

2009-12-21

次回 1/8 (金)

この次 1/18 (月)

$$R=T \Rightarrow \text{MLT} \Rightarrow \text{LT}$$

MLT

$$\left[\begin{array}{ll} \rho: G_Q \rightarrow GL_2(E_\lambda) & \text{既約連続 odd } \ell \text{ 進表現} \\ & \text{"conductor } N" \text{ wt } k + \dots \\ \bar{\rho}: G_Q \rightarrow GL_2(\mathbb{F}) & \text{の } G_Q(\rho_\ell) \text{ への制限が} \\ \parallel & \text{絶対既約} \\ \rho \pmod{\lambda} & \end{array} \right.$$

このとき $\bar{\rho}$ が "level N " weight k \mathbb{Z} -modular
 ならば, ρ も " " "

$$R = T$$

R : ring T は R の商環.

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{E_\lambda}$$

R : 完備局所 Noetherian 環 / \mathcal{O}
剰余体 F

def はあと

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(R, \mathcal{O}) &\stackrel{!}{=} \{ \rho: G_{\mathcal{O}} \rightarrow \text{GL}_2(\mathcal{O}) : \text{cond } N \text{ wt } k / \bar{\rho} \text{ の lift} \} \\ \cup \\ \text{Hom}_{\mathcal{O}}(T, \mathcal{O}) &= \{ \rho: \dots \text{ modular} \} \\ R \twoheadrightarrow T \end{aligned}$$

を構成し、同型を示せば MLT が出る.

F : (総実) 代数体 $p = \ell$ prime

Σ : F の有限素点の有限集合

$$v \in \Sigma \Rightarrow v \nmid p$$

$$\Sigma_p := \Sigma \cup \{v \mid p\}$$

$S \supset \Sigma_p$: 有限素点の有限集合

↙ fix
 $\rho_\lambda: G_F \rightarrow GL_2(E_\lambda)$

↘ F 剰余体 fix
 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{E_\lambda} \subset E_\lambda$

$\Sigma = \{v : F \text{ の有限素点, } v \neq p, \rho_\lambda|_{G_{F_v}} \text{ が分岐}\}$
 ↖ bad places.

$S \setminus \Sigma_p$ 補助的な役割 (fine moduli にする)

- 合同部分群を小さくして位数有限の元があるようにするために使う素点
- Taylor-Wiles の patching をするために付け加える素点 (後から追加)

$\det \rho_\lambda = \psi \chi^{k-1}$ と fix して考える
 ↗ ↖
 ↑ ↑
 k 重 cyclotomic
 finite order.

$G_F = \text{Gal}(\bar{F}/F) \twoheadrightarrow G_S$ S の外で 不分岐
 最大商

v : 有限素点 $G_{F_v} = \text{Gal}(\bar{F}_v/F_v)$

$\bar{F} \subset \bar{F}_v$ fix

\mathcal{C} category

obj 有限局所環 \mathcal{O} 剰余体 F

A \mathcal{C} の obj

$$\bar{\rho} : \rho_\lambda \text{ mod } \lambda \quad G_F \rightarrow GL_2(\mathcal{O}) \rightarrow GL_2(F)$$

Def $\bar{\rho}$ の A 上の持ち上げ $\left\{ \begin{array}{l} \text{とは} \\ \text{(枠付き変形)} \end{array} \right.$

$$\left(\begin{array}{l} \text{自由 } A \text{ 加群 } V_A \quad \text{rk} = 2 \\ \rho : G_S \rightarrow GL_A(V_A) \cong GL_2(A) \\ V_A \cong A^2 \quad (A\text{-mod isom}) \end{array} \right.$$

の組で, $\bar{\rho}$ をひきおこすもの.

これを「枠」という

枠付き変形.

(local に制限したものに
に対して)

以下では いっでも

det を保つ という仮定をつける.

$$\det \rho : G_S \longrightarrow A^\times$$

$$\det \rho_\lambda \searrow \begin{array}{c} \mathcal{O} \\ \uparrow \\ A^\times \end{array}$$

持ち上げの同型類

$\xleftrightarrow{1:1}$ $\rho : G_S \rightarrow GL_2(A)$ で $\bar{\rho}$ をひきおこすもの

 $\bar{\rho}$ の A への変形

持ち上げの定義で, $V_A \simeq A^2$ と

$$V_A \otimes_A \mathbb{F}^2 \simeq \mathbb{F}^2 \quad (\text{as } \mathbb{F}\text{-vect spaces})$$

でおまかえたもの.

変形の同型類 $\xleftrightarrow{1:1}$ $\left\{ \rho : G_S \rightarrow GL_2(A) \text{ で } \bar{\rho} \text{ を } \right.$
ひきおこすもの $\left. \right\}$

$$\left(\begin{array}{l} 1 + m_A M_2(A) \\ \text{による共役} \end{array} \right)$$

$\bar{\rho}$ の A への変形 に 各 $v \in \Sigma_p$ ごとに 枠を付ける

$$\rho : G_S \longrightarrow GL_A(V_A) \quad V_A \otimes_A \mathbb{F} \simeq \mathbb{F}^2$$

$$\rho|_{G_{F_v}} \quad (V_A \simeq A^2)_v \quad \sim v\text{-ごとく}$$

$$V_A \otimes_A \mathbb{F} \simeq \mathbb{F}^2$$

v -ごとのものは上と一致?

$\mathcal{C} \longrightarrow \text{Set} \quad \text{functor}$

$A \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho} \text{ の } A \text{ への変形 で 各 } v \in \Sigma_p \text{ に対して} \\ \text{枠を付けたもの} \end{array} \right\} \sim$
同型

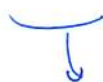
$\bar{\rho} : G_S \longrightarrow GL_2(\mathbb{F})$ は 絶対既約 とする

\Rightarrow この functor は prorepresentable
 $\left(\text{End}_{G_S}(\bar{\rho}) = \mathbb{F} \text{ 2-成分} \right)$ といふことになる

省略するが、idea は...

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 \uparrow \\
 GL_2(F) \\
 \uparrow \\
 G_S \longrightarrow GL_2(A) \\
 \uparrow \\
 \text{Ker } \dots \text{ } l \text{ } \text{ } \text{ }
 \end{array}$$

$$\text{Ker } \bar{\rho} \subset G_S$$



この pro- l 完備化は有限生成

(\Leftarrow 類体論 + 類数の有限性)
or Hermite-Minkowski

Langlands 対応を次数に依る induction
でやっている感じ 1次元 \rightarrow 2次元.

prorepresentable

とは

枠つき.

完備局所 Noether 環

R/\mathfrak{m}

剰余体 \mathbb{F} .

$$A \mapsto \bigcirc \stackrel{1:1}{=} \text{Hom}_{\mathfrak{O}}(R^{\square}, A)$$

となる R が存在する

枠を考えないものを pro representable.

R 変形環.

$\bar{\rho} |_{G_{F_v}}$ の 枠付き変形 \leftarrow $=$ h も prorepresentable
(by L_v)

☹

G_{F_v} 位相的に有限生成

$G_{F_v} \rightarrow GL_2(A)$ は有限個の生成元の
の行列表で決まり、群の表現を定める
条件は代数的な関係式

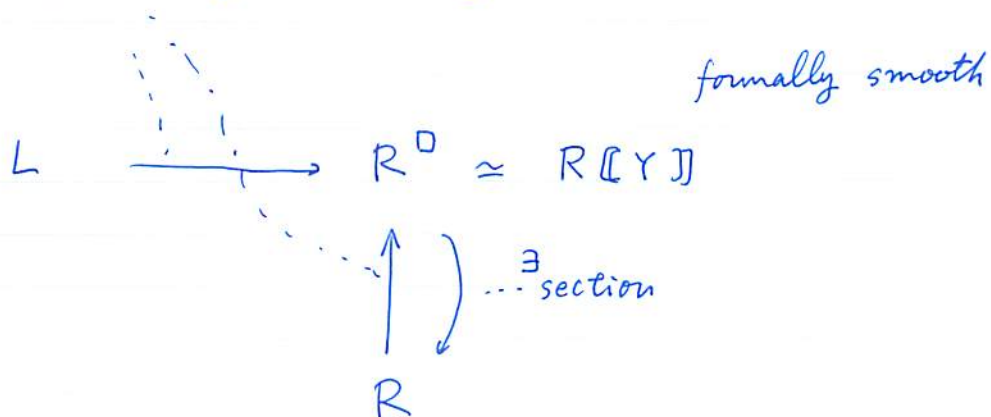
\uparrow Noether 環の gen.
なので有限個.

(rem 枠付きの idea は Kisin が発展させた)

各 $v \in \Sigma_p$ に対し 枠付き変形の族

$$L := \hat{\otimes}_{v \in \Sigma_p} L_v$$

natural map (by universality)



T : Hecke 環

適当な level と weight

(今は Hilbert modular)
tot. real のこと

\mathbb{Q} 係数

$\bar{\rho}$ に対応する non-Eisenstein
極大 ideal で完備化.

M : 保型形式の空間 " "

....

$\Rightarrow M$: 有限生成 T -加群.

T : \mathbb{Q} 加群 と 有限生成 で 被約

RとTの結びつき

— 保形形式にともなう Galois 表現 によって
定義される —

$\mathbb{Q} \subset E_\lambda$ lattice

$$G_S \longrightarrow GL_2 \left(T \otimes_{\mathbb{Q}} E_\lambda \right)$$



保形形式に
伴う ℓ 進表現
の直積

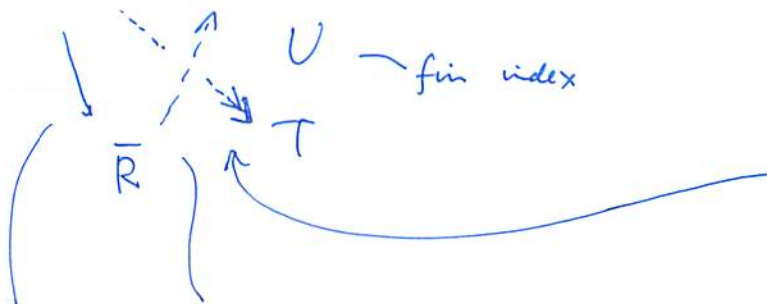
$$T \otimes_{\mathbb{Q}} E_\lambda = \prod_{\mathbb{Q}} E_\lambda, f$$

f : 適當の wt, level, char
の normalized
Hilbert modular
form

整数環の直積

体の直積

$$R \longrightarrow \prod_{\lambda, f} \mathbb{O}_{\lambda, f} \subset T \otimes_{\mathbb{Q}} E_\lambda \cong \prod_{\mathbb{Q}} E_\lambda, f$$



局所-大域 整合性

分岐条件で定義される商
局所的な

R は trace によって
生成されるので:

普遍表現

$$\rho^{univ} : G_S \longrightarrow GL_2(R)$$

$$\sigma \longmapsto \rho^{univ}(\sigma)$$

$$\text{Tr}(\rho^{univ}(\sigma)) \in R$$

$$\text{Tr}(\rho^{univ}(Fr_v)) = t_v$$

+ Chebotarev density

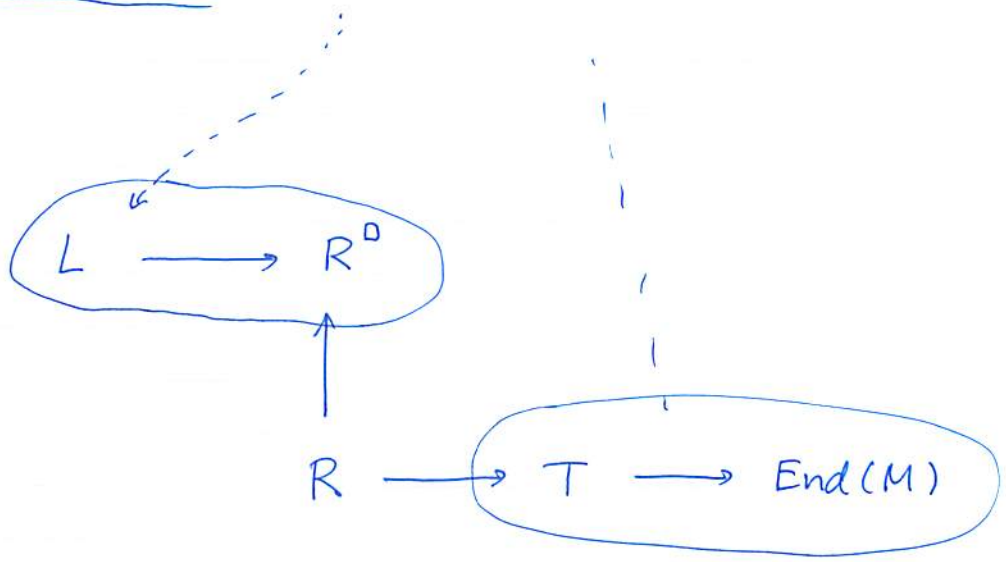
以上より

$$\therefore \bar{R} \twoheadrightarrow T$$

かわかった。

目標 全射 $\bar{R} \twoheadrightarrow T$ が同型. (\Rightarrow MLT)

\vdots \vdots
 小さい 大きい を示せばよい.



Taylor - Wiles の
 patching argument (modified by Kisin)
 (Faltings, Diamond, Fujiwara)

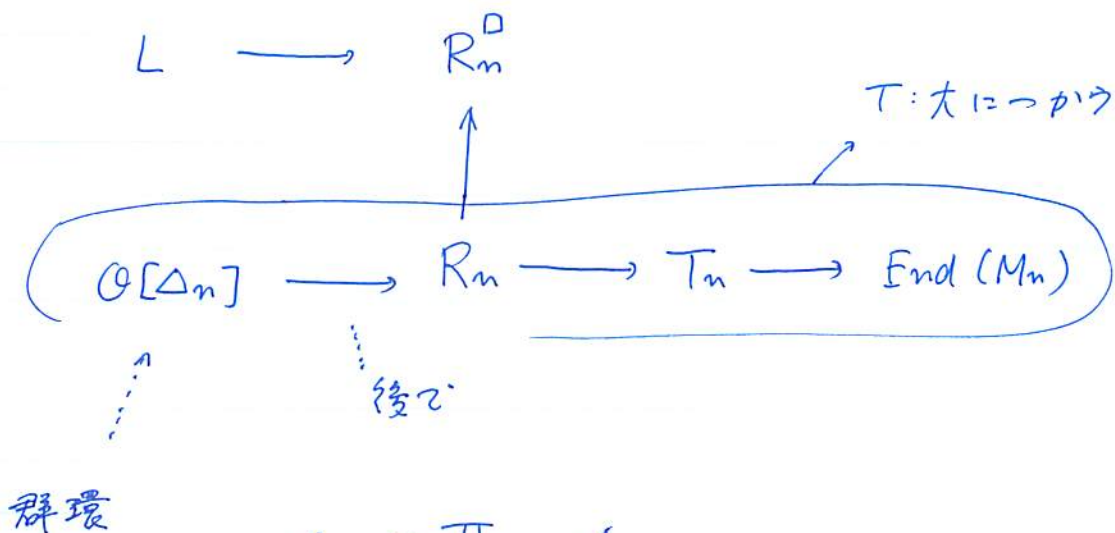
今まで出てこなかった素数を活用する.

n ごとには有限素数の有限集合 Q_n で,

後の条件をみたすものを見つけて. ($Q_n \cap S \neq \emptyset$)

S を $S_n = S \cup Q_n$ でおきかえ, 今までの構成をくり返す.

↑
ここで変化が生じた



$$\Delta_n = \prod_{v \in Q_n} \Delta_v$$

$$\Delta_v = K(v)^{\times} \text{ の } l \text{ 部分}$$

位数 l 中の巡回群
 $\cong l^n$

$$v \in Q_n \Rightarrow N_v \equiv 1 \pmod{l^m} \text{ と仮定.}$$

分岐を伴ったの2群が太った

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & & \\
 G_{S_m} & \longrightarrow & G_S \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 G_{F_v} & \longrightarrow & G_{K(v)} \\
 v \in Q_m & &
 \end{array}$$

$v \in Q_m$ での分岐が T 度 Δ_v で統制される。(後で)

$$R_m \longrightarrow R$$

$$R_m \otimes_{\mathcal{O}[\Delta_m]} \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} R$$

同様に $T_m \otimes_{\mathcal{O}[\Delta_m]} \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} T$

$$M_m \otimes_{\mathcal{O}[\Delta_m]} \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} M$$

$R: d$

R_n^0 の L 上の生成元の個数を統制する

□ 別の R_n の L 上の $\dots = \dim$ 

$$\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(R_n, \mathbb{F}[\varepsilon]) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ring hom}}}{\text{Tangent space}} = \underset{\substack{\text{can. isom}}}{\text{Hom}_{\mathbb{F}\text{-vect}}(M/M^2 + m_{\mathbb{Q}} R_n, \mathbb{F})}$$

$\varepsilon^2=0$

$V_{\mathbb{F}} : \bar{\rho}$ の表現空間 ($= \mathbb{F}^2$)

$V_{\mathbb{F}}$ の $\mathbb{F}[\varepsilon]$ の変形 $V_{\mathbb{F}[\varepsilon]}$

$$0 \rightarrow V_{\mathbb{F}} \rightarrow V_{\mathbb{F}[\varepsilon]} \rightarrow V_{\mathbb{F}} \rightarrow 0$$

$$\text{Ext}_{G_{S_n}}^1(V_{\mathbb{F}}, V_{\mathbb{F}})^0 = H^1(G_{S_n}, \underbrace{\text{End}(V_{\mathbb{F}})}_{\substack{\text{!!} \\ \text{ad}^0(\bar{\rho})}})$$

$\rightarrow 0: \text{Trace}=0$

$R_n: \det \neq 0$, $p > 2$

R_n^0 の L 上の ...

$$= R_n^0 \otimes_L \mathbb{F} \text{ の } \mathbb{F} \text{ 上の生成元の個数}$$



枠付を变形であって、枠は自明なものと同形。

$$V_A = A^2 \quad A \in \text{Obj } \mathcal{C}$$

$$V_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} A = A^2 \text{ と同じ}$$

その分表現が減る。

$$\text{Ker} \left(H^1(G_{S_m}, \text{ad}^0(\bar{\rho})) \longrightarrow \bigoplus_{v \in \Sigma_p} H^1(G_{F_v}, \text{ad}^0(\bar{\rho})) \right)$$

$$=: \text{Sel}_{S_m} \quad \text{Selmer 群}$$

同型のとりかえ分

v とは

$$\text{Ker} \left(\text{Aut}_{G_{\mathbb{F}}} (V_{\mathbb{F}[\epsilon]}) \longrightarrow \text{Aut}_{G_{F_v}} (V_{\mathbb{F}}) \right)$$

$$= H^0(G_{F_v}, \text{ad}(\bar{\rho})) \quad \leftarrow \text{0つかない}$$

∴ 生成元の個数

$$= \dim \text{Sel } S_m + \sum_{v \in \Sigma_p} \dim H^0(F_v, \text{ad}(\bar{\rho}))$$

Galois cohom

$$- \dim H^0(F, \text{ad}(\bar{\rho}))$$

↑
global な同型の分

↑
nによらずに

変数の個数を上にとり

$$L[[X]] \twoheadrightarrow R_n^{\square}$$

Q_n をうまくとることとて, n によらずに一定で
しかも定まった値にできる

↑

次回

$G_{F(\zeta_p)}$ の制限が abs. irred
の仮定を使って.