

2009-11-2

- 構成の残り
- $GL_2(A_f)$ の表現
- local Langlands correspondence

 $N \geq 5$

$$Y_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \subset X_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \quad / \quad \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$$

modular curve とその compact 化

$$H^1(X_1(N)(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \quad T_2(N)_{\mathbb{Q}}\text{-module}$$

自由 rank 2

↙ $T_2(N)_{\mathbb{Q}_\ell}$ -module free rank 2

$$H^1(X_1(N)(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$

$$= \text{Hom} \left(\varprojlim J_1(N)(\bar{\mathbb{Q}})[\ell^m], \mathbb{Q}_\ell \right)$$

↪
 $G_{\mathbb{Q}}$ の ℓ -進表現

$J_1(N) = \text{Jac } X_1(N)$

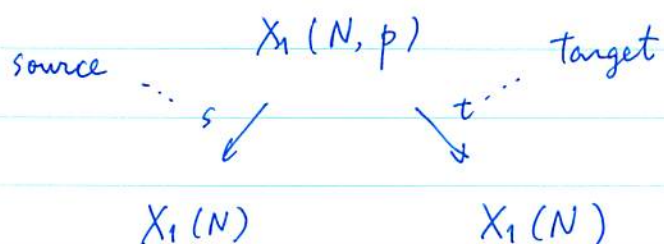
$$f: T_2(N)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}(f)$$

" E

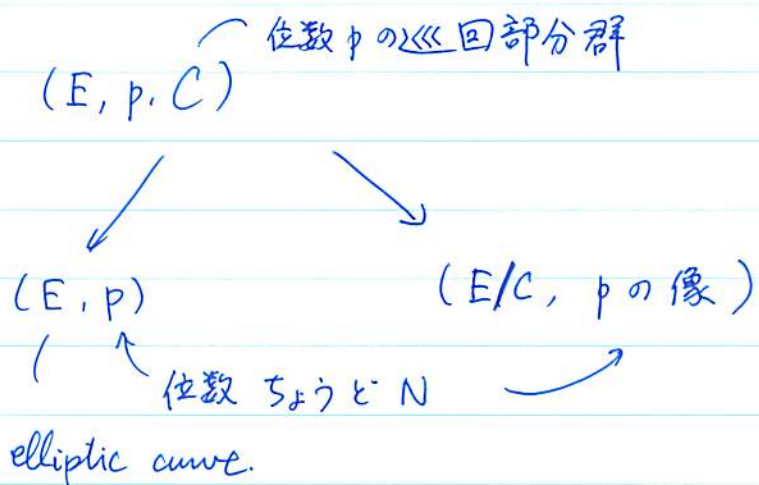
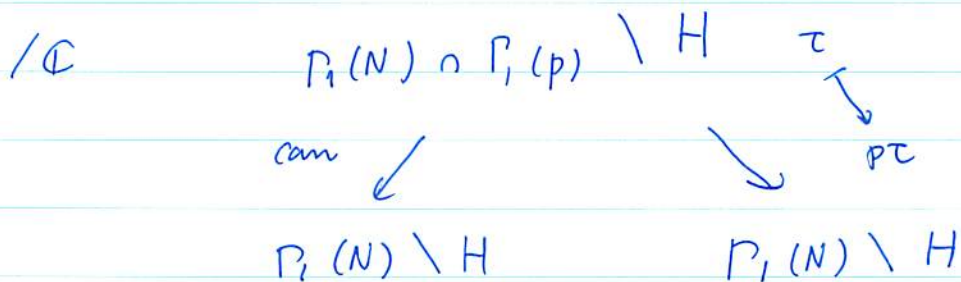
normalized eigencusp form
が定める環準同型

 $\lambda: E$ の有限素点

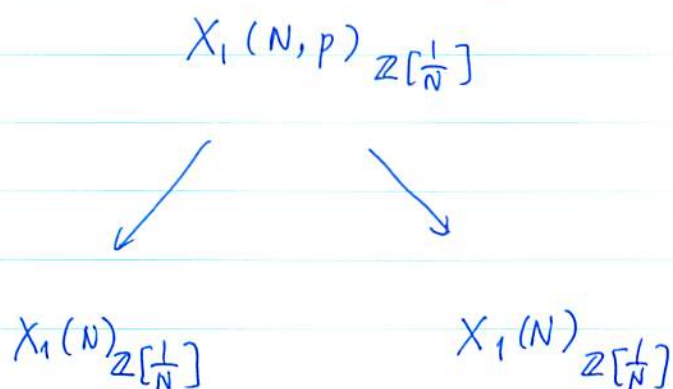
p : 素数 $p \nmid N$



$$T_p = S_* \circ t^*$$



$E \rightarrow E/C$ isogeny の source/target

$\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$

 $Y_1(N, p)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]}$ の moduli 解釈

- $\mathbb{Z}[\frac{1}{Np}]$ 上では \mathbb{C} 上同様.

 位数 p の巡回部分群

 = étale local に $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ と同型

- p のときは Drinfeld の意味 (詳細は略)

$$\left(\begin{array}{l} E \rightarrow E/C \quad \text{degree } p \text{ の isogeny} \\ \text{の moduli と思えばよい} \end{array} \right)$$
 $T_p = S_* \circ t^*$ として右辺に T_p の作用
を定義する.

$G_{\mathbb{Q}}$ の表現 \rightarrow 右辺の $T_2(N)_{\mathbb{Q}_\ell}$ 加群構造と compatible

$$H^1(X_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell) \quad G_{\mathbb{Q}} - T_2(N)_{\mathbb{Q}_\ell} \text{ 加群}$$

$$V_\lambda := H^1(X_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{T_2(N)_{\mathbb{Q}_\ell}} E_\lambda \quad G_{\mathbb{Q}} \text{ の 2次元 } E_\lambda \text{ 表現}$$

V_λ は $p \nmid N\ell$ で不分岐
($p=\ell$ だと $p \nmid N$ なら crystalline)

$$\det(1 - \text{Fr}_p t : V_\lambda) = 1 - a_p(f)t + \varepsilon(p)pt^2$$

\nearrow
 示すには、

$$\det(1 - \text{Fr}_p t : H^1(X_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell))$$

$$\uparrow$$

$$T_2(N)_{\mathbb{Q}_\ell}\text{-mod } \ell \mid 2 \text{ の det}$$

$$= 1 - T_p t + \langle p \rangle pt^2$$

\uparrow
 Diamond operator

示せばよい。

$$\begin{array}{c}
 X_1(N, p)_{\mathbb{F}_p} \\
 \text{ii} \\
 \hline
 X_1(N, p)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \mathbb{F}_p \xrightarrow{(s, t)} X_1(N)_{\mathbb{F}_p} \times X_1(N)_{\mathbb{F}_p}
 \end{array}$$

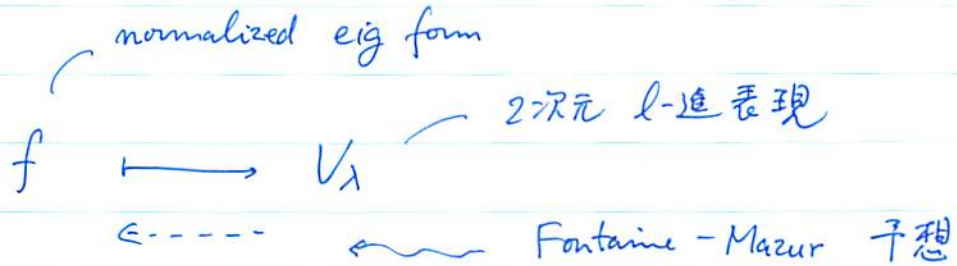
合同関係式 $\rightsquigarrow \parallel$

$$\Gamma_{Fr} \cup {}^t \Gamma_{\langle p \rangle} \circ Fr_p$$

代数的対応

Frobenius	arithmetic) 作用は同じもの.
Hecke	geometric	

= 知らぬ moduli 解釈をたつかってたしかめればよい.



N, k, ε $\left(\begin{array}{l} k \geq 2 \text{ でも同様} \\ \text{説明略} \end{array} \right)$

V_λ :

- (1) $p \nmid Nl$ で不分裂 $k-1$
- (2) $\det^{-1} = \varepsilon \cdot (\text{cyclotomic}_l)$

$$\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \longrightarrow E^\times$$

↑

$$G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$$

cyclo_ℓ

$$G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{\ell^\infty})/\mathbb{Q})$$

$$\mathbb{Z}_\ell^\times = \text{Aut}(\mathbb{Z}_\ell(1)) \quad \mathbb{Z}_\ell(1) = \varprojlim_n \mu_{\ell^n}$$

$$(\lambda/p) \quad (\lambda \ell = p)$$

(3) $V_\lambda / G_{\mathbb{Q}} \cong$ potentially crystalline semistable

$$\tau^* V_\lambda \otimes_{E_\lambda} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}_p \oplus \mathbb{C}_p(-k)$$

Hodge-Tate 分解

$$\mathbb{C}_p = \widehat{E}_\lambda$$

$G_{\mathbb{Q}_p}$ 表現の同型

$$(2) \Rightarrow (2') \det(\text{complex conj}) = -1 \quad \text{"odd"}$$

$$\left(\begin{array}{l} \Gamma_0(N) \ni \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \gamma \\ \varepsilon(-1) = (-1)^k \\ f = \varepsilon(-1) (-1)^k f \\ \gamma_k^* f = \varepsilon(\gamma) f \end{array} \right)$$

$\rho: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(E_{\lambda})$ 2次元 l 進表現 V_{λ}

(1) 不分裂

(2) odd

(3) $\lambda | l = p$ とすると $\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ は

potentially semistable である

$$V_{\lambda} \otimes_{E_{\lambda}} \mathbb{C}_p = \mathbb{C}_p \oplus \mathbb{C}_p(1-k) \quad (k \geq 2)$$

とする. $\det^{-1} = \varepsilon \cdot \text{cyclo}_p^{k-1}$ によって

$\varepsilon: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow E_{\lambda}^{\times}$ を定め

N を V_{λ} (が定める W.D 群の表現) の conductor とおくと. level N , weight k , char ε の normalized eigencusp form f と体の準同型

$$\mathbb{Q}(f) \hookrightarrow E_{\lambda}$$

が存在して ρ は ρ_f と同型である。

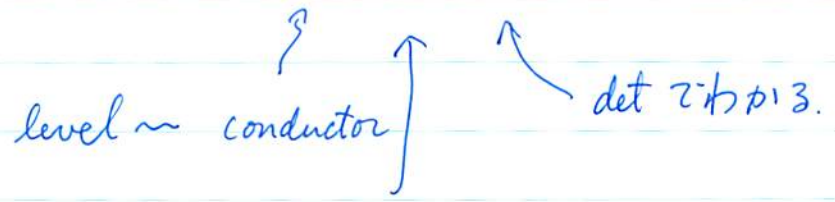
(Fontaine-Mazur 予想)

(ほとんどの場合 1 に示されている)

Galois 表現 から modular 表現 から 導くとする

modular form ϵ と $n=2$ ですか?

表現 ϵ を見て N, k, ϵ ϵ を決めねばならない



Hodge Tate

p 階 Hodge が出て $n=3$.

weight

- ϵ det でわかる
- N conductor — Galois 表現の分岐
- k Hodge filtration を見ている

l -adic の場合.

∞ 素点
de Rham realization

$GL_2(\mathbb{R})$ の表現

$W(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ の 2次元表現

Langlands parametrization

pure \mathbb{R} -Hodge structure (rank 2)

global なものなので

\mathbb{Q}_p の $n=3$ でも同じものが
出ているはず.

mod l のときはもう少し(や)かん。

$$\begin{pmatrix} N \\ k \\ E \end{pmatrix}$$
 p のときは3 はすて3.
 面倒.

今までは表現 1ヶ.

system.

$f \longmapsto (V_\lambda)_\lambda: E$ の有限素点
 \downarrow
 strict compatible system

$\left(\begin{array}{l} \text{weight } 2 \rightarrow \text{Tate} \\ \text{Frobenius は semisimple} \end{array} \right)$

訂正 (WD の表現の compatibility の def の) 才1回

$$\begin{array}{ccc} (\rho_\lambda, N_\lambda) & & (\rho_{\lambda'}, N_{\lambda'}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ E_\lambda & & E_{\lambda'} \end{array}$$

$\rho_\lambda, \rho_{\lambda'}$ が ~~E 上定義され, E 上有理的で E 上同型~~

E 上定義され, E 上同型

Thm

(ρ_λ) 4-7 の (1), (2'), (3) をみたす

compatible system とすると (ρ_λ) は保型形式
から来る.

(Serre 予想の帰結)

$GL_2(A_f)$ の表現

$$A_f = \hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q} \quad \text{finite adèle}$$

$$S_k(\Gamma) \subset \Gamma(H, \omega^{\otimes k})^\Gamma \quad \Gamma = \Gamma_1(N) \quad N \geq 1$$

Deligne LNM 349

$$\Gamma \backslash H = H / {}^t\Gamma = H^\pm \times P_N / GL_2(\mathbb{Z})$$

$$= \mathbb{C}^\times \backslash \tilde{R} \times P_N / GL_2(\mathbb{Z})$$

$$\tilde{R}^{\pm} = \text{Isom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \quad GL_2(\mathbb{R})\text{-torsor}$$

$$\begin{aligned} \tau\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z}) &\curvearrowright \mathbb{Z}^2/N\mathbb{Z}^2 \\ &\downarrow \psi \\ &\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ の stabilizer} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K \subset GL_2(\hat{\mathbb{Z}}) &\curvearrowright \mathbb{Z}^2/N\mathbb{Z}^2 = \hat{\mathbb{Z}}^2/N\hat{\mathbb{Z}}^2 \\ &\downarrow \psi \\ &\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ の stabilizer} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{*} \downarrow & \begin{matrix} K_{\infty} \\ \text{ii} \end{matrix} \\ \Gamma \backslash H &= \left(\mathbb{C}^* \backslash \tilde{R}^{\pm} \times K \backslash GL_2(A_f) \right) / GL_2(\mathbb{Q}) \\ & \quad \uparrow GL_2(A_f) \text{ の open compact subgroup.} \end{aligned}$$

$$P_N \subset \mathbb{Z}^2/N\mathbb{Z}^2 \quad \text{位数ちょうど } N$$

$$P_N = \tau\Gamma \backslash SL_2(\mathbb{Z})$$

$$\tau\Gamma^{\pm} \backslash GL_2(\mathbb{Z}) \subset K \backslash GL_2(A_f)$$

$$\mathbb{Q} \text{ の類数} = 1 \quad \Rightarrow \quad \textcircled{*}$$

(一般には類数の数 T だけ共役で動かす.)

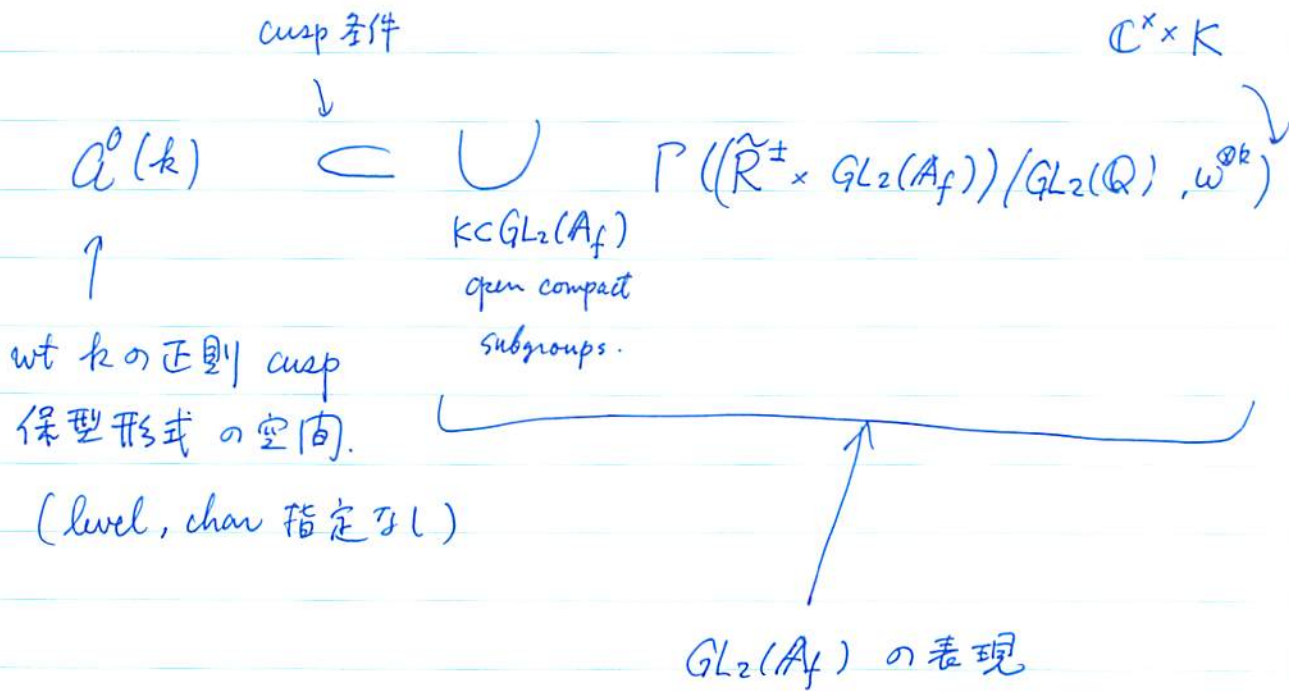
$$A = A_f \times \mathbb{R}$$

$$\Gamma \backslash H = K_{\infty} K_f \backslash GL_2(A) / GL_2(\mathbb{Q})$$

$$S_k(\Gamma) \subset \mathcal{P}(H, \omega^{\otimes k})^\Gamma$$

↑
cusp での条件 ||

$$\mathcal{P}(\tilde{R}^\pm \times GL_2(A_f), \omega^{\otimes k})^{\mathbb{C}^* \times K \times GL_2(\mathbb{Q})}$$



$$K \leftrightarrow \Gamma$$

$$A^0(k)^K = S_k(\Gamma)$$

Adic 表現 と adic 表現 の 対応 と見る

↑
(保型形式 での)

Langlands

他の定式化

∞ 素点も対等に

$$C^\infty(\tilde{R}^\pm \times GL_2(A_f))$$

$$D_{k-1} : \underbrace{GL_2(\mathbb{R}) \text{ の 重さ } k \text{ の 正則 discrete series}}_{\text{の表現}}$$

\downarrow
 e_k

正しくは Harish-Chandra 加群 という =

(\mathfrak{g}, K) 加群

\uparrow

Lie 環 $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$

$K = \mathbb{C}^\times$ の normalizer (= $W(\mathbb{C}/\mathbb{R})$)

$$K \subset GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{R})$$

$$\Gamma(\mathbb{R}^\pm \times GL_2(A_f), w^{\otimes k})$$

$$= \text{Hom}_{GL_2(\mathbb{R})}(D_{k-1}, C^\infty(\tilde{R}^\pm \times GL_2(\mathbb{R})))$$

algebraic

$$D_{k-1} \otimes \mathcal{O}(k) \hookrightarrow C^\infty(\widehat{\mathbb{R}}^\pm \times GL_2(\mathbb{A}_f)) \overset{C^\infty \times GL_2(\mathbb{Q})}{\text{}}$$

$$GL_2(\mathbb{A}) = GL_2(\mathbb{R}) \times GL_2(\mathbb{A}_f)$$

の表現

admissible

transcendental

$$K\text{-finite vector} \overset{\text{v.s.}}{\longleftrightarrow} L^2 \text{空間} \text{ unitary 表現}$$