数理科学 I　演習問題 1

問題 1 Lagrange 未定係数法を使って, それぞれの条件の下でのそれぞれの関数の極値をすべて求めよ。最大値, 最小値もあれば求めよ.

1. 条件 $x^2 + 3y^2 = 12$, 関数 $\dfrac{1}{3}x^3 - y^3 + 6y^2$.
2. 条件 $2x^2 + 3y^2 = 1$, 関数 $x - y$.
3. 条件 $x^2 + y^2 = 1$, 関数 $3x^2 + 2xy + y^2$.
4. 条件 $x^2(x + 1) = y^2$, 関数 xy.

問題 2 Lagrange 未定係数法を使って, 次の問いに答えよ.

1．$(a, b) \neq (0, 0), c \neq 0$ を正の実数とする．直線 $ax + by = c$ に原点からおろした垂線の足の座標を求めよ．この直線と原点の距離も求めよ.

2.　$a \neq b, c$ を正の実数とする．点 $(c, 0)$ と楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点の距離の最大値と最小値を求めよ.

問題 3 C を方程式 $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ で定義される曲線とする.

(1) C の点 $(x, y) = (\dfrac{2}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{3})$ での接線の方程式を求めよ.

(2) 次のことに注意して, C の概形を図示せよ.

・ 座標軸との交点の位置.
・ 座標軸と平行な接線をもつ点の位置.
・ 接線の傾きの正負.
・ 座標軸と平行な各直線との交点の個数.

略解. 1. $f(x,y)=x^2+3y^2$ とおく. 曲線 $f(x,y)=12$ 上では $f_x(x,y)=2x, f_y(x,y)=6y$ は同時には 0 にならない. したがってこの曲線上のすべての点で Lagrange 未定係数法が適用できる. 点 (x,y) で関数 $h(x,y)=\frac{1}{3}x^3-y^3+6y^2$ が極値をもったとすると, $2x:6y=h_x(x,y):h_y(x,y)=x^2:-3y^2+12y$. これを解くと, $x=0, y=0$ または $x+y=4$. したがって極値をとりうる点は $(0,\pm 2), (\pm 2\sqrt{3},0), (3,1)$ の 5 点のみ.

$y=g(x)$ を $x^2+3y^2=12$ の局所的な解とすると, 合成関数 $k(x)=h(x,g(x))$ の導関数は $k'(x)=\frac{x^2\cdot 6y-(-3y^2+12y)2x}{6y}=x(x+y-4)$. したがって, $(0,\pm 2)$ で極大値, $(\pm 2\sqrt{3},0)$ で極小値をとり, $(3,1)$ では極値をとらない. $(0,\pm 2)$ での値は $16, 32$, $(\pm 2\sqrt{3},0)$ での値は $\pm 8\sqrt{3}$ だから, 最大値は $(0,-2)$ での値 32, 最小値は $(-2\sqrt{3},0)$ での値 $-8\sqrt{3}$.

2. 極値をとるなら $2x:3y=1:-1$. $2x^2+3y^2=1$ と連立させて $x=\pm\sqrt{\frac{3}{10}}, y=\mp\sqrt{\frac{2}{15}}$. 最大値は $(x,y)=(\sqrt{\frac{3}{10}},-\sqrt{\frac{2}{15}})$ のときで $\sqrt{\frac{5}{6}}$. 最小値は $(x,y)=(-\sqrt{\frac{3}{10}},+\sqrt{\frac{2}{15}})$ のときで $-\sqrt{\frac{5}{6}}$.

3.　極値をとるなら $x:y=6x+2y:2x+2y$. したがって, $y=(-1\pm\sqrt{2})x$. $x^2+y^2=1$ と連立させて、$x^2=\dfrac{1}{4\mp 2\sqrt{2}}=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{4}$. $y=(-1\pm\sqrt{2})x$ を代入すると $3x^2+2xy+y^2=4x^2$ となるから, 最大値は $(x,y)=(\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\pm(-1+\sqrt{2})\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2})$ のときで $2+\sqrt{2}$. 最小値は $(x,y)=(\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\pm(-1-\sqrt{2})\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$ のときで $2-\sqrt{2}$.

4.　極値をとるなら $(x,y)=(0,0)$ かまたは $3x^2+2x:-2y=y:x$. 比例式より $2y^2=-x^2(3x+2)$. $x^2(x+1)=y^2$ と連立させると, $(x,y)=(0,0)$ でなければ, $x=-\dfrac{4}{5}, y=\pm\dfrac{4}{5\sqrt{5}}$. $(x,y)=(0,0)$ では極値をとらず、$(x,y)=(-\dfrac{4}{5},\dfrac{4}{5\sqrt{5}})$ で極小値 $-\dfrac{16}{25\sqrt{5}}$, $(x,y)=(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{4}{5\sqrt{5}})$ で極大値 $\dfrac{16}{25\sqrt{5}}$.

2 1. Lagrange 未定係数法より、垂線の足の座標 (x,y) は $x:y=a:b$ をみたす. したがって、$(x,y)=(\dfrac{ac}{a^2+b^2},\dfrac{bc}{a^2+b^2})$ この点と原点との距離は, $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2. Lagrange 未定係数法より、条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ のもとでの関数 $(x-c)^2+y^2$ の極値をとる点は $\dfrac{x}{a^2}:\dfrac{y}{b^2}=x-c:y$ をみたす. したがって $y=0$ または $x=\dfrac{a^2c}{a^2-b^2}$.

$c\geq\dfrac{|a^2-b^2|}{a}$ のときは, 最大値 $a+c$, 最小値 $|a-c|$.

$a>b, c<\dfrac{a^2-b^2}{a}$ のときは, 最大値 $a+c$, 最小値 $b\sqrt{\dfrac{a^2-b^2-c^2}{a^2-b^2}}$.

$a<b, c<\dfrac{b^2-a^2}{a}$ のときは, 最大値 $b\sqrt{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{b^2-a^2}}$, 最小値 $a-c$.

3 (1)$f(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$ とおくと, $f_x(x,y)=4x(x^2+y^2-1), f_y(x,y)=4y(x^2+y^2+1)$. C の点 $(x,y)=(\dfrac{2}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{3})$ での接線の方程式は

$$\frac{8}{9}(x-\frac{2}{3})+\frac{20\sqrt{2}}{9}(y-\frac{\sqrt{2}}{3})=0.$$

(2) ・ 座標軸との交点は $(0,0),(\pm\sqrt{2},0)$ の 3 点.

・ 点 (a,b) で x 軸と平行な接線をもつとすると, $f_x(a,b)=4a(a^2+b^2-1)=0$. これと $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$ を連立させると、$a=0$ または $4a^2=3$. したがって $(a,b)=(0,0),(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\pm\frac{1}{2})$. このうち $(0,0)$ は特異点でそれ以外の 4 点での接線は x 軸と平行. 同様に y 軸と平行な接線をもつ点は x 軸との交点であることがわかり, $(0,\pm\sqrt{2})$ の 2 点

・ 接線の傾きは $-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$ だから, これは $-xy(x^2+y^2-1)$ と同符号.

・ $y=b$ とおくと, x^2 の 2 次式 $(x^2+b^2)^2-2(x^2-b^2)=0$ は, $b^2>\frac{1}{4}$ なら解をもたず、$b^2=\frac{1}{4}$ なら $x^2=\frac{3}{4}$ だけが解であり, $0<b^2<\frac{1}{4}$ なら正の解を 2 つもち, $0=b^2$ なら $x^2=0,2$ だけが解である. したがって $y=b$ との交点は, $|b|>\frac{1}{2}$ なら 0 個, $|b|=\frac{1}{2}$ なら $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ の 2 個, $0<|b|<\frac{1}{2}$ なら 4 個, $b=0$ なら $x=0,\pm\sqrt{2}$ の 2 個.

$x=a$ とおくと y^2 の 2 次式 $(a^2+y^2)^2-2(a^2-y^2)=0$ は, $(a^2+1)^2>4a^2+1$ なら $y^2\geq 0$ となる解をもたず、$(a^2+1)^2=4a^2+1$ なら $y^2\geq 0$ となる解は $y^2=0$ だけであり、$(a^2+1)^2<4a^2+1$ なら $y^2\geq 0$ となる解はただ 1 つで正である. したがって、$x=a$ との交点は, $0<|a|<\sqrt{2}$ のときは 2 つ, $a=0,\pm\sqrt{2}$ のときは $y=0$ だけ, $|a|>\sqrt{2}$ のときはない.