1/8. R = T.

有限素点の有限集合

F 総実 $S \supset \Sigma_p = \Sigma \amalg \{v \mid p\}$

$\bar{\rho} : G_S \to GL_2(\mathbb{F})$ 絶対既約, odd

↑ 有限体 ch = p

$\bar{\rho}|_{G_{F(\zeta_p)}}$ も絶対既約

R def ring det fix

$R \twoheadrightarrow T \subset \mathrm{End}(M)$

T ↑ Hecke環

M ↑ 保型形式

$L \to R^{\square}$ ← 扱く

$\uparrow$

R

$S_n = S \amalg Q_n$

$L[[X]] \twoheadrightarrow R_n^{\square}$

$\uparrow$

$\mathcal{O}[\Delta_n] \to R_n \twoheadrightarrow T_n \hookrightarrow \mathrm{End}(M_n)$

あんで

Δ_n ↑ 位数p巾の有限アーベル群

主本 $\mathcal{O}[\Delta_n] \to T_n$ 単射. $M_n \neq 0$, 自由$\mathcal{O}[\Delta_n]$-加群

原証明 modular curve の H^1 位相幾何

現存 有限集合の H^0. 簡単

$\#X$: $R_n^\square$ の L 上の位相的生成元の個数

$= \underline{\dim Sel_{S_n}} + \sum_{v \in \Sigma_p} \dim H^0(G_v, ad) - \dim H^0(G_S, ad)$ (←なし→)

↑ nによらないように とれる

↑ nによらない

$ad = End(V_{\mathbb{F}})$　$V_{\mathbb{F}} = \mathbb{F}^2$, $\bar{\rho}$ の表現空間

$\cup$

$ad^0 = (\mathrm{Trace} = 0)$.

$$Sel_{S_n} = \ker\left(H^1(G_{S_n}, ad^0) \to \bigoplus_{v \in \Sigma_p} H^1(G_v, ad^0)\right)$$

$R_n^\square \simeq R_n[[Y]]$　$R_n^\square$ と R_n のちがい.

各 $v \in \Sigma_p$ で $V_A \simeq A^2$ で $V_{\mathbb{F}} \simeq \mathbb{F}^2$ と compatible / globalな同型

$1 + M_2(m_A)$

$\#Y = 4 \cdot \#\Sigma_p - \dim H^0(G_S, ad)$ (nによらない)

Taylor-Wiles の patching

図式 $\square$ の n に関する"逆極限"をとる.

逆系になってないのでとれない.

$\square$ の極大イデアルの中でわった有限商を考える

各nからでてくるものの元の個数が有界

この有限商は部分列にうつれば逆系をなすようにできる

部屋わり + AC.

$$L[[X]] \to R_\infty^0 \simeq R_\infty[[Y]]$$

$$\uparrow$$

$$\mathcal{O}[[\Delta_\infty]] \to R_\infty \twoheadrightarrow T_\infty \to \mathrm{End}(M_p)$$

$\Delta_n = \prod_{v \in Q_n} \Delta_v$ #Q_n はnによらず一定

↑位数 p^{u_v} の巡回群 $u_v \geq n$ #Qと記

$\Delta_\infty \cong \mathbb{Z}_p^{\#Q}$ $\mathcal{O}[[\Delta_\infty]] \cong \mathcal{O}[[\mathbb{Z}_p^{\#Q}]]$

$= \varprojlim \mathcal{O}[\mathbb{Z}/p^{n\,\#Q}] \simeq \mathcal{O}[[T]]$

↑ #Q個の変数

$R_\infty \otimes_{\mathcal{O}[\Delta_\infty]} \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} R$ ↑augmentation

$T_\infty \otimes$ 〃 $\xrightarrow{\sim} T$

$R_n \otimes_{\mathcal{O}[\Delta_n]} \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} R$ ↑aug

$G_{S_n} \twoheadrightarrow G_S$ により $R_n \to R$ がある.

各 $v \in \Sigma_p$ での分岐条件

$\Sigma_p = \Sigma \amalg \{v | p\}$

- $v \notin \Sigma_p$ なら $\bar{\rho}$ は不分岐
- $v \in \Sigma$ $\bar{\rho}|_{I_v}$ は unipotent $\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

  ↑vでのinertia

R, Lの定義するとき

$\bar{\rho}$ の def'n ρ に対し, $\rho|_{I_v}$ は unip という条件を課す.

$v|p$ $\begin{cases} \cdot\ k=2 & \text{pst} \\ \cdot\ 2\le k\le p+1 & \text{cristalline} \end{cases}$

に応じて分岐条件を課す.

$2\le k\le p$ cristalline では絶対不分岐 (=pが素で)

$\rho|_{G_v}$ が Fontaine-Lafaille 理論で扱える

↑ 分解群

($k=p+1$ cristalline ordinary)

$k=2$ semistable $\begin{cases} \text{Barsotti-Tate } p\text{-div gp の finite flat gp sch からくる} \\ \text{ordinary} \end{cases}$

このような分岐条件を課すことで, R, R^D, L の商環 $\overline{R}, \overline{R}^D, \overline{L}$ を定義する.

T 指定した level, wt の保型形式にともなう Galois 表現

⇓ 大域-局所 Langlands 対応の整合性

Tは上で定めた分岐条件をみたす.

$$R \twoheadrightarrow T$$
$$\searrow \overline{R} \nearrow$$

$$\bar{L}[[X]] \twoheadrightarrow \bar{R}_\infty^\square \twoheadrightarrow T_\infty^\square \longrightarrow \mathrm{End}(M_\infty^\square) \otimes_{\bar{R}_\infty} \bar{R}_\infty^\square \quad 71$$

$$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$$

$$\mathcal{O}[[\Delta_\infty]] \to \bar{R}_\infty \twoheadrightarrow T_\infty \to \mathrm{End}(M_\infty)$$

← $\mathcal{O}[[\Delta_\infty]][[Y]]$加群として有限生成

T大 $\mathcal{O}[[\Delta_\infty]][[Y]] \hookrightarrow T_\infty^\square$ (M_n, $\mathcal{O}[\Delta_n]$-free)

R側 $\bar{L}[[X]] \twoheadrightarrow \bar{R}_\infty^\square \twoheadrightarrow T_\infty^\square$

$\dim \bar{L}[[X]] \geq \dim T_\infty^\square$ ← 環のdim

$= \dim \mathcal{O}[[\Delta_\infty]][[Y]]$

≥が=とする. さらに$\bar{L}$が整域 ⇒ $\bar{L}[[X]] \to \bar{R}_\infty^\square \to T_\infty^\square$ は同型

↑ global ↑ local

v∤pのときは easier ⇒ $\bar{R}_\infty \cong T_\infty$

v|p 難 ⇒ $\bar{R} \cong T$

$\bar{L} = \hat{\bigotimes}_{v \in \Sigma_p, \mathcal{O}} L_v$ 以下 dim = $\mathcal{O}$上のrel dim

= 環の次元 − 1.

$$\dim \bar{L} = \sum_{v \in \Sigma_p} \dim \bar{L}_v$$

$\bar{L}_v$が$\mathcal{O}$上flat (略)

rel. dim $\bar{L}_v = \dim \bar{L}_v \otimes_{\mathcal{O}} E_\lambda$

$\bar{L}_v \otimes_{\mathcal{O}} E_\lambda$ E_λ上 formally smooth (略)

$\dim \bar{L}_v \otimes_{\mathcal{O}} E_\lambda = \bar{L}_v \otimes_{\mathcal{O}} E_\lambda$ の closed pt での

接空間の次元

$= 4 + \underbrace{H^1_f(G_v, ad^0)}_{\dim}$

$- \underbrace{H^0(G_v, ad)}_{\dim}$

$V_{E_\lambda} \simeq E_\lambda^2$ G_v の表現

(closed pt に対応)

$$H^1_f(G_v, ad^0) \subset H^1(G_v, ad^0)$$

$\bar{L}_v$ $\qquad L_v$

$v \nmid p$ のとき $= \ker(H^1(G_v, ad^0) \to H^1(I_v, ad^0))$

$= H^1(k(v), (ad^0)^{I_v})$

$v \mid p$ のとき $H^1_f \overset{def}{=} \ker(H^1(G_v, ad^0) \to H^1(G_v, ad^0 \otimes B_{cris}))$

$\dim H^0(G_v, ad) = 1 + \dim H^0(G_v, ad^0)$

$ad = ad^0 \oplus 1$ $\qquad H^0(k(v), (ad^0)^{I_v})$

$v \nmid p$ $\quad \dim H^0(k(v), (ad^0 \rho)^{I_v}) = \dim H^1(\;-\;)$

$\left(0 \to H^0 \to (ad^0\rho)^{I_v} \xrightarrow{Fr_v - 1} \cdots \to H^1 \to 0 \right.$ exact より$\left.\right)$

$\Rightarrow \dim \bar{L}_v = 3$.

$v | p$. $\quad 0 \to H^0 \to D_{cris} \oplus F^0 D_{dR} \to D_{cris} \oplus D_{dR}$

$D_{dR} = D_{dR}(ad^0) \qquad \to H^1 \to 0$.

$$\dim_{E_\lambda} H^1 - \dim_{E_\lambda} H^0 = \dim_{E_\lambda} \underbrace{D_{dR} / F^0 D_{dR}}$$

$F_v \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_\lambda$-module として rk 1.

$$= [F_v : \mathbb{Q}_p]$$

$$\Rightarrow \dim \bar{L}_v = 3 + [F_v : \mathbb{Q}_p]$$

$$\dim \bar{L} = \sum \dim \bar{L}_v = 3 \cdot \# \Sigma_p + \underbrace{\sum_{v|p} [F_v : \mathbb{Q}_p]}_{= [F : \mathbb{Q}_p]}$$

$$\dim \mathbb{T}[[X]] = 3 \cdot \# \Sigma_p + [F : \mathbb{Q}] + \dim Sel_{\Sigma_n} + \sum_{v \in \Sigma_p} \dim H^0(F_v, \underset{ad^0 \oplus 1}{ad}) - \dim H^0(F, ad)$$

$$= \underline{4 \# \Sigma_p} + [F : \mathbb{Q}] + \dim Sel_{\Sigma_n} + \sum_{v \in \Sigma_p} \dim H^0(F_v, ad^0) \underline{- \dim H^0(F, ad)}$$

$$\dim \mathcal{O}[[\Delta_w]][[Y]] = \# Q + \underline{4 \# \Sigma_p} \underline{- \dim H^0(F, ad)}$$

双対 Selmer 群.

mod p 表現 Tate twist

$$\mathrm{Sel}^*_{S_n} \overset{\mathrm{def}}{=} \ker\Big(H^1(G_{S_n}, ad^0(1)) \to \bigoplus_{v \in S \setminus \Sigma_p} H^1(G_{F_v}, ad^0(1)) \oplus \bigoplus_{v \in Q_n} H^1(G_{F_v}, ad^0(1)) \Big).$$

$S_n = S \cup Q_n$

$S \supset \Sigma_p$

$\mathrm{Sel}(M)$ と $\mathrm{Sel}(M^*(1))$ をくらべる.