2変数関数の微分積分

1変数の場合は既知とする

高3の部分は仮定しない。

微分とは

関数を1次式で近似する

微分係数

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$l(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$x=a$での値 $f(a)$

グラフの傾き $f'(a)$

$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ を} \\ l(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \\ \text{で近似する} \end{array}}$

$l(x)$ のグラフは

$f(x)$ の こ の $x=a$ での接線

$$\frac{f(x) - l(x)}{x-a} \to 0 \quad x \to a \text{ のとき}$$

$$= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$$

例) $f(x) = x^2$ 　　$f'(a) = 2a$

$l(x) = a^2 + 2a(x-a) = 2ax - a^2$

$$\frac{x^2 - (2ax - a^2)}{(x-a)} = (x-a)^{\cancel{2}} \to 0$$

$f(x)$ の近似値として

$l(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

が考えられる

誤差はどのくらいの大きさか？

導関数　$f'(x)$

x ごとにそこでの $f(x)$ の微分係数

導関数の正負と関数の増減

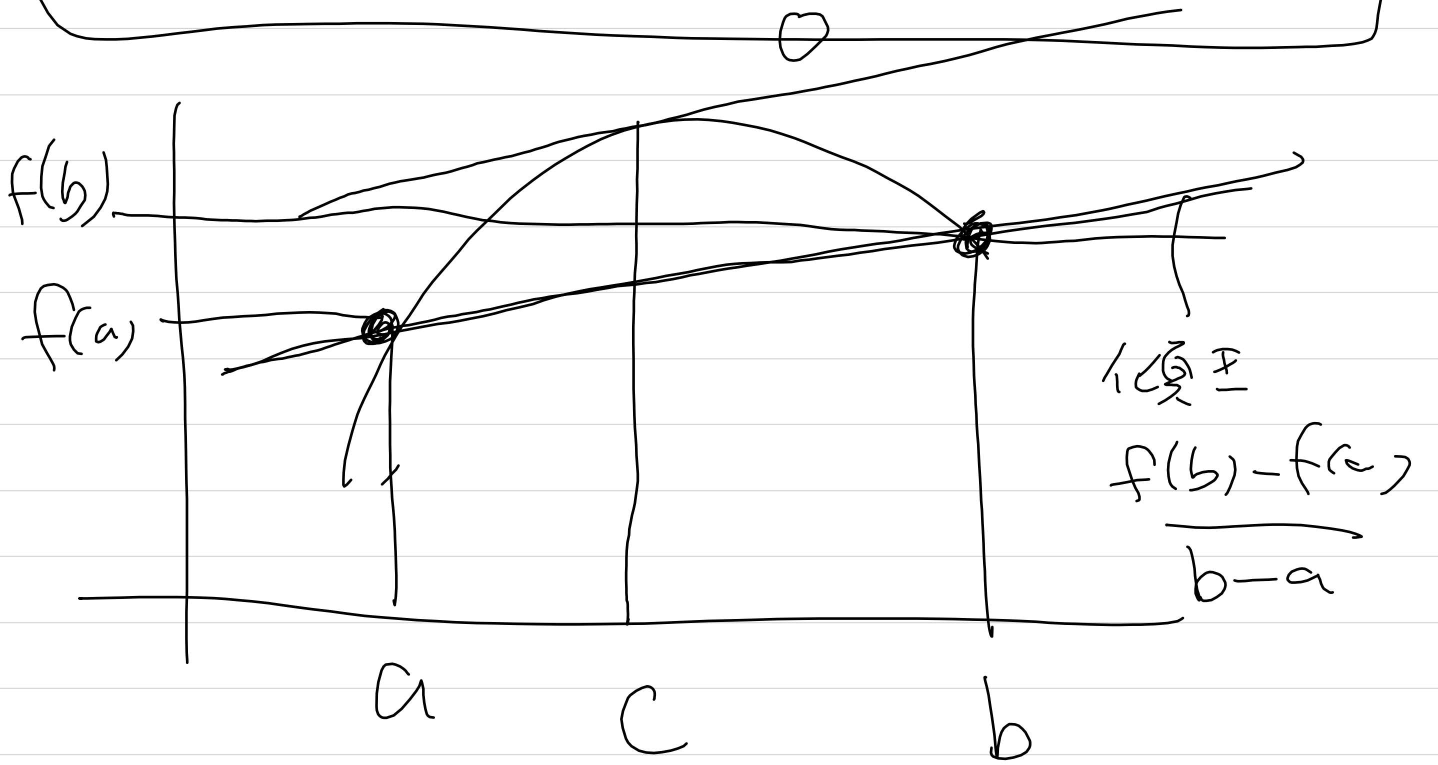
$f'(x) \geqq 0$ ならば $f(x)$ は単調増加

$a \leqq b$ ならば $f(a) \leqq f(b)$

証明：平均値の定理

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

をみたす c が a と b の間にある



例1 $f(x) = x^2$

$2c$

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$$

$$b^2 - a^2 = (a+b)(b-a)$$

$\boxed{c = \frac{a+b}{2}}$ とすれば

$a \leqq c \leqq b$ で

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$$

を満たす.

$f'(x) \geqq 0$ ならば $a \leqq b$ なら $f(a) \leqq f(b)$

$f'(x) \leqq g'(x)$ とすると $a \leqq b$ なら

$f(b) - f(a) \leqq g(b) - g(a)$

$h(x) = g(x) - f(x)$ とおくと

$h'(x) \geqq 0$ $a \leqq b$ なら $h(a) \leqq h(b)$

$|f'(x) - f'(a)| \leqq C$ ← 定数 とする

$-C \leqq f'(x) - f'(a) \leqq C$

$$(-C\cdot x)' \qquad (C\cdot x)'$$

$$-C \le f'(x) - f'(a) \le C$$

$$\left(f(x) - \ell(x)\right)'$$

$$f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$\left(f(x) - \ell(x)\right) \le C\cdot(x-a)$$

$$-\cancel{\left(f(a) - \ell(a)\right)}$$

$$0$$

$$f(x) - \ell(x) \le C\cdot(x-a)$$

$$-C\cdot(x-a) \le f(x) - \ell(x)$$

もとの関数　　近似する1次関数

$$|f(x) - l(x)| \leqq C\,|x-a|$$

誤差

$x \geqq a$ の場合と同様に $x \leqq a$ のときもなりたつ.

$$f(x) = x^2$$

$$l(x) = 2ax - a^2$$

$$|f(x) - l(x)| = (x-a)^2$$

$$\leqq 2M \cdot |x-a|$$

$|x-a| \leqq M$ とする.

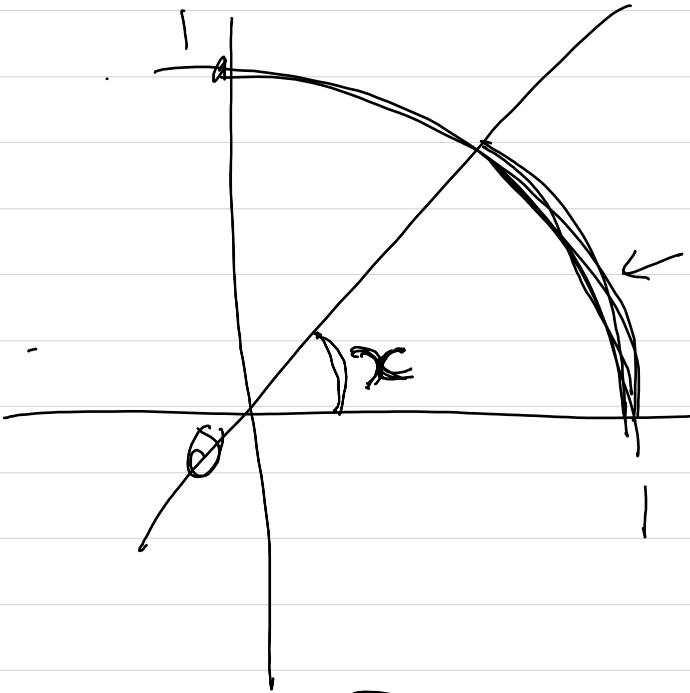
$$|f(x) - f'(a)| = |2x - 2a| = 2\cdot|x-a|$$

$$\leqq 2M = C$$

3角関数, 指数関数, 対数関数 の微分

$\cos x$ $\sin x$

弧度法



の長さで角を表す

1周 $= 2\pi$

直角 $= \frac{\pi}{2}$

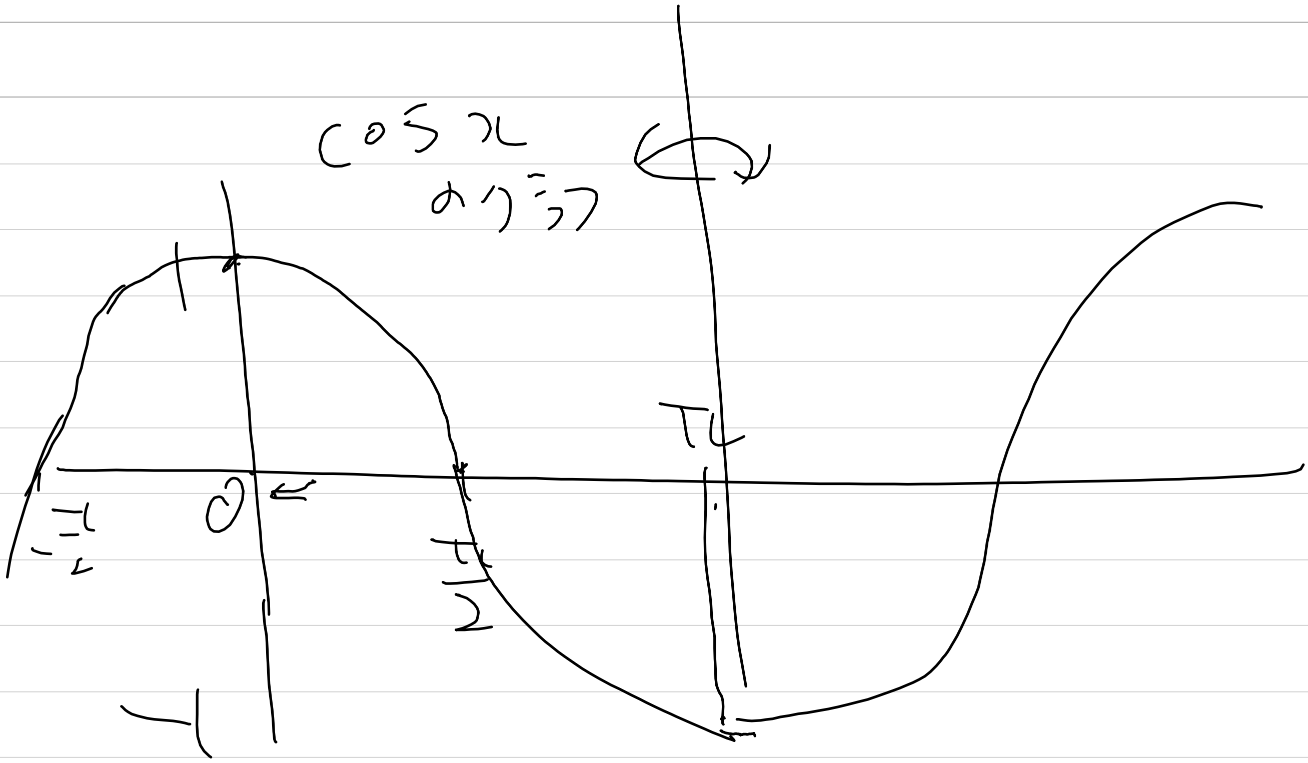
$45^\circ = \frac{\pi}{4}$

$30^\circ = \frac{\pi}{6}$

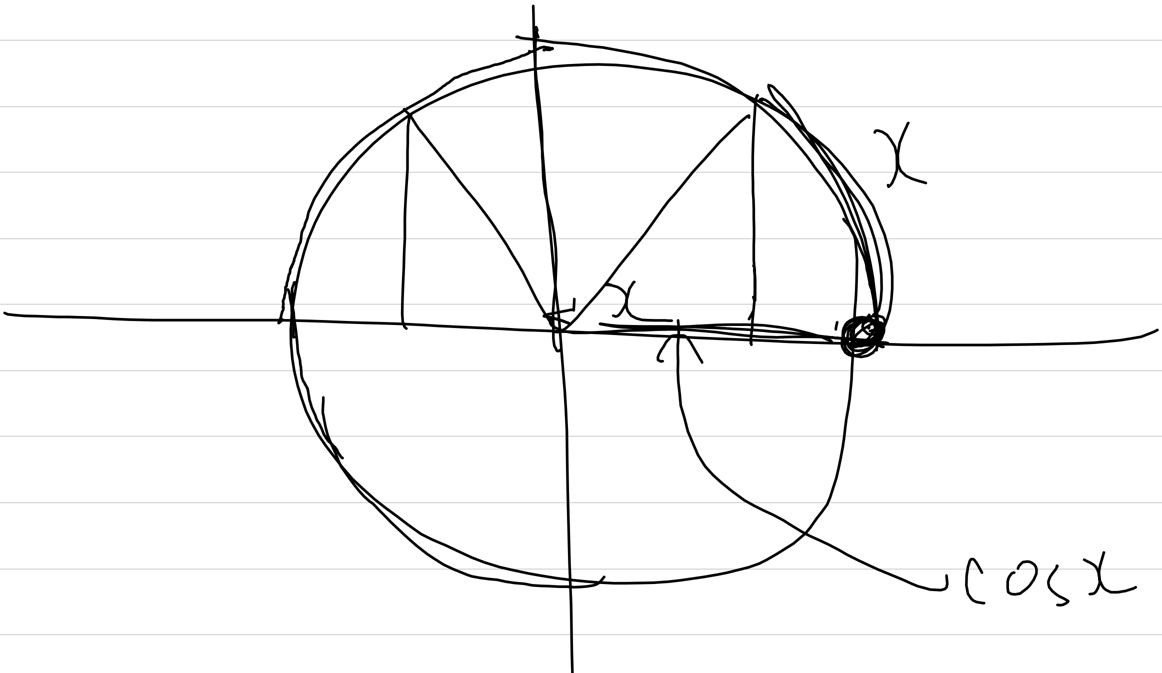
$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$$

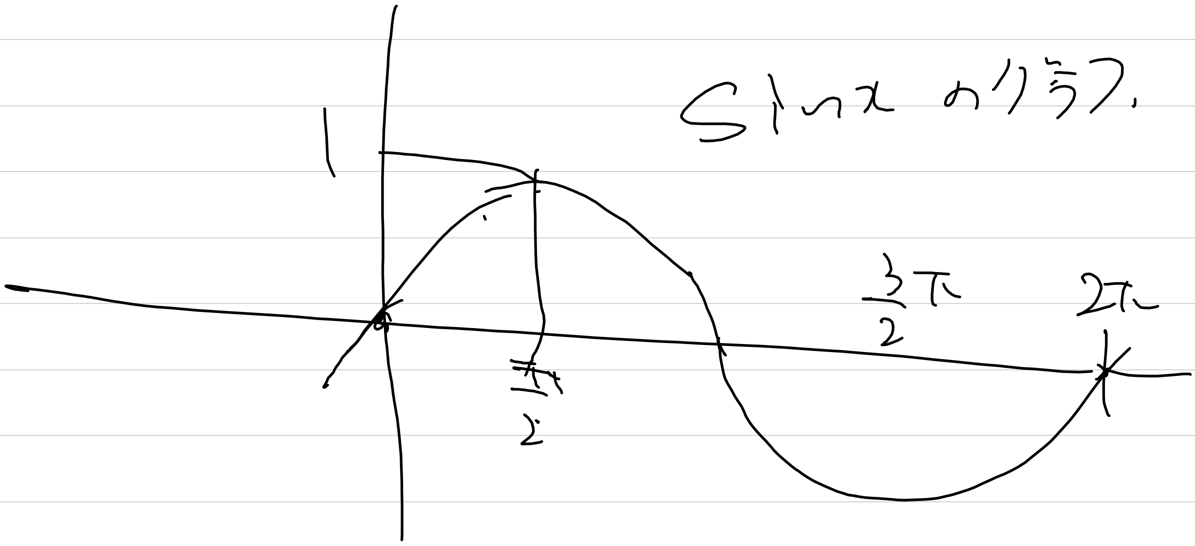
$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 = \sin 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1 = \cos 0$$

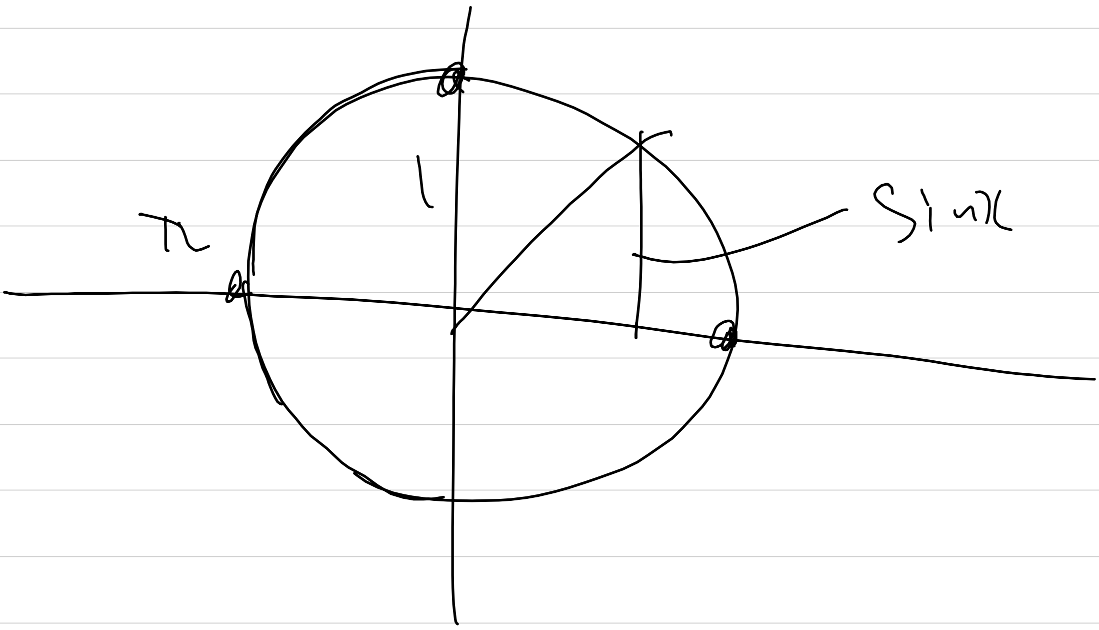


周期2πで
くりかえす



$\sin x$ のグラフ





$\cos x$ の導関数 $\cos' x$

$\sin x$ 〃 $\sin' x$

加法定理.

$f(x) = \cos x$ $\qquad$ $x - a = h$

$\qquad\qquad\qquad\qquad x = a + h$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\cos(a+h) = \cos a \cdot \cos h - \sin a \cdot \sin h$$

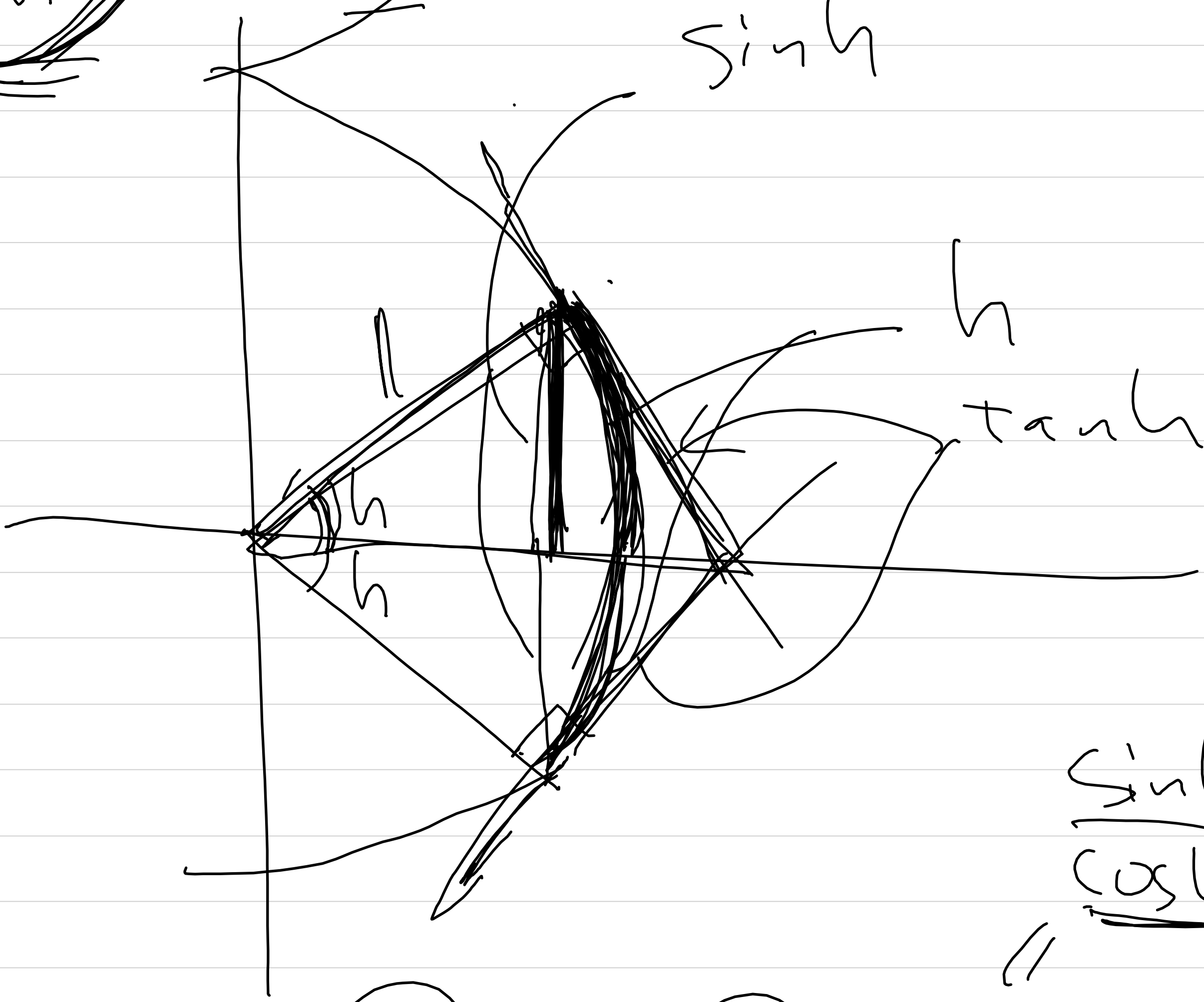
$$- \cos a$$

$$\frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \cos a \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} - \sin a \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1}$$

$h \to 0$

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{\overbrace{\cos^2 h - 1}^{-\sin^2 h}}{\cos h + 1} = - \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \cdot \frac{\overbrace{\sin h}^{\to 0}}{\underbrace{\cos h + 1}_{\to 2}} \to 0$$

$\frac{\sin h}{h} \to 1$ ∵ $h \to 0$ 이면



$\frac{\sin h}{\cos h}$ = tan h

$\cancel{2}\sin h \le \cancel{2}h \le \cancel{2}\tan h$

$h > 0$

$\cos h \le \frac{\sin h}{h} \le 1$

$\cos h \to 1$

$\cos' a = -\sin a.$

$$\boxed{\cos' x = -\sin x}$$

$$\sin' x = \cos x$$

を同様に加法定理と

$$\frac{\sin h}{h} \to 1 \quad (h \to 0)$$

を使うと示せる

$$\tan' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$= \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$