \\ \text{ordinary} \end{array} \right.$

この様な分岐条件を課すことで $R, R^{\square}, L$ の商環 $\bar{R}, \bar{R}^{\square}, \bar{L}$ を定義

T: 指定した level, wt, の保型形式に伴う Galois 表現

$\Downarrow$ 大域-局所 Langlands 対応の整合性

T は上で定めた分岐条件をみたす

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, two heads] \arrow[dr] & T \\ & \bar{R} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \bar{L}[[X]] \arrow[r] & \bar{R}_\infty^{\square}\ (\simeq \bar{R}_\infty[[Y]]) \arrow[r, two heads] & T_\infty^{\square}\ (\otimes_{\bar{R}_\infty} \bar{R}_\infty^{\square}) \arrow[r] & \mathrm{End}(M_\infty^{\square}) \\ \mathcal{O}[[\Delta_\infty]] \arrow[r] & \bar{R}_\infty \arrow[u] \arrow[r, two heads] & T_\infty \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{End}(M_\infty) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

T 大 $\quad \mathcal{O}[[\Delta_\infty]][[Y]] \hookrightarrow T_\infty^{\square}$ ← $\mathcal{O}[[\Delta_\infty]][[Y]]$ 加群として有限生成 (M_n : $\mathcal{O}[\Delta_n]$-free)

R 小 $\quad \bar{L}[[X]] \twoheadrightarrow \bar{R}_\infty^{\square} \twoheadrightarrow T_\infty^{\square}$

$$\dim \bar{L}[[X]] \geq \dim T_\infty^{\square} = \dim \mathcal{O}[[\Delta_\infty]][[Y]]$$

global $\qquad$ local

"$\geq$" が "$=$" とする. さらに $\bar{L}$ が整域

$\Rightarrow \bar{L}[[X]] \twoheadrightarrow \bar{R}_\infty^{\square} \twoheadrightarrow T_\infty^{\square}$ は同型

$\Rightarrow \bar{R}_\infty \xrightarrow{\sim} T_\infty \quad \Rightarrow \bar{R} \simeq T$

$\bar{L}$ が整域: $v \nmid p$ の時は easier

$v \mid p$ 〃 難

$$\bar{L} = \bigotimes_{v\in\Sigma_p \mathcal{O}} \bar{L}_v$$ 以下 dim = $\mathcal{O}$上の rel dim

= 環としての次元 −1

$$\dim \bar{L} = \sum_{v\in\Sigma_p} \dim \bar{L}_v$$

$\bar{L}_v$ が $\mathcal{O}$ 上 flat（略）　（E_λ 上 formally smooth（略））

rel dim $\bar{L}_v$ = $\dim \bar{L}_v \otimes_{\mathcal{O}} E_\lambda$

= $\bar{L}_v \otimes_{\mathcal{O}} E_\lambda$ の closed pt での接空間の次元

= $4 + \dim H^1_f(G_v, ad^0) - \dim H^0(G_v, ad)$

$V_{E_\lambda} \simeq E_\lambda^2$ G_v の表現（closed pt に対応）

$$H^1_f(G_v, ad^0) \subset H^1(G_v, ad^0)$$

$\bar{L}_v$　　　　L_v

$v \nmid p$ のとき $\left(\begin{array}{l} = \mathrm{Ker}(H^1(G_v, ad^0) \longrightarrow H^1(I_v, ad^0)) \\ = H^1(k(v), (ad^0)^{I_v}) \end{array} \right.$

$v \mid p$ のとき $(= \mathrm{Ker}(H^1(G_v, ad^0) \longrightarrow H^1(G_v, ad^0 \otimes B_{cris})))$

$$\dim H^0(G_v, ad) = 1 + \dim H^0(G_v, ad^0)$$

$ad = ad^0 \oplus \mathbb{1}$　　$\| \; H^0(k(v), (ad^0)^{I_v})$

$v \nmid p$ $\dim H^0(k(v), (ad^0)^{I_v}) = \dim H^1(\text{—})$

$\Rightarrow \quad \dim \bar{L}_v = 3$

$v \mid p \qquad 0 \to H^0 \to D_{cris} \oplus F^0 D_{dR} \to D_{cris} \oplus D_{dR} \to H^1 \to 0$

$$\dim_{E_\lambda} H^1 - \dim_{E_\lambda} H^0 = \dim_{E_\lambda} \underbrace{D_{dR} / F^0 D_{dR}}_{F_v \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_\lambda\text{-mod としては rk } 1} = [F_v : \mathbb{Q}_p]$$

$\Rightarrow \quad \dim \bar{L}_v = 3 + [F_v : \mathbb{Q}_p]$

$$\dim \bar{L} = \sum \dim \bar{L}_v = 3 \# \Sigma_p + \underbrace{\sum_{v \mid p} [F_v : \mathbb{Q}_p]}_{= [F : \mathbb{Q}]}$$

$$\dim \bar{L}[\![X]\!] = 3 \# \Sigma_p + [F : \mathbb{Q}] + \dim Sel_{S_n} + \sum_{v \in \Sigma_p} H^0(F_v, \underset{ad^0 \oplus \mathbb{1}}{\overset{\|}{ad}}) - \dim H^0(F, ad)$$

$$= 4 \# \Sigma_p + [F : \mathbb{Q}] + \dim Sel_{S_n} + \sum_{v \in \Sigma_p} H^0(F_v, ad^0) - \dim H^0(F, ad)$$

$$\dim \mathcal{O}[\![\Delta_\infty]\!][\![Y]\!] = \# Q + 4 \# \Sigma_p - \dim H^0(F, ad)$$

双対 Selmer 群

mod p 表現　Tate twist

$$Sel_{S_n^*} := \operatorname{Ker}\Big(H^1(G_{S_n}, ad^0(1)) \to \bigoplus_{v \in S \setminus \Sigma_p} H^1(G_v, ad^0(1)) \oplus \bigoplus_{v \in Q_n} H^1(G_v, ad^0(1)) \Big)$$

$S_n = S \cup Q_n$

$S \supset \Sigma_p$