2009-11-2

- 構成の残り
- $GL_2(\mathbb{A}_f)$ の表現
- local Langlands correspondence

$N \geqq 5$

$$Y_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \subset X_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \qquad / \mathbb{Z}[\tfrac{1}{N}]$$

modular curve とその compact 化

$H^1(X_1(N)(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ $\qquad$ $T_2(N)_{\mathbb{Q}}$ -module
自由 rank 2

$T_2(N)_{\mathbb{Q}_\ell}$ -module free rank 2

$$H^1(X_1(N)(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$

$$= \mathrm{Hom}(\varprojlim J_1(N)(\bar{\mathbb{Q}})[\ell^n], \mathbb{Q}_\ell)$$

$\circlearrowleft$

$G_{\mathbb{Q}}$ の ℓ 進表現 $\qquad J_1(N) = \mathrm{Jac}\, X_1(N)$

$f : T_2(N)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}(f)$ $\qquad$ normalized eigencusp form
$\qquad\qquad\qquad\quad \| $
$\qquad\qquad\qquad\quad E$ $\qquad$ が定める環準同型

λ : E の有限素点

p : 素数　　$p \nmid N$

source　　　　target

$$\begin{tikzcd} & X_1(N,p) \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "t"] & \\ X_1(N) & & X_1(N) \end{tikzcd}$$

$$T_p = s_* \circ t^*$$

$/\mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} & \Gamma_1(N) \cap \Gamma_1(p) \backslash \mathbb{H} \arrow[dl, "\mathrm{can}"'] \arrow[dr] & \\ \Gamma_1(N) \backslash \mathbb{H} & & \Gamma_1(N) \backslash \mathbb{H} \end{tikzcd}$$

$\tau \mapsto p\tau$

位数 p の巡回部分群

$$\begin{tikzcd} & (E, P, C) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ (E, P) & & (E/C,\ P \text{の像}) \end{tikzcd}$$

位数ちょうど N

elliptic curve.

$E \longrightarrow E/C$　isogeny の source/target

$/ \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$

$$
\begin{tikzcd}
 & X_1(N,p)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} & & X_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]}
\end{tikzcd}
$$

$Y_1(N,p)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]}$ の moduli 解釈

- $\mathbb{Z}[\frac{1}{Np}]$ 上では $\mathbb{C}$ 上同様.

  位数 p の巡回部分群
  = etalé local に $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ と同型

- p のところ　　Drinfeld の意味（詳細は略）

  ($E \longrightarrow E/C$ degree p の isogeny の moduli と思えばよい)

$T_p = s_* \circ t^*$ として右辺に T_p の作用を定義する.

$G_{\mathbb{Q}}$ の表現 $\longrightarrow$ 右辺の $T_2(N)_{\mathbb{Q}_\ell}$ 加群構造と compatible

$H^1(X_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ $\qquad$ $G_{\mathbb{Q}}$ - $T_2(N)_{\mathbb{Q}_\ell}$ 加群

$V_\lambda := H^1(X_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{T_2(N)_{\mathbb{Q}_\ell}} E_\lambda$ $\qquad$ $G_{\mathbb{Q}}$ の 2次元 E_λ 表現

V_λ は $p \nmid N\ell$ で不分岐

($p=\ell$ でも $p \nmid N$ なら cristalline)

$$\det(1 - Fr_p t : V_\lambda) = 1 - a_p(f)t + \varepsilon(p)pt^2$$

を示すには,

$$\det(1 - Fr_p t : H^1(X_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell))$$

$T_2(N)_{\mathbb{Q}_\ell}$-mod としての det

$$= 1 - T_p t + \langle p \rangle p t^2$$

Diamond operator

を示せばよい.

$$\overbrace{X_1(N,p)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \underset{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]}{\otimes} \mathbb{F}_p}^{X_1(N,p)_{\mathbb{F}_p}} \underset{(s,t)}{\hookrightarrow} X_1(N)_{\mathbb{F}_p} \times X_1(N)_{\mathbb{F}_p}$$

合同関係式 $\rightsquigarrow$ ‖

$$\Gamma_{Fr} \cup {}^t\Gamma_{\langle p \rangle \circ Fr_p}$$

代数的対応

Frobenius arithmetic ⎫
Hecke geometric ⎭ な作用は同じもの.

これらを moduli 解釈をつかってたしかめればよい.

—— . ——

$$\underset{\text{normalized eig form}}{f} \longmapsto \underset{\text{2次元 } \ell\text{-進表現}}{V_\lambda}$$

$\Leftarrow$ - - - - - $\leftsquigarrow$ Fontaine - Mazur 予想

N, k, ε ($k \geq 2$ でも同様にできる 説明略.)

V_λ :

(1) $p \nmid N\ell$ で不分岐

(2) $\det^{-1} = \varepsilon \cdot (\text{cyclotomic}_\ell)^{k-1}$

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times & \longrightarrow & E^\times \\ \uparrow\wr & & \\ G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q}) & & \end{array}$$

cyclo_ℓ

$$\begin{array}{c} G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{\ell^\infty})/\mathbb{Q}) \\ \swarrow \\ \mathbb{Z}_\ell^\times = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_\ell(1)) \end{array} \qquad \circlearrowright \quad \mathbb{Z}_\ell(1) = \varprojlim_n \mu_{\ell^n}$$

~~$(\lambda | p)$~~ $(\lambda | \ell = p)$

(3) $V_\lambda|_{G_{\mathbb{Q}}}$ は potentially ~~cristalline~~ semistable

で $V_\lambda \underset{E_\lambda}{\otimes} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}_p \oplus \mathbb{C}_p(-(k-1))$

Hodge-Tate 分解

$G_{\mathbb{Q}_p}$ 表現の同形

$\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{E}}_\lambda$

(2) $\Rightarrow$ (2') $\det(\text{complex conj}) = -1$ "odd"

$$\left(\Gamma_0(N) \ni \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \gamma \qquad \begin{array}{l} \varepsilon(-1) = (-1)^k \\ f = \varepsilon(-1)(-1)^k f \end{array} \qquad \gamma_k^* f = \varepsilon(\gamma) f \right)$$

$\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(E_\lambda)$ 2次元 ℓ 進表現 V_λ

(1) 不分岐

(2') odd

(3) $\lambda | \ell = p$ とすると $\rho|G_{\mathbb{Q}_p}$ は

potentially semistable で

$$V_\lambda \underset{E_\lambda}{\otimes} \mathbb{C}_p = \mathbb{C}_p \oplus \mathbb{C}_p(1-k) \quad (k \geqq 2)$$

とする. $\det^{-1} = \varepsilon \cdot \mathrm{cyclo}_\ell^{k-1}$ によって

$\varepsilon : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow E_\lambda^\times$ を定め

N を V_λ (が定める W.D 群 の 表現) の conductor とおくと. level N, weight k, char ε の nomalized eigencusp form f と 体の準同型

$$\mathbb{Q}(f) \hookrightarrow E_\lambda$$

が存在して ρ は $\rho_{f\lambda}$ と同型であろう.

(Fontaine-Mazur 予想)

(ほとんどの場合 に示されている)

Galois 表現から modular 表現から来るとする

modular form をどこでさがすか?

表現を見て N, k, ε を決めねばならない

level ~ conductor

det でわかる.

Hodge Tate

p進 Hodge が出てくるところ.

weight

ε det でわかる

N conductor — Galois 表現の分岐

k Hodge filtration を見ている

l-adic の場合.

∞ 素点 $GL_2(\mathbb{R})$ の表現

$\updownarrow$

de Rham realization

$W(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ の 2次元表現

Langlands parametrization

$\updownarrow$

pure $\mathbb{R}$-Hodge structure (rank 2)

global なものなので

$\mathbb{Q}_p$ のところでも同じものが出ているはず.

mod ℓ のときはもう少しやっかい.

$$\left\{\begin{array}{ll} N & p \text{ のところはすてる.} \\ k & \text{面倒.} \\ \varepsilon & \end{array}\right.$$

今までは表現 1ケ.

<u>system</u>.

$f \longmapsto (V_\lambda)_{\lambda : E \text{ の有限素点}}$

strict compatible system

(weight 2 → Tate

Frobenius は semisimple)

<u>訂正</u> (WD の表現の compatibility の def の) 第1回

$$(\rho_\lambda, N_\lambda) \qquad (\rho_{\lambda'}, N_{\lambda'})$$
$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$$
$$E_\lambda \qquad\qquad\qquad E_{\lambda'}$$

$\rho_\lambda, \rho_{\lambda'}$ が ~~E 上定義され, E 上有理的で E 上同型~~

E 上定義され, E 上同型

Thm

(ρ_λ) 4-7 の (1), (2′), (3) をみたす
compatible system とすると (ρ_λ) は保型形式
から来る.

(Serre 予想の帰結)

$GL_2(\mathbb{A}_f)$ の表現

$$\mathbb{A}_f = \hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q} \quad \text{finite adele}$$

$$S_k(\Gamma) \subset \Gamma(H, \omega^{\otimes k})^\Gamma \qquad \Gamma = \Gamma_1(N) \quad N \geqq 1$$

Deligne LNM 349

$$\Gamma \backslash H = H / {}^t\Gamma = H^{\pm} \times P_N / GL_2(\mathbb{Z})$$

$$= \mathbb{C}^\times \backslash \widetilde{R} \times P_N / GL_2(\mathbb{Z})$$

$\tilde{R}^{\pm} = \mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ 　　 $GL_2(\mathbb{R})$-torsor

$$
\begin{array}{ccc}
{}^t\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z}) & \curvearrowright & \mathbb{Z}^2/N\mathbb{Z}^2 \\
 & & \Psi \\
 & & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$
の stabilizer

$$
\begin{array}{ccc}
K \subset GL_2(\hat{\mathbb{Z}}) & \curvearrowright & \mathbb{Z}^2/N\mathbb{Z}^2 = \hat{\mathbb{Z}}^2/N\hat{\mathbb{Z}}^2 \\
 & & \Psi \\
 & & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$
の stabilizer

$$\Gamma \backslash H \overset{(*)}{=} \Big(\underbrace{\mathbb{C}^*}_{K_\infty} \backslash \tilde{R}^{\pm} \times \underbrace{K}_{K_f} \backslash GL_2(\mathbb{A}_f) \Big) / GL_2(\mathbb{Q})$$

$GL_2(\mathbb{A}_f)$ の open compact subgroup.

$P_N \subset \mathbb{Z}^2/N\mathbb{Z}^2$ 　位数ちょうど N

$$
\begin{aligned}
P_N = {}^t\Gamma \backslash SL_2(\mathbb{Z}) & \\
\| \quad & \\
{}^t\Gamma^{\pm} \backslash GL_2(\mathbb{Z}) & \subset K \backslash GL_2(\mathbb{A}_f)
\end{aligned}
$$

$\mathbb{Q}$ の類数 $= 1 \Longrightarrow (*)$

（一般には類数の数だけ共役で動かす.）

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_f \times \mathbb{R}$$

$$\Gamma \backslash H = K_\infty K_f \backslash GL_2(\mathbb{A}) / GL_2(\mathbb{Q})$$

$S_k(\Gamma) \subset \Gamma(H, \omega^{\otimes k})^{\Gamma}$

cuspでの条件　$\|$

$\Gamma(\tilde{\mathbb{R}}^{\pm} \times GL_2(\mathbb{A}_f), \omega^{\otimes k})^{\mathbb{C}^* \times K \times GL_2(\mathbb{Q})}$

cusp条件

$\mathbb{C}^\times \times K$

$$\mathcal{A}^0(k) \subset \underbrace{\bigcup_{\substack{K \subset GL_2(\mathbb{A}_f) \\ \text{open compact} \\ \text{subgroups.}}} \Gamma((\tilde{\mathbb{R}}^{\pm} \times GL_2(\mathbb{A}_f))/GL_2(\mathbb{Q}), \omega^{\otimes k})}$$

wt kの正則 cusp
保型形式の空間.
(level, char 指定なし)

$GL_2(\mathbb{A}_f)$の表現

$K \leftrightarrow \Gamma$

$\mathcal{A}^0(k)^K = S_k(\Gamma)$

アデールの表現とガロア表現の対応と見る

(保型形式でなく)　　Langlands

他の定式化

∞素点も対等に

$$C^\infty(\widetilde{\mathbb{R}}^{\pm} \times GL_2(\mathbb{A}_f))$$

D_{k-1} : $GL_2(\mathbb{R})$ の重さ k の正則 discrete series の表現

$\Downarrow$

e_k

正しくは Harish-Chandra 加群ということ

$(\mathfrak{g}, K)$ 加群

$\uparrow$

Lie 環 $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$

$K = \mathbb{C}^\times$ の normalizer $(= W(\mathbb{C}/\mathbb{R})$

$K \subset GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{R})$

$$\Gamma(\mathbb{R}^{\pm} \times GL_2(\mathbb{A}_f), \omega^{\otimes k})$$

$$= \mathrm{Hom}_{GL_2(\mathbb{R})}(D_{k-1}, C^\infty(\widetilde{\mathbb{R}}^{\pm} \times GL_2(\mathbb{R})))$$

algebraic

$$D_{k-1} \otimes \mathcal{A}^0(k) \hookrightarrow C^\infty(\widetilde{\mathbb{R}}^{\pm} \times GL_2(\mathbb{A}_f))^{\mathbb{C}^\times \times GL_2(\mathbb{Q})}$$

$$GL_2(\mathbb{A}) = GL_2(\mathbb{R}) \times GL_2(\mathbb{A}_f)$$

の表現

transcendental

admissible

K-finite vector $\overset{\text{v.s.}}{\longleftrightarrow}$ L^2 空間 unitary 表現