2009-11-9

$\mathcal{A}^0(k) \subset \bigcup_{\substack{K \subset GL_2(\mathbb{A}_f) \\ \text{open cpt}}} \Gamma(\mathbb{C}^\times \backslash \tilde{\mathbb{R}}^{\pm} \times GL_2(\mathbb{A}_f) / GL_2(\mathbb{Q}), \omega^{\otimes k})^K$

cuspでの条件

diagonal作用
globalなものの
カッコは略

重さ $k \geqq 2$ の正則保型形式の空間

$GL_2(\mathbb{A}_f)$ の表現

automorphic side

$K = K_1(N) \longleftrightarrow \Gamma_1(N) \subset SL_2(\mathbb{Z})$

$\cap$

$GL_2(\hat{\mathbb{Z}})$

$\mathcal{A}^0(k)^K = S_k(\Gamma_1(N))$

$$\mathcal{A}^0(k) = \bigcup_K \mathcal{A}^0(k)^K$$ smooth 表現

$\mathcal{A}^0(k)^K$: 有限次元 $\quad \forall K \subset GL_2(\mathbb{A}_f)$ open

(modular curve の compact 性より)

このとき admissible な表現という

semisimplicity

Peterson 内積 非退化 Hermite 形式

$$\Longrightarrow \mathcal{A}^0(k) \text{ semi-simple}$$

$$\therefore \quad \mathcal{A}^0(k) = \bigoplus \pi^{\oplus m_k(\pi)}$$ 有限直和

π : $GL_2(\mathbb{A}_f)$ の既約 admissible rep

$$m_k(\pi) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$ multiplicity one thm

cf Deligne.

$\pi \subset \mathcal{A}^0(k)$ となる $GL_2(\mathbb{A}_f)$ の既約 admissible 表現を

wt k の cuspidal な正則保型表現という

automorphic side

$\updownarrow$ 1:1

weight k normalized eigenform

Global Langlands $GL_2(\mathbb{Q})$

$\updownarrow$ ← Serre 予想の帰結（前回）

(ρ_λ) $G_{\mathbb{Q}}$ の 2次元表現の compatible system, 既約, odd

Hodge Tate number が $0, k-1$

（ある λ についてそうならどこでも）

Galois side

Hecke 環について

G : locally compact 群

$\cup$ $\quad (GL_2(\mathbb{A}_f),\ GL_2(\mathbb{Q}_p), \cdots)$

K open compact subgroup

locally const

$T(K) = \{ f : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid$ 両側 K-不変 + compact 台$\}$

Hecke algebra

$f(hgk) = f(g) \quad \forall g \in G$
$\quad \forall h, k \in K$

$= \mathbb{C}^{(K \backslash G / K)}$

群環の類似 $\quad K = 1$ のとき $\mathbb{C}[G]$

convolution で環構造をもつ (非可換かも)

$f, g \in T(K)$

$$f * g(x) = \int_G f(xy^{-1}) g(y)\, dy$$

G の Haar measure で
$vol(K) = 1$ となるもの

V : G の admissible repr.

$\Rightarrow$ V^K : 有限次元 $\mathbb{C}$-vect space

$\curvearrowleft$ $T(K)$ 加群

$f \in T(K)$ $\quad v \in V^K$

$$f \cdot v = \int_G f(x^{-1})\, x v \, dx$$

K-fixed part をとる functor

$$(G\text{ の admissible repr}) \longrightarrow (T(K)\text{-加群}, \dim_{\mathbb{C}} < \infty)$$

$\cup$

(V は V^K で G 上生成される)

圏同値 (?)

Ψ

W

Ψ

$$\mathbb{C}[G] \underset{\mathbb{C}[K]}{\otimes} W$$

自明 (K-fixed vect)

の

$$\left(\mathbb{C}[G] \underset{\mathbb{C}[K]}{\otimes} W\right)^K = T(K) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W \longrightarrow W$$

の核で生成される表現による商 (でいいはず)

$$G = GL_2(\mathbb{A}_f) = \prod GL_2(\mathbb{Q}_p)$$
$$\cup \qquad\qquad \cup$$
$$K = \prod K_p$$

K_p : ほとんどすべてで $GL_2(\mathbb{Z}_p)$

$$T(K) = \bigotimes_p T(K_p)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$GL_2(\mathbb{A}_f) \qquad GL_2(\mathbb{Q}_p)$$

$$T(GL_2(\mathbb{Z}_p)) = \mathbb{C}^{(GL_2(\mathbb{Z}_p) \backslash GL_2(\mathbb{Q}_p) / GL_2(\mathbb{Z}_p))}$$

片方でわる

$\mathbb{Q}_p^2 \supset L$ lattice を分類

$\quad\quad$ open cpt

両側でわる

(L, L') $\quad L \otimes \mathbb{Q}_p = L' \otimes \mathbb{Q}_p$

$\longrightarrow$ integer 2つ で表される 単因子論.

$\therefore T(GL_2(\mathbb{Z}_p)) = \mathbb{C}[T_p, S_p^{\pm 1}]$ とかける.

ただし

$$T_p = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ の両側剰余類}$$

$$S_p = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \quad \text{〃}$$

既約 $\mathcal{T}(GL_2(\mathbb{Z}_p))$ 加群 で $\dim_{\mathbb{C}} < \infty$ は
すべて $\mathbb{C}$ 上 1次元．その同型類は

$$\{ x^2 - \underset{\uparrow}{a}x + \underset{\uparrow}{b} \mid \underbrace{a, b}_{\uparrow} \in \mathbb{C},\ b \neq 0 \}$$

で分類　　T_p　　S_p　　佐武 parameter

の固有値

(Frobenius の固有多項式に対応)

local Langlands の不分岐なところ

global な話にもどる

$\pi \subset \mathcal{G}^0(k)$

π : $GL_2(\mathbb{A}_f)$ の既約 adm. rep.

$= \bigotimes_p \pi_p$ 　　π_p : $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ 既約 adm rep.

$\uparrow$ 　　　　ほとんどすべての p で

∞ 個なので注意. 　　$\pi_p^{GL_2(\mathbb{Z}_p)} \neq 0$

$\uparrow$

$:= \varinjlim_S \left(\bigotimes_{p \in S} \pi_p \right)$ 　　$T(GL_2(\mathbb{Z}_p))$ - 加群として既約

S: 素数の有限集合 　　従って 1 次元.

f_p : その basis.

$\left(\begin{array}{l} \text{Transition は} \\ f_p \text{ を tensor する.} \end{array} \right)$

$\pi_p^{GL_2(\mathbb{Z}_p)} \neq 0$ なる p に対しては佐武 parameter

a_p, b_p が定まる.

local

π_p : $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約 admissible 表現

の level (= conductor) とは

$\pi_p^{K_1(p^n)} \neq 0$ となる最小の n

$K_1(p^n) \subset GL_2(\mathbb{Z}_p)$

$$\begin{array}{ccccc} GL_2(\mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & GL_2(\mathbb{Z}/p^n) & \curvearrowright & \mathbb{Z}_p^2/p^n\mathbb{Z}_p^2 \ni \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \cup & & \cup & & \\ K_1(p^n) & \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow & \boxed{\text{Stabilizer of}} & & \end{array}$$

つまり $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \mod p^n$

new vector (Deligne SLNM 349)

任意の π_p に対し、そのような n が定まる

$$\dim \pi_p^{K_1(p^n)} = 1.$$

$T(K_1(p^n))$ は可換. (何故か?)

既約性より 1次元

$\pi_1^{K_1(p^n)}$ の basis を new vector と呼ぶ.

global にもどる

π : $GL_2(\mathbb{A}_f)$ の cuspidal autom rep.

$\pi = \otimes \pi_p$. $\quad \pi_p \rightsquigarrow f_p$ conductor

ほとんどすべてで 0.

$$N = \prod_p p^{f_p} \quad \text{とおく}$$

$$K := K_1(N) = \prod K_1(p^{f_p})$$

$T(K)$ submodule

$$\pi^{K_1(N)} = \bigotimes \pi_p^{K_1(p^n)} =: \mathbb{C}f \quad 1次元$$

$$\cap$$

$$\mathcal{A}^0(k)^{K_1(N)} = S_k(N) \ni f$$

$$\circlearrowright$$

T_p 前にdefしたもの

$$T(K) = \bigotimes T(K_p)$$

$$\cup$$

T_p.

T_pの作用は同じもの

$\therefore$ $\pi^{K_1(N)}$ のgenerator f は T_p たちの同時固有ベクトルになっている.

定数倍すれば normalized.

<u>newform</u> $\leftarrow$ conductor N は最小なものがとられている

(N の約数の固有ベクトルとしては出てこない)

conductor の def

(最小性)より, $M | N$ $M < N$ とすると

$$\pi_1^{K_1(M)} = 0 \quad \pi \cap S_k(M) = 0$$

今の f を normalized eigen <u>new</u> form という.

既約

$$\{\text{重さ } k \text{ の正則保形表現}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \bigcup_N \left\{\begin{array}{l}\text{重さ } k,\ \text{level } N \text{ の} \\ \text{nomalized eigen newform}\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{ccc} \cup\!\!\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\!\!\mid \\ \pi & \longmapsto & \pi \cap S_k(M) = \mathbb{C}f \text{ となる } f \end{array}$$

f が生成する $GL_2(\mathbb{A}_f)$ の表現 $\longleftarrow\!\!\!\!\mid$ f

---

local Langlands for GL_2 $[K:\mathbb{Q}_p]<\infty$

局所類体論 GL_1

$K^\times$ の指標 $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ W_K^{ab} の指標

autom side Galois side.

の 2次元化

不分岐

$T(\mathcal{O}_K^\times)$ の指標 $\longleftrightarrow$ $\langle Fr \rangle = \mathbb{Z}$ の指標.

$\parallel$

$\mathbb{C}[S^{\pm 1}]$

auton Galois

conductor

$\chi(1+m_K^n) = 1$

となる最小の $n \geq 1$.

ただし $\chi(\mathcal{O}_K^\times)=1$ の

ときは 0

inertia

V : $I_p \subset G_K$ の ℓ 進表現

$$\mathrm{Art}\, V = \dim V - \dim V^{I_p} + \mathrm{Sw}\, V$$

Artin conductor

Swan cond.

$P_p \subset I_p$ への

制限だけで

決まる

$$\mathrm{Sw}\, V = \sum_{r \in \mathbb{Q}_{>0}} r\left(\dim V^{I^{r+}} - \dim V^{I^r}\right) \in \mathbb{N}$$

有限.

分岐群の filtration.

$\mathrm{Sw}\, V = 0 \iff V$ への P_p の作用が自明

$\mathrm{Art}\, V = 0 \iff V$ は不分岐.

χ の $K^\times$ の指標としての conductor $\longleftrightarrow$ χ の I_p の指標としての $Art(\chi)$

Artin conductor

GL_2

autom side | Galois side

$GL_2(K)$ の既約 adm side $\longleftrightarrow$ WD_K の 2次元 Frobenius semisimple 表現

同型類が 1:1 に対応

(ρ', N)

Weil群の表現

nilp.

ρ' が semisimple

$GL_2(\mathcal{O}_K)$ 不変部分 $\neq 0$

既約 $\mathcal{T}(GL_2(\mathcal{O}_K)) = \mathbb{C}[T, S^{\pm}]$

―加群，$\mathbb{C}$上有限次元

$\longleftrightarrow$ 1:1

不分岐　ρ' が不分岐　$N=0$

$\mathbb{Z} = (Fr)$ の s.s. 表現

不分岐なところは上のように対応していた

Satake param $\longleftrightarrow$ Frobenius の特性多項式.

A	G		
principal series	可約	$N=0$	$\chi \oplus \chi'$
char $\otimes$ Steinberg	〃	$N \neq 0$	$WD(\chi \otimes (V_\ell E))$
			Tate curve.
			$= \left(\chi \oplus \chi \cdot \mathrm{cyclo}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$
super cuspidal	既約		

discrete series

parabolic induction

$B \subset GL_2(K)$ 上三角

χ :

$$\mathrm{Ind}(\chi, \chi') = \{ f : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{loc const}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g\right) = \chi(a)\chi'(d)\omega_{-1}(d) f(g) \}$$

$\omega_{-1} = \omega^{-1}$: ω_1 cyclotomic char に対応する $K^\times$ の char

$$\text{Steinberg} = \mathrm{Ind}(1, 1) / 1$$

subで入っている 1次元自明表現

A G

$$\pi \longleftrightarrow V$$

$$f\begin{pmatrix} \pi^{K_1(p^n)} \neq 0 \text{ となる} \\ \text{最小の } n \end{pmatrix} = \mathrm{Art}(V)$$

$$= \underbrace{\dim V}_{\substack{\parallel \\ 2}} - \dim(\ker N)^I$$

$$+ \mathrm{Sw}\, V$$

3. Serre 予想

- 予想の定式化
- 予想の帰結
- 証明に使われているものの紹介

$\ell \neq 2$ なら自動的

$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathbb{F})$ (絶対)既約連続表現

$\mathbb{F}$ 有限体 $\quad \mathrm{char}\, \mathbb{F} = \ell$

「modular 表現」は

「modular か？」

$\bar{\rho}$: odd $\quad \det \bar{\rho}(\text{complex conj}) = -1$

Serre 予想

$\Longrightarrow$ $\bar{\rho}$ は modular

$\exists f$ normalized eigenform

$$f : T_k(N, \varepsilon)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}(f) =: E$$

$$\rho_{f,\lambda} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathcal{O}_\lambda)$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_\lambda \arrow[r] & \mathbb{F}' \\ \mathbb{F} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

s.t. $\rho_{f,\lambda} \otimes \mathbb{F}' \cong \bar{\rho} \otimes \mathbb{F}$

"qualitative"

N, k, ε を決めるのが詳しい version.