2003 年度夏学期 数理科学 I 期末試験問題

理科 I 類 1-3,19-22 組　7 月 25 日 1 限 9:00-10:30 (90 分)　斎藤　毅

・問題用紙　1 枚、解答用紙　両面 2 枚、計算用紙 1 枚

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

・答案用紙は仮に白紙でも 2 枚とも名前を書いて提出して下さい.

最後の答だけを書くのではなく, 途中の計算などもできるだけくわしく書いて下さい.

問題 **1.** E を $(0,0),(1,0),(1,1)$ を頂点とする st 平面内の 3 角形とする．st 平面の点 (s,t) に対し，$x=s^2-t^2, y=2st$ で定まる xy 平面の点 (x,y) を対応させる。

(1)　この対応により E の点に対応する xy 平面の点全体は，不等式 $0 \leq x \leq 1-\dfrac{y^2}{4}, y \geq 0$ で定まる部分 D であることを示せ．(ヒント：$x+iy = (s+it)^2$．極座標で考える．)

(2)　変数変換 $x=s^2-t^2, y=2st$ を必ず使って重積分

$$\int_D ydxdy$$

を求めよ.

問題 **2.** O を xy 平面の原点，P を点 $(1,1)$，Q を点 $(\sqrt{2},0)$ とする．始点 O，終点 P の曲線 C_1,C_2,C_3 をつぎのように定める.

C_1　線分 OP.

C_2　放物線 $y=x^2$ の $0 \leq x \leq 1$ の部分.

C_3　線分 OQ と，原点を中心とし Q をとおる円の Q から P までの弧の短いほうをあわせたもの.

D_1 を C_1 と C_2 で囲まれた xy 平面の部分とし，D_2 を C_1 と C_3 で囲まれた xy 平面の部分とする.

(1) C_1,C_2,C_3 のパラメータ表示を与え，線積分

$$\int_{C_i} -ydx+2x^2dy$$

$i=1,2,3$ を求めよ.

(2) 重積分

$$\int_{D_i} -\frac{\partial}{\partial y}(-y)+\frac{\partial}{\partial x}2x^2dxdy$$

$i=1,2$ を求め，これらについて Green の公式を確かめよ.

問題 **3.** Lagrange 未定係数法を必ず使って、条件 $y^2+xy=1$ のもとでの関数 x^2+y^2 の最小値を求めよ.

略解. **1.** (1) st 平面の点 (s,t) を極座標 $(s,t)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で表すと，E にはいるための条件は $r\cos\theta \le 1, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$. st 平面の極座標が (r,θ) の点は，xy 平面の極座標が $(R,\Theta)=(r^2,2\theta)$ の点に写される．$\cos^2\theta=\frac{1+\cos\Theta}{2}$ だから，D は極座標についての条件 $R(1+\cos\Theta)\le 2, 0\le\Theta\le\frac{\pi}{2}$ で定まる．これを x,y で表せば $x^2+y^2\le(2-x)^2, x\ge 0, y\ge 0$ となるので示された.

(2) $\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial t}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2s & -2t\\ 2t & 2s\end{pmatrix}$ でこの行列の行列式は $4(s^2+t^2)$ だから，

$$\int_D ydxdy=\int_E 2st\cdot 4(s^2+t^2)dsdt=\int_{0\le s\le 1, 0\le t\le 1} 8s^3tdsdt=\int_0^1 4s^3ds\int_0^1 2tdt=1.$$

2. (1)

$$\begin{aligned}
C_1 :& x=t,\ y=t\ (0\le t\le 1),\\
C_2 :& x=t,\ y=t^2\ (0\le t\le 1),\\
C_3 :& x=t,\ y=0\ (0\le t\le \sqrt{2}),\\
& x=\sqrt{2}\cos(t-\sqrt{2}),\ y=\sqrt{2}\cos(t-\sqrt{2})\ (\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}).
\end{aligned}$$

$$\int_{C_1} -ydx+2x^2dy=\int_0^1 -t+2t^2dt=-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1}{6},$$

$$\int_{C_2} -ydx+2x^2dy=\int_0^1 -t^2+4t^3dt=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3},$$

$$\int_{C_3} -ydx+2x^2dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 t+4\sqrt{2}\cos^3 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1-\cos 2t+4\sqrt{2}(\cos t-\sin^2 t\cos t)dt$$

$$=[t-\frac{\sin 2t}{2}+4\sqrt{2}(\sin t-\frac{\sin^3 t}{3})]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+4\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{6\sqrt{2}})=\frac{\pi}{4}+\frac{17}{6}.$$

(2) $$\int_{D_1} -\frac{\partial}{\partial y}(-y)+\frac{\partial}{\partial x}2x^2dxdy=\int_0^1(\int_{x^2}^x(1+4x)dy)dx=\int_0^1(1+4x)(x-x^2)dx$$

$$=\int_0^1 x+3x^2-4x^3dx=\frac{1}{2}+1-1=\frac{1}{2}. \qquad \int_{C_2}-\int_{C_1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}.$$

$$\int_{D_2} -\frac{\partial}{\partial y}(-y)+\frac{\partial}{\partial x}2x^2dxdy=\int_{D_2}(1+4x)dxdy$$

$$=\frac{\pi}{4}+4\int_0^{\sqrt{2}} r^2dr\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta=\frac{\pi}{4}+4\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{8}{3}. \qquad \int_{C_3}-\int_{C_1}=\frac{\pi}{4}+\frac{17}{6}-\frac{1}{6}.$$

3. Lagrange 未定係数法より，最小値をとる点では，$y:2y+x=x:y$ をみたす. $y^2+xy=1$ より，$x=(1-y^2)/y$. これを代入して，$y^2=2(1-y^2)+(1-y^2)^2/y^2$. $Y=y^2$ とおくと，$Y^2=2(1-Y)Y+(1-Y)^2=1-Y^2$. したがって，$Y=1/\sqrt{2}$. $y>0$ の場合を考えれば十分だから，$y=2^{-1/4}$. $x^2+y^2=(1-Y)^2/Y+Y=1/Y-2+2Y=2\sqrt{2}-2$.