2009-12-21

次回 1/8 (金)
その次 1/18 (月)

R=T $\Rightarrow$ MLT $\Rightarrow$ LT

MLT

$\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(E_\lambda)$ 既約 連続 odd ℓ進表現

"conductor N" wt k + $\cdots$

$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathbb{F})$ の $G_{\mathbb{Q}(\rho_\ell)}$ への制限が絶対既約

$\bar{\rho} = \rho \bmod \lambda$

このとき $\bar{\rho}$ が "level N" weight k で modular ならば，ρ も 〃 〃 〃

$R = T$

R: ring　T は R の商環

$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{E_\lambda}$　　R : 完備局所 Noether 環 / $\mathcal{O}$

剰余体 $\mathbb{F}$

def はあと

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(R, \mathcal{O}) \overset{1:1}{=} \{\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathcal{O}) : \text{cond } N \text{ wt } k, \ \bar{\rho} \text{ の lift}\}$$

$$\cup \qquad\qquad \cup$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(T, \mathcal{O}) = \{\rho : \cdots \text{ modular}\}$$

$R \twoheadrightarrow T$

を構成し、同型を示せば MLT が出る。

F : (総実) 代数体　　$p = \ell$ prime

Σ : F の有限素点の有限集合

$v \in \Sigma \Rightarrow v \nmid p$

$\Sigma_p := \Sigma \cup \{v | p\}$

$S \supset \Sigma_p$: 有限素点の有限集合

fix $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\mathbb{F}$ 剰余体 fix

$\rho_\lambda : G_F \longrightarrow GL_2(E_\lambda)$ $\qquad$ $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{E_\lambda} \subset E_\lambda$

$\Sigma = \{ v : F$ の有限素点, $v \nmid p$, $\rho_\lambda|_{G_{F_v}}$ が分岐$\}$

bad places.

$S \setminus \Sigma_p$ 補助的な役割 (fine moduli にする)

- 合同部分群を小さくして位数有限の元がないようにするために使う素点
- Taylor-Wiles の patching をするために付け加える素点 (後から追加)

$\det \rho_\lambda = \psi \chi^{k-1}$ と fix して考える

ψ: finite order.

χ: l進 cyclotomic

$G_F = Gal(\overline{F}/F) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow G_S$ $\quad$ Sの外で不分岐最大商

v: 有限素点. $\quad$ $G_{F_v} = Gal(\overline{F_v}/F_v)$

$\overline{F} \subset \overline{F_v}$ fix

$\mathcal{C}$ category

obj 有限局所環 $/\mathcal{O}$ 剰余体 $\mathbb{F}$

A $\mathcal{C}$ の obj

$\bar{\rho}$: $\rho_\lambda \bmod \lambda$ $\quad G_F \longrightarrow GL_2(\mathcal{O}) \longrightarrow GL_2(\mathbb{F})$

(枠付き変形)

Def $\bar{\rho}$ の A への持ち上げとは

自由 A 加群 V_A $\quad rk = 2$

$\rho : G_S \longrightarrow GL_A(V_A) \simeq GL_2(A)$

$V_A \simeq A^2$ (A-mod isom)

の組で，$\bar{\rho}$ をひきおこすもの．

これを「枠」という　　枠付き変形．

(local に制限したもの
に対して)

以下ではいつでも

det を保つ という仮定をつける．

$$\begin{tikzcd} G_S \arrow[r, "\det\rho"] \arrow[dr, "\det\rho_\lambda"'] & A^\times \\ & \mathcal{O}^\times \arrow[u] \end{tikzcd}$$

持ち上げの同型類

$\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $\rho : G_S \longrightarrow GL_2(A)$ で $\bar{\rho}$ をひきおこすもの

$\bar{\rho}$ の A への変形

持ち上げの定義で、 $V_A \simeq A^2$ を

$$V_A \underset{A}{\otimes} \mathbb{F}^2 \simeq \mathbb{F}^2 \quad (\text{as } \mathbb{F}\text{-vect spaces})$$

でおきかえたもの.

変形の同型類 $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $\left\{ \rho : G_S \longrightarrow GL_2(A) \text{ で } \bar{\rho} \text{ を ひきおこすもの} \right\}$ $\Big/$ $\left(\begin{array}{c} 1 + m_A M_2(A) \\ \text{による共役} \end{array} \right)$

$\bar{\rho}$ の A への変形 に 各 $v \in \Sigma_p$ ごとに 枠をつける

$\rho : G_S \longrightarrow GL_A(V_A)$ $\qquad V_A \underset{A}{\otimes} \mathbb{F} \simeq \mathbb{F}^2$

$(V_A \simeq A^2)_v$

$\rho | G_{F_v}$ $\qquad$ vごとに

$V_A \underset{A}{\otimes} \mathbb{F} \simeq \mathbb{F}^2$

v ごとのものは 上と一致？

$\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set}$ $\qquad$ functor

$A \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho} \text{ の } A \text{ への変形で各 } v \in \Sigma_p \text{ に対して} \\ \text{枠を付けたもの} \end{array} \right\} \Big/ \sim$ 同型

$\bar{\rho} : G_S \longrightarrow GL_2(\mathbb{F})$ は 絶対既約 とする

$\Rightarrow$ この functor は prorepresentable

$\left(\mathrm{End}_{G_S}(\bar{\rho}) = \mathbb{F} \text{ で十分} \right)$ もう少し詳しく

省略 するが， idea は ...

$$\begin{tikzcd} & 1 \\ & GL_2(\mathbb{F}) \arrow[u] \\ G_S \arrow[r] & GL_2(A) \arrow[u] \\ & \mathrm{Ker} \ \cdots\ \ell\text{巾} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$\underbrace{\mathrm{Ker}\,\bar{\rho}} \subset G_S$

その pro-ℓ 完備化は有限生成

(⇐ 類体論 + 類数の有限性)

or Hermite–Minkowski

Langlands 対応を次数に関する induction でやっている感じ　1次元 → 2次元.

prorepresantable とは

枠つき

完備局所 Noether 環　$R^{\square}/\mathcal{O}$　剰余体 $\mathbb{F}$.

$$A \longmapsto \bigcirc \overset{1:1}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(R^{\square}, A)$$

となる R が存在する

枠を考えないものも prorepresentable.

R　変形環.

$\bar{\rho}|_{G_{F_v}}$ の <u>枠付き</u>変形 ← これも prorepresentable (by L_v)

∵ G_{F_v} 位相的に有限生成

$G_{F_v} \longrightarrow GL_2(A)$ は有限個の生成元の行き先で決まり，群の表現を定める条件は<u>代数的な</u>関係式

↑ Noether 環の gen. なので有限個.

(rem 枠付きの idea は Kisin が発展させた)

各 $v \in \Sigma_p$ に対し枠付き変形の族

$$L := \hat{\bigotimes_{v \in \Sigma_p}} L_v$$

natural map (by universality)

formally smooth

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] & R^{\square} \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, bend left, "\cdots\exists\,\text{section}"] & R[[Y]] \\ & R \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

T : Hecke 環

適当な level と weight

(今は Hilbert modular)
tot. real なので

$\mathcal{O}$ 係数

$\bar{\rho}$ に対応する non-Eisenstein
極大 ideal で完備化.

M : 保型形式の空間 〃 〃

. . . .

$\Rightarrow$ M : 有限生成 T-加群.

T : $\mathcal{O}$ 加群として有限生成で被約

RとTの結びつき

— 保型形式にともなう Galois表現によって定義される —

$\mathcal{O} \subset E_\lambda$ lattice

$$G_S \longrightarrow GL_2(T \otimes_{\mathcal{O}} E_\lambda)$$

保型形式に伴う ℓ 進表現の直積

$T \otimes_{\mathcal{O}} E_\lambda = \prod E_{\lambda, f}$

f: 適当の wt, level, char の normalized Hilbert modular form

整数環の直積　　体の直積

$$\begin{array}{ccccccc} R & \longrightarrow & \prod \mathcal{O}_{\lambda,f} & \subset & T \otimes_{\mathcal{O}} E_\lambda & = & \prod E_{\lambda,f} \\ \downarrow & & \cup & & & & \\ \bar{R} & \dashrightarrow & T & & & & \end{array}$$

$\cup$ — fin index

局所-大域整合性

分岐条件で定義される局所的な商

R は trace によって生成されるので

普遍表現

$$\rho^{univ} : G_S \to GL_2(R)$$
$$\sigma \longrightarrow \rho^{univ}(\sigma)$$

$$\mathrm{Tr}(\rho^{univ}(\sigma)) \in R$$

$$\mathrm{Tr}(\rho^{univ}(Fr_v)) = t_v$$

+ Cebotarev density

以上より

$$\therefore\ \bar{R} \twoheadrightarrow T$$

がわかった。

<u>目標</u>　全射 $\bar{R} \twoheadrightarrow T$ が同型. ($\Rightarrow$ MLT)

小さい　大きい　を示せばよい.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r] & R^{\square} & & \\
 & R \arrow[u] \arrow[r] & T \arrow[r] & \mathrm{End}(M)
\end{tikzcd}$$

Taylor - Wiles の

patching argument (modifyed by Kisin)

(Faltings, Diamond, Fujiwara)

今まで出てこなかった素数を活用する.

n ごとに有限素点の有限集合 Q_n で,

後の条件をみたすものを見つけて. $(Q_n \cap S \neq \phi)$

S を $S_n = S \cup Q_n$ でおきかえ, 今まで

の構成をくり返す.

ここで変化が生じた

T: 大につかう

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] & R_n^{\square} & & \\ \mathcal{O}[\Delta_n] \arrow[r] & R_n \arrow[u] \arrow[r] & T_n \arrow[r] & \mathrm{End}(M_n) \end{tikzcd}$$

後で

群環

$$\Delta_n = \prod_{v \in Q_n} \Delta_v$$

$$\Delta_v = K(v)^{\times} \text{ の } \ell \text{ 部分}$$

$\underbrace{\text{位数}}_{\geq \ell^n}$ ℓ 巾の巡回群

$v \in Q_n \Rightarrow N_v \equiv 1 \mod \ell^n$ と仮定.

分岐をゆるしたので群が太った

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \\ G_{S_n} & \longrightarrow & G_S \\ \uparrow & & \uparrow \\ G_{F_v} & \twoheadrightarrow & G_{\kappa(v)} \end{array}$$

$v \in Q_n$

$v \in Q_n$ での分岐が丁度 Δ_v で統制される.（後で）

$$R_n \longrightarrow R$$

$$R_n \otimes_{\mathcal{O}[\Delta_n]} \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} R$$

同様に $$T_n \otimes_{\mathcal{O}[\Delta_n]} \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} T$$

$$M_n \otimes_{\mathcal{O}[\Delta_n]} \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} M$$

R : 小

R_n^0 の L 上の生成元の個数を統制する

□ なしの R_n の L 上の.... $=$ dim

can. isom

$$\underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}}_{\text{ring hom}}(R_n, \mathbb{F}[\varepsilon] \quad \varepsilon^2=0) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\text{-vect}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 + m_{\mathcal{O}} R_n, \mathbb{F})$$

tangent space

$V_{\mathbb{F}}$: $\bar{\rho}$ の表現空間 $(= \mathbb{F}^2)$

$V_{\mathbb{F}}$ の $\mathbb{F}[\varepsilon]$ の変形 $V_{\mathbb{F}[\varepsilon]}$

$$0 \to V_{\mathbb{F}} \to V_{\mathbb{F}[\varepsilon]} \to V_{\mathbb{F}} \to 0$$

$$\mathrm{Ext}^1_{G_{S_n}}(V_{\mathbb{F}}, V_{\mathbb{F}})^0 = H^1(G_{S_n}, \underbrace{\mathrm{End}^0(V_{\mathbb{F}})}_{= \, ad^0(\bar{\rho})})$$

0 : Trace $=0$

R_n : det を保つ, $p>2$

$R_n^\square$ の L 上の ....

$= \underbrace{R_n^\square \otimes_L \mathbb{F}}$ の $\mathbb{F}$ 上の生成元の個数

枠付き変形であって、枠は自明なものと同形.

$V_A \simeq A^2 \qquad A \in \mathrm{Obj}\, \mathcal{C}$

$V_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} A = A^2$ と同じ

その分表現が減る.

$$\mathrm{Ker}\left(H^1(G_{S_n}, ad^0(\bar{\rho})) \longrightarrow \bigoplus_{v \in \Sigma_p} H^1(G_{F_v}, ad^0(\bar{\rho}))\right)$$

$=: Sel_{S_n}$ Selmer 群

同型のとりかえ分

v ごとに

$$\mathrm{Ker}\left(\mathrm{Aut}_{G_F}(V_{\mathbb{F}[\varepsilon]}) \to \mathrm{Aut}_{G_{F_v}}(V_{\mathbb{F}})\right)$$

$$= H^0(G_{F_v}, ad(\bar{\rho}))$$

0 っかない、

∴ 生成元の個数

$$= \dim \mathrm{Sel}_{S_n} + \sum_{v \in \Sigma_p} \dim H^0(F_v, ad(\bar{\rho})) - \dim H^0(F, ad(\bar{\rho}))$$

Galois cohom

$\dim H^0(F, ad(\bar{\rho})) = 1$

global な同型の分

n によらない

変数の個数を上にとる

$$L[[X]] \twoheadrightarrow R_n^{\square}$$

Q_n をうまくとることで，n によらずに一定で

しかも 定まった値にできる

次回

$\Uparrow$

$G_{F(\zeta_\ell)}$ への制限が abs. irred

の仮定を使って．