【問題】次の場合に、$f(x,y)=x^3+y^3-3xy=k$ で定義される曲線 C の概形を描け。

(1) $k=48$

(2) $k=-1$

【解答のヒント】

(1) 次の点に注意して下さい。

1. まずは座標軸との交点など、通っていることがわかりやすい点をいくつか計算しておきます。
2. 接線が垂直に（y 軸に平行に）なる点は、C 上で $f_y=3y^2-3x=0$ を満たす点として求められます。
3. 2. の点以外では、C は（局所的に）$y=g(x)$ というような普通の関数のグラフになっています。その導関数は
$$g'(x)=-\frac{f_x}{f_y}=\frac{x^2-y}{x-y^2}$$
と計算されます。$g'(x)$ の符号を調べましょう。
4. 2. 以外の C 上の点で y が x の関数になっていると考えると、$f(x,y)=k$ を x で微分して
$$3x^2-3y^2y'-3y-3xy'=0$$
を得ます。y' を $g'(x)$ と書いても構いません。これをさらに x で微分して整理すると
$$y''=\frac{2xy\,(f(x,y)+1)}{(x-y^2)^3}=\frac{98xy}{(x-y^2)^3}$$
です。これの符号も調べましょう（これは (2) で重要です)。
5. 1. で調べた点と 3,4 で調べた $g'(x)$ 及び $g''(x)$ の符号を手がかりに、概形を描いてみます。
6. 5. で描いた曲線は確かに $f(x,y)=k$ の解の一つですが、他の解もあるかもしれません。つまり、C が1. では気付かなかった点を通っているかもしれず、そこから描き始めると別の曲線も出てくるかもしれない訳です。そこで、x 軸に垂直な直線 $x=t$ と C の交点の数を調べてみます。つまり、y の 3 次方程式
$$y^3-3ty+(t^3-48)=0$$
の解の個数を調べるのです。すると、5. で描いたもの以外の曲線が出てくることはあり得ない、ということがわかります。
7. 無限遠での振る舞いを調べます。この場合は $x+y+1=0$ に漸近しています。

(2) は

$$\begin{aligned}
f(x,y)+1 &= (x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)\\
&= \frac{1}{2}(x+y+1)\left\{(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\right\}
\end{aligned}$$

と因数分解できることに気付けば、C は直線 $x+y+1=0$ と点 $(1,1)$ であることがわかります。

勿論 (1) と同様に考えることもできます。このときは上記の 4,6 が重要です。y' や y'' の形は (1) と同様で、$f(x,y)+1=0$ より $g''(x)=0$ となるので直線であることがわかります。