2009-10-19

Weil-Deligne 群の表現

$\mathbb{Q}_p$ $\quad Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) = G_{\mathbb{Q}_p} \twoheadrightarrow G_{\mathbb{F}_p} \cong \hat{\mathbb{Z}}$

$$\begin{array}{ccccc} & & G_{\mathbb{Q}_p} & \twoheadrightarrow & G_{\mathbb{F}_p} \\ & & \cup & & \cup \\ I_p & \subset & W_{\mathbb{Q}_p} & \twoheadrightarrow & \langle Fr_p \rangle \simeq \mathbb{Z} \end{array}$$

逆像として def

Weil 群

$W_{\mathbb{Q}_p}$ の位相 I_p が open compact subgroup.

$WD_{\mathbb{Q}_p}$ = `$W_{\mathbb{Q}_p}$ の表現 $\rho' = (\rho, N)$ pair

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho : W_{\mathbb{Q}_p} \text{ の表現} \\ \mathrm{Ker}\,\rho \cap I_p \subset I_p \text{ の開部分群} \\ N \ (\text{nilp}) \text{ 準同型} \\ \rho(\sigma) N \rho(\sigma)^{-1} = p^{n(\sigma)} N \\ \qquad n : W_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

monodromy theorem

$\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow GL(V)$ 連続 ℓ 進表現

とすると (ρ', N) $WD_{\mathbb{Q}_p}$ の表現で

$\forall n \in \mathbb{Z}$ $\sigma \in I$ に対し

$$\rho(F^n\sigma) = \rho'(F^n\sigma)\exp(t_\ell(\sigma)N)$$

をみたすものが定まる.

$$\left(t_\ell : I_p \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1) = \varprojlim \mu_{\ell^n} \simeq \mathbb{Z}_\ell \right)$$

strong compatibility

($p = \ell$ のときは除く.
p進 Hodge theory)

E : 代数体

$\rho_\lambda : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_{E_\lambda}(V_\lambda)$ λ: Eの有限素点

ℓ進表現の系

各 p, λ $\lambda \nmid p$ で WDの表現

$(\rho_\lambda|G_{\mathbb{Q}_p}, N)$ が定まる.

$W_{\mathbb{Q}_p}$ の rep

ℓ によらないことを言いたい

$$1 \longrightarrow I/I\cap\ker\rho \longrightarrow W_{\mathbb{Q}_p}/\ker f\cap I \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

有限群と Frobenius のところだけふくらんでいる.

(ρ_λ) が strictly compatible とは (strictly = strongly)

$\lambda, \lambda' \nmid p$ とすると

半単純化

$$((\rho_\lambda|_{G_{\mathbb{Q}_p}})^{ss}, N) \qquad ((\rho_{\lambda'}|_{G_{\mathbb{Q}_p}})^{ss}, N)$$

(本当は同型といいたいが, 現状では確かめようがないので 半単純化すれば trace の比較で check)

は両方とも $\bar{E}$ 上定義され, その同型類は E 上有理的 (同型類が $Gal(\bar{E}/E)$-不変) で $\bar{E}$ 上の表現として同型.

(ρ_λ) が $H^\bullet(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ $\left(\begin{array}{l} X : \text{proper} \\ \quad \text{smooth} / \mathbb{Q} \end{array}\right)$

のとき $\rho_\lambda|_{G_{\mathbb{Q}_p}}'$ は半単純 ?

(Tate予想の帰結)

• $= 0, 1$ の場合は OK $= 1$ (Faltings)

strong compatibility を示すには.

• trace の等式

good reduction のときは

Weil予想の帰結. (前回)

一般のとき.

weight spectral sequence の functoriality を示す.

Kunneth 分解が代数的.

(Tate予想の一部)

Trace の交代和 $\longrightarrow$ 成分に分解

dim ≤ 2 , modular form にともなう Galois 表現.

(elliptic or Hilbert)

- N の比較

good red $\Rightarrow$ $N=0$ なので OK

一般のとき

weight monodromy 予想 が示せれば ρ' の方から従う

H^2 まで, modular form のときも OK.

weight monodromy 予想

局所体の話

X $\mathbb{Q}_p$ 上 proper smooth alg var

$G_{\mathbb{Q}_p} \curvearrowright H^q(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_\ell) =: V$

$\ell \neq p$

monodromy thm により

$\exists$ nilp N が定まる

N から V の monodromy filtration が定まる

$N^{n+1}=0$ とする　　　Jordan 標準形

V の増大 filt. $W_\bullet V$

$W_n V = V$ $\quad W_{-n-1} V = 0$

$N(W_i V) \subset W_{i-2} V$ かつ

$N^k : Gr_k^W V = W_k V / W_{k-1} V \longrightarrow Gr_{-k}^W V$

$k \geqq 0$

が同型

がただ1つ定まる.

例 $n=1$

$V \supset \mathrm{Ker}\, N \supset \mathrm{Im}\, N \supset 0$

$W_1 \quad W_0 \quad W_{-1} \quad W_{-2}$

$V = H^q$ のとき $Gr_i^W V$ $\quad G_K$ の表現 $K = \mathbb{Q}_p$

Ψ

$F \curvearrowright Gr_i^W V$ の固有値 $\quad F$ $\quad Fr$ の持ち上げ

Weil予想の帰結として 整

固有値は代数的数

複素数としての絶対値は $p^{\frac{\text{整数}}{2}}$ $= q+i$

weight monodromy 予想

$\rightsquigarrow$ ρ' が filtration W を決める

$\rightsquigarrow$ N の同型類も決める.

2. modular form と Galois 表現

- modular form の定義
- Hecke operator
- modular form にともなう Galois 表現
  (normalized eigen cusp form)
- 構成
- GL_2 (adele) の表現
- 局所 Langlands 対応との compatibility

ref. IHES summer school 報告集用の原稿.

2.1 modular forms の定義

$N \geqq 1$ レベル　　$k \geqq 2$ 重さ

$\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ 指標

$S_k(N, \varepsilon) \subset M_k(N, \varepsilon)$ modular forms

有限次元 $\mathbb{C}$-vector space

cusp forms.

$\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ 合同部分群

$\exists N : \Gamma(N) \subset \Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$

$\Gamma(N) = \ker(SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{Z}/N))$

$$\Gamma(N) \subset \underset{d \equiv 1\,(N)}{\Gamma_1(N)} \subset \underset{c \equiv 0\,(N)}{\Gamma_0(N)} \subset SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto d \bmod N$$

Galois 表現

$$\left(\begin{array}{lll} \text{類体論} & GL(1) & \text{Dirichlet char} \\ & \cap & \\ & GL(2) & \end{array} \right)$$

$$SL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \qquad \gamma\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

$f : H \longrightarrow \mathbb{C}$ 正則関数

$$(\gamma_k^* f)(\tau) = \frac{1}{(c\tau+d)^k} f(\gamma\tau)$$

$$SL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright H \times \mathbb{C}$$

$$\ni (\tau, z) \longmapsto \left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right)$$

$$f(\tau)\, dz^{\otimes k}$$

$$\gamma^*\left(f(\tau)\, dz^{\otimes k}\right) = (\gamma_k^* f)(\tau)\, dz^{\otimes k}$$

ω : H 上の complex line bundle　dz : 基底

$\Gamma(H, \omega^{\otimes k}) = \Gamma(H, \mathcal{O}_H)(dz)^{\otimes k}$ への作用

$S_k(\Gamma)$, $M_k(\Gamma)$ $\quad (\Gamma = \Gamma_0(N), \Gamma_1(N))$

正則関数 $f: H \longrightarrow \mathbb{C}$ が level Γ 重さ k の modular form (resp cusp form) であるとは

(1) $\forall \gamma \in \Gamma$ ~~$\forall \tau \in H$~~ に対し.

$$\gamma_k^* f = f$$

(2) $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ に対し $f(\tau+1) = f(\tau)$.

なので $f(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n \qquad q = e^{2\pi i \tau}$

と書ける.

このとき $n<0 \Rightarrow a_n = 0$

(resp $n \leq 0 \Rightarrow a_n = 0$)

さらに, この条件が任意の $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対し. $\gamma_k^* f$ についても成立する

(Γ でなく)

有限個 $\#(SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma)$ の条件.

$$S_k(\Gamma_0(N)) \subset S_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^*} S_k(N, \varepsilon)$$

$\|$ fixed part $\circlearrowleft$

$S_k(N, \varepsilon = 1)$

$\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N)$ 作用

$\cong$

$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \xrightarrow[\text{char.}]{} \mathbb{C}$

で分解.

レベル N 重さ k

指標 ε の

cusp form の空間.

有限次元性 $\Leftarrow$ compact化の議論.

2.2 Hecke 作用素

f : level N 重さ k 指標 ε の cusp form

$T_n \circlearrowright S_k(N,\varepsilon)$ Hecke operators

$n=1,2,3,\cdots$

$n=p$ が素数のとき

$$T_p f(\tau) = \sum_{i=0}^{p-1} f\left(\frac{\tau+i}{p}\right) + \begin{cases} p^{k-1}\varepsilon(p) f(p\tau) & p \nmid N \\ 0 & p \mid N \end{cases}$$

このとき $T_p = U_p$ ともいう.

T_p たちは互いに可換

形式的に展開

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n n^{-s} = \prod_{p:\text{素数}} \left(1 - T_p p^{-s} + \varepsilon(p) p^{k-1} p^{-2s}\right)^{-1}$$

($\varepsilon(p)=0$ と思う $p \mid N$ のとき)

$f \in S_k(N,\varepsilon)$ が normalized eigen cusp form

$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^n$ とおくとき $a_1(f)=1$ であり,

すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し T_n の固有ベクトル

$$T_1(N,k,\varepsilon) = \mathbb{C}[T_n : n=1,2,\cdots] \subset \mathrm{End}(S_k(N,\varepsilon))$$

Hecke環

$\mathbb{C}$上の有限次元可換環.

$T_1(N)$ と略記

pairing

$$\begin{array}{ccccc} T_1(N) & \times & S_k(N,\varepsilon) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ (T & , & f) & \longmapsto & a_1(Tf) \end{array}$$

bilinear form

q展開の初項

q-expansion principle. ↑これが非退化.

$a_1(T_n f) = a_n(f)$ なので

$a_1(T_n f) = 0 \quad (\forall n) \implies f = 0$

右側について非退化.

(左側. $T_1(N)$ が その end であることから).

$\rightsquigarrow$ $S_k(N,\varepsilon) = \mathrm{Hom}(T_1(N), \mathbb{C})$ 同一視.

$\qquad\cup \qquad\qquad\qquad \cup$

$\left\{\begin{array}{l}\text{normalized} \\ \text{eigenforms}\end{array}\right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ {$\mathbb{C}$ 上の環の準同型}.

$\qquad\psi$

$f = \sum a_n q^n \underset{1:1}{\longleftrightarrow} (T_n \mapsto a_n)$

Hecke operator の固有値

$T_n f = a_n f$

$T_1(N)$ の半単純化

$\hookrightarrow$ H 上の hol func というのは世を忍ぶ仮の姿.

f: normalized eigenform

$\rightsquigarrow E := \mathbb{Q}(f) \subset \mathbb{C}$

$\qquad\qquad \|$

$\qquad \mathbb{Q}(a_n(f);\ n=1,2,\cdots)$

$\qquad \wr$

実は $\mathbb{Q}$ の有限次拡大

Def

λ : E の有限素点

$\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(E_\lambda)$ ℓ進表現

が f にともなう Galois 表現であるとは

$\boxed{\text{ほとんどすべての } p \text{ で}}$ 不分岐で,

$$\boxed{\mathrm{Tr}\,\rho(\mathrm{Fr}_p) = a_p(f)}$$

が成り立つ.

f: level N $\lambda | \ell$ とすると 指標 ε weight k

$\boxed{\text{すべての } p \nmid N\ell \text{ で}}$ 不分岐

$$\boxed{\det(1-\rho(\mathrm{Fr}_p)t) = 1 - a_p(f)t + \varepsilon(p)p^{k-1}t^2}$$

と言いかえられる

$$= (1-\alpha t)(1-\beta t)$$

Ramanujan conj

α, β の複素数としての絶対値は $p^{(k-1)/2}$

Weil 表現 + f にともなう Galois 表現の幾何的構成の帰結.

(次回)

Ramanujan conj $\Longrightarrow$ $L(f, s) = \sum a_n n^{-s}$

が $\mathrm{Re}\ s > \frac{k-1}{2} + 1$

で絶対収束.