

2009-11-9

$$a^0(k) \subset \bigcup_{K \subset GL_2(A_f)} \Gamma(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^\pm \times GL_2(A_f) / GL_2(\mathbb{Q}), \omega^{\otimes k})^K$$

↑
cuspidal condition

KC GL₂(A_f)
open cpt

∩
diagonal action
global twist
K is omitted

重さ $k \geq 2$ の正則保型形式の空間

$GL_2(A_f)$ の表現

automorphic side

$$K = K_1(N) \iff \Gamma_1(N) \subset SL_2(\mathbb{Z})$$

$$\cap \\ GL_2(\hat{\mathbb{Z}})$$

$$a^0(k)^K = S_k(\Gamma_1(N))$$

$$a^0(k) = \bigcup_k a^0(k)^k \quad \text{smooth 表現}$$

$a^0(k)^k$: 有限次元

(modular curve の compact 性 ため)

$\forall K \subset GL_2(A_f)$
open

z の ため admissible 表現
という

semisimplicity

Peterson 内積

非退化 Hermitian 形式

$\Rightarrow a^0(k)$ semi-simple

$$\therefore a^0(k) = \bigoplus_{\pi} \pi^{\oplus m_{\pi}(\pi)} \quad \text{有限直和}$$

$\pi: GL_2(A_f)$ の
既約 admissible rep

$$m_{\pi}(\pi) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{multiplicity one theorem of Deligne.}$$

$\pi \in \mathcal{A}^0(k)$ とする $GL_2(\mathbb{A}_f)$ の既約 admissible 表現を

wt k の cuspidal な 正則保型表現 という

automorphic side



weight k normalized eigenform

Global
Langlands
 $GL_2(\mathbb{Q})$



Galois side

(ρ_λ) $G_{\mathbb{Q}}$ の 2次元表現の compatible system, 既約, odd

Hodge Tate number が $0, k-1$

(ある λ について そうなら $\rho = \rho_\lambda$)

Hecke 環 について G : locally compact 群 U $(GL_2(\mathbb{A}_f), GL_2(\mathbb{Q}_p), \dots)$ K open compact subgroup

$$T(K) = \{ f: G \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{両側 } K\text{-不変} + \text{compact 台} \}$$

locally const

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \text{Hecke algebra} & & f(hgk) = f(g) \quad \forall g \in G \\ & & \forall h, k \in K \\ & & = \mathbb{C}(K \backslash G / K) \end{array}$$

群環の類似 $K=1$ のとき $\mathbb{C}[G]$

convolution で環構造をもつ (非可換かも)

 $f, g \in T(K)$

$$f * g(x) = \int_G f(xy^{-1}) g(y) dy$$

G の Haar measure τ
 $\text{vol}(K) = 1$ とするもの

V : G の admissible repr.

$\Rightarrow V^K$: 有限次元 \mathbb{C} -vect space
 \uparrow
 $T(K)$ 加群

$f \in T(K) \quad v \in V^K$

$f \cdot v = \int_G f(x^{-1}) x v dx$

K -fixed part \mathbb{Z} との functor

$(G \text{ の admissible repr}) \xrightarrow{\quad} (T(K)\text{-加群, dim}_{\mathbb{C}} < \infty)$

\cup

$(V \text{ は } V^K \text{ で } G \text{ 上生成される})$

\nearrow 圏同値 (?) \cup
 W

ψ

$\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[K]} W$
 \uparrow 自明 (K -fixed vect)

の

$\left(\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[K]} W \right)^K = T(K) \otimes_{\mathbb{C}} W \rightarrow W$

の核で生成される表現による商 (2次元)

$$T = T: L$$

$$T_p = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ の両側剰余類}$$

$$S_p = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \quad "$$

既約 $T(GL_2(\mathbb{Z}_p))$ 加群 τ $\dim_{\mathbb{C}} < \infty$ は
 $\tau \wedge \tau$ \mathbb{C} 上 1次元. τ の同型類は

$$\left\{ x^2 - ax + b \mid a, b \in \mathbb{C}, b \neq 0 \right\}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $T_p \quad S_p \quad \text{佐武 parameter}$
 の固有値

(Frobenius の固有
 多項式に対応)

local Langlands の不分岐存 $\tau = 3$

global な話にもとる

$$\pi \subset G^0(k)$$

$\pi : GL_2(A_f)$ の既約 adm. rep.

$$= \bigotimes_p \pi_p$$

↑
無限個なので注意.

$\pi_p : GL_2(\mathbb{Q}_p)$ 既約 adm rep.

ほとんどの p で

$$\pi_p^{GL_2(\mathbb{Z}_p)} \neq 0$$

↑

$T(GL_2(\mathbb{Z}_p))$ -加群として既約

従って 1次元.

f_p : その basis.

$$:= \lim_s \left(\bigotimes_{p \in S} \pi_p \right)$$

S : 素数の有限集合

(Transition は
 f_p を tensor する.)

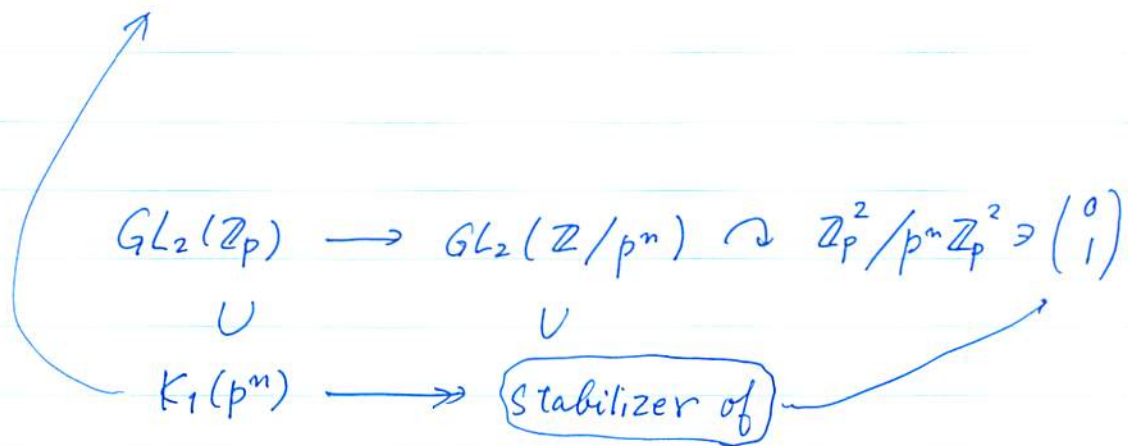
$\pi_p^{GL_2(\mathbb{Z}_p)} \neq 0$ なる p に対しては 任意 parameter
 a_p, b_p が定まる.

local

π_p : $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約 admissible 表現
 の level (= conductor) とは

$\pi_p|_{K_1(p^n)} \neq 0$ とする 最小の n

$$K_1(p^n) \subset GL_2(\mathbb{Z}_p)$$



\Rightarrow $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \pmod{p^n}$

new vector (Deligne SLNM 349)

任意の π_p に対し, そのような n が定まる

$$\dim \pi_p K_1(p^n) = 1.$$

$T(K_1(p^n))$ は可換. (何故か?)

既約性より 1次元

$\pi_1 K_1(p^n)$ の basis を new vector と呼ぶ.

global 1次元

$\pi : GL_2(A_f)$ の cuspidal autom rep.

$$\pi = \otimes \pi_p. \quad \pi_p \rightsquigarrow f_p \text{ conductor}$$

1次元表現

$$N = \prod_p p^{f_p} \quad \text{とおく}$$

$$K := K_1(N) = \prod K_1(p^{f_p})$$

$T(K)$ submodule

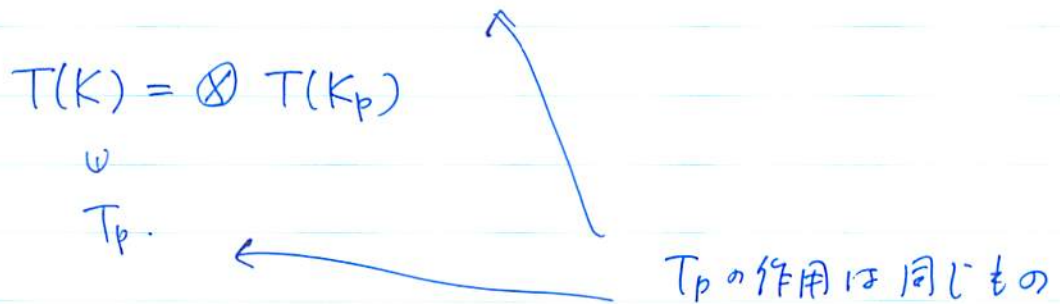
$$\pi^{K_1(N)} = \otimes \pi_p^{K_1(p^m)} =: Cf \quad \text{1次元}$$

\cap

$$G^0(k)^{K_1(N)} = S_k(N) \ni f$$

\cup

T_p 前12 def (2.6の)



$\therefore \pi^{K_1(N)}$ の generator f は T_p による
同時固有ベクトルになっている。

定数倍すれば normalized.

newform

← conductor N は 最小
なものである

(N の約数の固有ベクトルとして)
は出てこない

conductor の def

(最小性)より, $M|N$ $M < N$ とすると

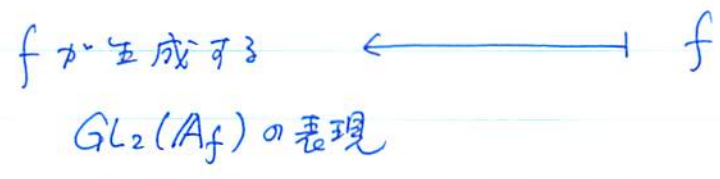
$$\pi_1^{K_1(M)} = 0 \quad \pi \cap S_k(M) = 0$$

今の $f \in$ normalized eigen newform という。

既約



$$\pi \longleftarrow \pi \cap S_k(M) = \mathbb{C}f \text{ とする } f$$



local Langlands for GL_2

$[K:\mathbb{Q}_p] < \infty$



局所類体論 GL_1



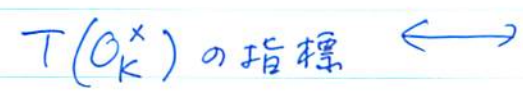
W_K^{ab} の指標

autom side

Galois side.

の 2次元化

不分岐



$\langle Fr \rangle = \mathbb{Z}$ の指標.

$$\parallel \\ \mathbb{C}[S^{\pm 1}]$$

autom

Galois

conductor

$$\chi(1 + m_K^n) = 1$$

となす最小の $n \geq 1$.

$$\text{Total } \chi(\mathcal{O}_K^\times) = 1 \text{ の}$$

ときは 0

inertia

$V : I_p \subset G_K$ の ℓ 進表現

$$\text{Art } V = \dim V - \dim V^{I_p} + \text{Sw } V$$

Artin conductor

Swan cond.

$P_p \subset I_p$ の
制限が ℓ 進
決まる

$$\text{Sw } V = \sum_{r \in \mathbb{Q}_{>0}} r (\dim V^{I^{r_2}} - \dim V^{I^r}) \in \mathbb{N}$$

有限.

分岐群の filtration.

$\text{Sw } V = 0 \Leftrightarrow V$ への P_p の作用が自明

$\text{Art } V = 0 \Leftrightarrow V$ は不分岐.

χ の K^X の指標と Γ の conductor \longleftrightarrow χ の I_p の指標と Γ の Art (χ)

Artin conductor

GL_2

autom side

Galois side

$GL_2(K)$ の既約 adm side \longleftrightarrow WD_K の 2次元 Frobenius semisimple 表現

同型類が
1:1 に対応

(ρ', N)

\uparrow nilp.

Weil 群の
表現

ρ' が semisimple

$GL_2(\mathcal{O}_K)$ 不変部分 $\neq 0$

既約 $T(GL_2(\mathcal{O}_K)) = \mathbb{C}[T, S^{\pm}]$

- 加群, \mathbb{C} 上有限次元 \longleftrightarrow

1:1

不分支 ρ' が不分支 $N=0$

$\mathbb{Z} = (Fr)$ の ss. 表現

不分岐 $n=3$ は上のように対応していた。

Satake param \leftrightarrow Frobenius の特性多項式.

A	G
principal series	可約 $N=0$ $\chi \oplus \chi'$
char \otimes Steinberg	" $N \neq 0$ $WD(\chi \otimes (V_{\ell} E))$ \uparrow Tate curve.
super cuspidal	既約

discrete series

$= (\chi \otimes \chi \cdot \text{cyclo}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$

parabolic induction

$B \subset GL_2(K)$ 上三角

$\chi :$

$$\text{Ind}(\chi, \chi') = \{ f: G \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{loc const} \}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g\right) = \chi(a)\chi'(d)\omega_{-1}(d)f(g)$$

$\omega_{-1} = \omega^{-1} : \omega_1$ cyclotomic char
 (=対応する K^\times の char)

$$\text{Steinberg} = \text{Ind}(1, 1) / 1$$

sub \mathbb{Z} - λ \mathbb{Z} \mathbb{Z}
 1次元自明表現



$$f\left(\begin{array}{l} \pi K_1(p^n) \neq 0 \text{ と } \bar{\pi} \text{ 有る} \\ \text{最小の } m \end{array}\right) = \text{Art}(V) = \underbrace{\dim V}_2 - \dim(\ker N)^I + \text{Sw } V$$

3. Serre 予想

- 予想の定式化
- 予想の帰結
- 証明に使われているものの紹介

$$\bar{\rho}: G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathbb{F}) \quad (\text{絶対既約連続表現})$$

↙ $l \neq 2$ なら自動的

\mathbb{F} 有限体 $\text{char } \mathbb{F} = l$

「modular 表現」は
「modular か？」

$$\bar{\rho}: \text{odd} \quad \det \bar{\rho} (\text{complex conj}) = -1$$

Serre 予想

$$\implies \bar{\rho} \text{ は } \underline{\text{modular}}$$

$\exists f$ normalized eigenform

$$f: T_k(N, \epsilon)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}(f) =: E$$

$$\rho_{f, \lambda}: G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathcal{O}_{\lambda})$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & \longrightarrow & F' \\ & \nearrow & \\ & F & \end{array}$$

s.t. $\rho_{f,\lambda} \otimes F' \cong \bar{\rho} \otimes F$

"qualitative"

N, k, ε を決めるのが詳しい version.